SITZUNGSBERICHTE

DER PREUSSISCHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

JAHRGANG 1923

PHYSIKALISCH-MATHEMATISCHE KLASSE

VERZEICHNIS DER MITGLIEDER DER AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN AM 1. JANUAR 1923
ÖFFENTLICHE SITZUNG ZUR FEIER DES JAHRESTAGES KÖNIG FRIEDRICHS II. AM 25. JANUAR 1923
ÖFFENTLICHE SITZUNG ZUR FEIER DES LEIBNIZISCHEN JAHRESTAGES AM 28. JUNI 1923
VERZEICHNIS DER VOM 1. DEZEMBER 1922 BIS 30. NOVEMBER 1923 EINGEGANGENEN DRUCKSCHRIFTEN

STÜCK I—XXXIV. MIT FÜNF TAFELN

BERLIN 1923
VERLAG DER AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

IN KOMMISSION BEI WALTER DE GRUYTER U. CO.

INHALT

Inhalt

1923 I. II. III

SITZUNGSBERICHTE

DER PREUSSISCHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

Physikalisch-mathematische Klasse

BERLIN 1923

VERLAG DER AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

IN KOMMISSION BEI WALTER DE GRUYTER U. CO.

Aus dem Reglement für die Redaktion der akademischen Druckschriften

Aus § 1.

Die Akademie gibt gemäß § 41, 1 der Statuten zwei fortlaufende Veröffentlichungen heraus: »Sitzungsberichte der Preußischen Akademie der Wissenschaften« und »Abhandlungen der Preußischen Akademie der Wissenschaften«.

Aus § 2.

Jede zur Aufnahme in die Sitzungsberichte oder die Abhandlungen bestimmte Mitteilung muß in einer akademischen Sitzung vorgelegt werden, wobei in der Regel das druckfertige Manuskript zugleich einzuliefern ist. Nichtmitglieder haben hierzu die Vermittelung eines ihrem Fache angehörenden ordentlichen Mitgliedes zu benutzen.

§ 3.

Der Umfang einer aufzunehmenden Mitteilung soll in der Regel in den Sitzungsberichten bei Mitgliedern 32, bei Nichtmitgliedern 8 Seiten in der gewöhnlichen Schrift der Sitzungsberichte, in den Abhandlungen 12 Druckbogen von je 8 Seiten in der gewöhnlichen Schrift der Abhandlungen nicht übersteigen.

Überschreitung dieser Grenzen ist nur mit Zustimmung der Gesamtakademie oder der betreffenden Klasse statthaft und ist bei Vorlage der Mitteilung ausdrücklich zu beantragen. Läßt der Umfang eines Manuskripts vermuten, daß diese Zustimmung erforderlich sein werde, so hat das vorlegende Mitglied es vor dem Einreichen von sachkundiger Seite auf seinen mutmaßlichen Umfang im Druck abschätzen zu lassen.

§ 4.

Sollen einer Mitteilung Abbildungen im Text oder auf besonderen Tafeln beigegeben werden, so sind die Vorlagen dafür (Zeichnungen, photographische Originalaufnahmen usw.) gleichzeitig mit dem Manuskript, jedoch auf getrennten Blättern, einzureichen.

Die Kosten der Herstellung der Vorlagen haben in der Regel die Verfasser zu tragen. Sind diese Kosten aber auf einen erheblichen Betrag zu veranschlagen, so kann die Akademie dazu eine Bewilligung beschließen. Ein darauf gerichteter Antrag ist vor der Herstellung der betreffenden Vorlagen mit dem schriftlichen Kostenanschlage eines Sachverständigen an den vorsitzenden Sekretar zu richten, dann zunächst im Sekretariat vorzuberaten und weiter in der Gesamtakademie zu verhandeln.

Die Kosten der Vervielfältigung übernimmt die Akademie. Über die voraussichtliche Höhe dieser Kosten ist — wenn es sich nicht um wenige einfache Textfiguren handelt — der Kostenanschlag eines Sachverständigen beizufügen. Überschreitet dieser Anschlag für die erforderliche Auflage 5000 Mark, so ist Vorberatung durch das Sekretariat geboten.

Aus § 5.

Nach der Vorlegung und Einreichung des **vollständigen druckfertigen** Manuskripts an den zuständigen Sekretar oder an den Archivar wird über Aufnahme der Mitteilung in die akademischen Schriften, und zwar, wenn eines der anwesenden Mitglieder es verlangt, verdeckt abgestimmt.

Mitteilungen von Verfassern, welche nicht Mitglieder der Akademie sind, sollen der Regel nach nur in die Sitzungsberichte aufgenommen werden. Beschließt eine Klasse die Aufnahme der Mitteilung eines Nichtmitgliedes in die Abhandlungen, so bedarf dieser Beschluß der Bestätigung durch die Gesamtakademie.

Aus § 6.

Die an die Druckerei abzuliefernden Manuskripte müssen, wenn es sich nicht bloß um glatten Text handelt, ausreichende Anweisungen für die Anordnung des Satzes und die Wahl der Schriften enthalten. Bei Einsendungen Fremder sind diese Anweisungen von dem vorlegenden Mitgliede vor Einreichung des Manuskripts vorzunehmen. Dasselbe hat sich zu vergewissern, daß der Verfasser seine Mitteilung als vollkommen druckreif ansieht.

Die erste Korrektur ihrer Mitteilungen besorgen die Verfasser. Fremde haben diese erste Korrektur an das vorlegende Mitglied einzusenden. Die Korrektur soll nach Möglichkeit nicht über die Berichtigung von Druckfehlern und leichten Schreibversehen hinausgehen. Umfängliche Korrekturen Fremder bedürfen der Genehmigung des redigierenden Sekretars vor der Einsendung an die Druckerei, und die Verfasser sind zur Tragung der entstehenden Mehrkosten verpflichtet. Übersteigen die Kosten der Korrektur einen gewissen Prozentsatz der Satzkosten, so fallen die Mehrkosten den Verfassern selbst ganz oder teilweise zur Last.

Aus § 8.

Von allen in die Sitzungsberichte oder Abhandlungen aufgenommenen wissenschaftlichen Mitteilungen, Reden, Adressen oder Berichten werden für die Verfasser, von wissenschaftlichen Mitteilungen, wenn deren Umfang im Druck 4 Seiten übersteigt, auch für den Buchhandel Sonderabdrucke hergestellt, die alsbald nach Erscheinen ausgegeben werden.

Von Gedächtnisreden werden ebenfalls Sonderabdrucke für den Buchhandel hergestellt, indes nur dann, wenn die Verfasser sich ausdrücklich damit einverstanden erklären.

§ 9.

Von den Sonderabdrucken aus den Sitzungsberichten erhält ein Verfasser, welcher Mitglied der Akademie ist, zu unentgeltlicher Verteilung ohne weiteres 50 Freiexemplare; er ist indes berechtigt, zu gleichem Zwecke auf Kosten der Akademie weitere Exemplare bis zur Zahl von noch 100 und auf seine Kosten noch weitere bis zur Zahl von 200 (im ganzen also 350) abziehen zu lassen, sofern er dies rechtzeitig dem redigierenden Sekretar angezeigt hat; wünscht er auf seine Kosten noch mehr Abdrucke zur Verteilung zu erhalten, so bedarf es dazu der Genehmigung der Gesamtakademie oder der betreffenden Klasse. — Nichtmitglieder erhalten 50 Freiexemplare und dürfen nach rechtzeitiger Anzeige bei dem redigierenden Sekretar weitere 200 Exemplare auf ihre Kosten abziehen lassen.

Von den Sonderabdrucken aus den Abhandlungen erhält ein Verfasser, welcher Mitglied der Akademie ist, zu unentgeltlicher Verteilung ohne weiteres 30 Freiexemplare; er ist indes berechtigt, zu gleichem Zwecke auf Kosten der Akademie weitere Exemplare bis zur Zahl von noch 100 und auf seine Kosten noch weitere bis zur Zahl von 100 (im ganzen also 230) abziehen zu lassen, sofern er dies rechtzeitig dem redigierenden Sekretar angezeigt hat; wünscht er auf seine Kosten noch mehr Abdrucke zur Verteilung zu erhalten, so bedarf es dazu der Genehmigung der Gesamtakademie oder der betreffenden Klasse. — Nichtmitglieder erhalten 30 Freiexemplare und dürfen nach rechtzeitiger Anzeige bei dem redigierenden Sekretar weitere 100 Exemplare auf ihre Kosten abziehen lassen.

(Fortsetzung auf S. 3 des Umschlags.)

SITZUNGSBERICHTE
DER PREUSSISCHEN
AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.
1923

I. Sitzung der physikalisch-mathematischen Klasse. 11. Januar.

Vorsitzender Sekretar: Hr. Rubner.

1. Hr. Schmidt las über die Eindeutigkeit der Darstellung einer Funktion durch ein Fouriersches Integral.

Es wird für das bekannte Theorem ein Beweis auseinandergesetzt, der dem Riemannschen Beweise für das entsprechende Theorem bei Fourierschen Reihen analog verläuft.

2. Hr. Schur legte eine Mitteilung des Hrn. Dr. A. Ostrowski, Privatdozent an der Universität Hamburg, vor: »Einige Bemerkungen über Singularitäten Taylorscher und Dirichletscher Reihen«. (Ersch. später.)

Der Verfasser beweist, daß eine Dirichletsche Reihe, deren Konvergenzgerade die imaginäre Achse ist und deren Exponenten genügend stark anwachsen, unendlich viele singuläre Stellen besitzt, über deren Lage genauere Angaben gemacht werden können. Dieser Satz gewährt einen tieferen Einblick in das Zustandekommen der natürlichen Grenze im Falle des Fabryschen Lückensatzes, den Carlson, Landau und Szász auf Dirichletsche Reihen ausgedehnt haben.

3. Hr. Schur legte eine Mitteilung des Hrn. Prof. Dr. G. Pólya in Zürich vor: »Über die Existenz unendlich vieler singulärer Punkte auf der Konvergenzgeraden gewisser Dirichletscher Reihen«. (Ersch. später.)

Eine Potenzreihe besitzt auf dem Konvergenzrand mindestens einen singulären Punkt, eine gewöhnliche Dirichletsche Reihe im allgemeinen keinen. Dieser Umstand wird durch eine allgemeine Beziehung zwischen der Exponentenfolge einer Dirichletschen Reihe und ihren Singularitäten am Konvergenzrand aufgeklärt, die einerseits den »Lückensatz« nebst verschiedenen Verallgemeinerungen, andererseits die neue Tatsache umfaßt, daß eine Dirichletsche Reihe unendlich viele singuläre Punkte am Konvergenzrand besitzen muß, wenn die Differenz zwischen zwei sukzessiven Exponenten der Null nicht beliebig nahekommt.

Ausgegeben am 15. Februar.

SITZUNGSBERICHTE
DER PREUSSISCHEN
AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.
1923

II. Gesamtsitzung. 18. Januar.

Vorsitzender Sekretar: Hr. Roethe.

1. Hr. Heymann las über den Boykott.

Der Boykott ist aus genossenschaftlicher Friedloslegung herausgewachsen, die schon gegen Ausgang des Mittelalters in die Benutzung genossenschaftlichen Zwanges gegenüber Dritten umschlug. Das moderne Recht hat die Boykottgrundsätze sehr eingehend ausgebaut, und zwar die zivilrechtliche Haftung in Deutschland vorzugsweise unter dem Gesichtspunkte der Verletzung der guten Sitten, d. h. der Gerechtigkeitsidee. Diese wurde in ihrer Entwicklung besprochen, als Anwendungsfall des Sittlichkeitsprinzips bezeichnet, als normatives Prinzip im Sinne einer Gestaltung des Rechts zur Friedensordnung unter Wahrung der Menschenwürde und der fördernden Nächstenliebe, eine Auffassung, in der die neueren Lehren von verschiedenen Ausgangspunkten immer mehr zusammentreffen.

2. Sodann sprach Hr. Hellmann über »Störungen im jährlichen Gange der Temperatur in Deutschland«.

Fünftägige Mittel der Temperatur aus 60 gleichzeitigen Beobachtungsjahren (1851—1910) von 30 deutschen Stationen lassen typische Störungen im Jahresverlauf erkennen: Mitte Februar, Mitte Juni, Ende September, Mitte Dezember, nicht aber Mitte Mai, dessen Kälterückfälle im Volksglauben tief eingewurzelt sind. Auch die 150jährige Reihe (1766—1915) von Berlin, das wegen des gleichartigen Verhaltens aller Stationen als Repräsentant von ganz Deutschland dienen kann, zeigt nichts von ihnen. Zerlegt man aber die ganze Reihe in 15 zehnjährige, so sieht man, daß gegen das Jahr 1845 ein Wendepunkt im Auftreten der Maistörung eingetreten ist: von 1766—1845 sind die Kälterückfälle in der Pentade vom 11. bis 15. Mai in sieben von den acht Jahrzehntmitteln nachweisbar, seitdem in keinem einzigen. Die Zeit ihres Eintretens ist somit unbestimmter geworden.

Es wird noch nachgewiesen, daß alle diese Störungen nicht auf kosmische Ursachen zurückzuführen, sondern daß sie regionaler Natur sind.

3. Hr. Kehr legte eine Arbeit des Archivars und Bibliothekars der Akademie Hrn. Prof. Dr. Eduard Sthamer vor über »Die verlorenen Register Karls I. von Anjou«.

Die von Carlo de Lellis im 17. Jahrhundert angefertigten Auszüge aus den seither verlorenen anjouinischen Akten werden, soweit sie als Ergänzung zu den im Staatsarchiv zu Neapel erhaltenen Registerbänden Karls I. von Anjou von Camillo Minieri Riccio und Angelo Broccoli veröffentlicht sind, einer eingehenden Kritik unterzogen. Die undatierten Exzerpte werden gruppenweise analysiert, der archivalische Charakter ihrer Vorlagen im einzelnen bestimmt und ihre Einreihung in die Ur-Register gemäß der Durrieuschen Rekonstruktion nach chronologischen und sachlichen Gesichtspunkten festgestellt. Auf diese Weise werden die nach Tausenden zählenden Auszüge des de Lellis aus den verlorenen Mandaten Karls von Anjou mit Sicherheit den richtigen Jahren und Monaten zugewiesen und dadurch der historischen Forschung erst wirklich erschlossen.

4. Das Ehrenmitglied Hr. Max Lenz in Hamburg übersandte sein Werk: »Wille, Macht und Schicksal« (München und Berlin, 1922).

5. Das Ehrenmitglied Hr. Konstantin Carathéodory in Athen übersandte seine Schrift: Περὶ ἑνὸς μετασχηματισμοῦ ἀναλόγου πρὸς τὸν μετασχηματισμὸν τοῦ Legendre (Athen 1922).

6. Der Inhaber der silbernen Leibniz-Medaille Hr. Edmund von Lippmann in Halle übersandte sein Werk: »Beiträge zur Geschichte der Naturwissenschaften und der Technik« (Berlin 1923).

7. Aus dem Nachlasse von Hermann Diels wurde der Akademie das Manuskript seines Werkes »Index Aeolicus« überwiesen.

8. Aus Mitteln der Akademie wurden 20000 Mark für die Fortführung der Arbeiten der Orientalischen Kommission bewilligt.

Die Preußische Regierung hat durch Erlaß vom 11. Januar 1923 die Wahl des Direktors der Sternwarte in Berlin-Babelsberg, Hrn. Prof. Dr. Paul Guthnick, und des ordentlichen Professors an der Universität Berlin, Hrn. Dr. Franz Keibel, zu ordentlichen Mitgliedern der physikalisch-mathematischen Klasse und die Wahl des ordentlichen Professors an der Universität Berlin, Hrn. Dr. Ernst Troeltsch, zum ordentlichen Mitglied der philosophisch-historischen Klasse der Akademie bestätigt.

Die Akademie hat das ordentliche Mitglied ihrer physikalisch-mathematischen Klasse Hrn. Johannes Orth am 13. Januar durch den Tod verloren.

Störungen im jährlichen Gange der Temperatur in Deutschland.

Von G. Hellmann.

Nachdem ich vor 40 Jahren eine nähere Untersuchung des jährlichen Ganges der Temperatur in Norddeutschland mittels fünftägiger Mittel aus der Periode 1848—1882 veröffentlicht hatte, die später von V. Kremser auf 50 Jahrgänge erweitert wurde[1], lag mir daran, bei der im letzten Jahrzehnt durchgeführten Bearbeitung des Klimas von Deutschland diese Untersuchung auf ganz Deutschland auszudehnen. Ich wählte dazu die 60jährige Periode 1851—1910, für die von 30 Stationen[2] die Ableitung der Pentadenmittel möglich war. Allerdings gab es bei einigen Stationen kleine Lücken, die aber nach den gleichzeitigen Beobachtungen einer oder mehrerer Nachbarstationen ausgefüllt werden konnten. Diese Rechnungen und Ergänzungen wurden vom Observator Professor G. v. Elsner mit gewohnter Sorgfalt ausgeführt. Die Zahlenergebnisse liegen im »Klima-Atlas von Deutschland«, Tabelle 5, bereits gedruckt vor.

Leitet man aus diesen 60jährigen Mittelwerten die Änderung der Temperatur von Pentade zu Pentade ab, oder, was noch zweckmäßiger ist, stellt

---

[1] G. Hellmann, Über den jährlichen Gang der Temperatur in Norddeutschland (Zeitschr. d. preuß. statistischen Bureaus 1883. 4°, mit graphischen Darstellungen). — V. Kremser, Fünfzigjährige Pentadenmittel der Lufttemperatur für Norddeutschland (Ergebn. d. Beobacht. a. d. Stationen II. und III. Ordnung i. J. 1900. Berlin 1906. 4°. S. XVII bis XXIV, mit einer graph. Darstellung).

Der erste, der fünftägige Mittel eingeführt und zur Untersuchung des jährlichen Ganges der Temperatur benutzt hat, war der Schwede J. Öfverbom, der 1808 fünfzigjährige Pentadenmittel von Stockholm veröffentlichte (Om värmens olikhet under en tid af 50 år vid Vetens. Acad. Obs. i Stockholm, Akad. Handl. Stockholm XXIX, 1808), dagegen verwendete zum gleichen Zweck sein Landsmann G. Wahlenberg zehntägige Mittel (De vegetatione et climate in Helvetia septentrionali ... observatis et cum summi septentrionis comparatis tentamen. Turici Helv. 1813. 8°). Sodann hat H. W. Brandes in seinen »Untersuchungen über den Gang der Wärme-Änderungen im Laufe des Jahres« zum ersten Mal bei einer großen Zahl von Stationen Pentadenmittel angewandt. Das ihm damals zur Verfügung stehende Beobachtungsmaterial war aber noch zu dürftig und ungleichartig (Brandes, Beiträge zur Witterungskunde. Leipzig 1820. 8°). Auch die später von L. F. Kämtz (Lehrbuch der Meteorologie II, 49 bis 59, 1832) gegebene Erweiterung litt noch unter dem Mangel an längeren Beobachtungsreihen. Erst zwei Jahrzehnte später lehrten die großen Arbeiten Doves, der für den Gebrauch von Pentaden am meisten gewirkt hat, über die nichtperiodischen Änderungen der Wärme auf der Erdoberfläche die Notwendigkeit der Verwendung gleichzeitiger Beobachtungen bei solchen Untersuchungen.

[2] Die 30 Stationen sind: Memel, Tilsit, Königsberg i. Pr., Klaußen bei Lyck, Konitz, Köslin, Stettin, Berlin, Frankfurt a. O., Posen, Breslau, Ratibor, Görlitz, Dresden, Torgau, Halle a. S., Erfurt, Lüneburg, Kiel, Emden, Gütersloh, Kleve, Köln, Trier, Darmstadt, Bayreuth, Stuttgart, Augsburg, München, Friedrichshafen.

man den Verlauf der Temperatur für alle Stationen auf einem großen Blatt in demselben Maßstabe und in geographischer Reihenfolge graphisch so dar, daß die nördlichste Station, Memel, als die oberste und die südlichste, Friedrichshafen, als die unterste erscheint, so kann man folgende Feststellungen machen[1]:

Der Temperaturverlauf zeigt bei allen Stationen, mit Ausnahme der im nördöstlichen Randgebiet (Memel, Tilsit) liegenden, eine so weitgehende Übereinstimmung, daß man eine einzelne Station als den Repräsentanten ihrer weiteren Umgebung bis auf etwa 80 km Entfernung ansehen kann. Es ist dies eine unmittelbare Folge der Gleichzeitigkeit des Auftretens der nichtperiodischen Temperaturänderungen über großen Gebieten.

Im Anstieg und im Abfall der Temperatur treten an allen Stationen Unterbrechungen des regelmäßigen Verlaufes ein; sie bestehen im aufsteigenden Ast der Temperaturkurve in Verlangsamung der Temperaturzunahme oder in Rückgang der Temperatur (Kälterückfall) oder umgekehrt in zu raschem Temperaturanstieg, während entsprechend im absteigenden Ast der Kurve Verlangsamung in der Temperaturabnahme, Wärmerückfall und zu rasche Temperaturabnahme vorkommen. Der Abfall der Temperatur verläuft ruhiger als der Anstieg.

Die niedrigste Temperatur fällt auf die erste Pentade des Januar in Ostdeutschland (Memel ausgenommen) östlich vom 14. Längengrade, desgleichen in Augsburg und München, also wohl auf der ganzen oberbayrischen Hochebene. Im übrigen Deutschland tritt das Minimum in der dritten Januarpentade (11. bis 15.) ein.

Auch die höchste Temperatur gehört nicht einheitlich in ganz Deutschland derselben Pentade an: im östlichen Norddeutschland ist die Kurve zweigipflig mit Höchstwerten am 17. und 27. Juli; im nordwestlichen Deutschland (Lüneburg, Kiel) verläuft der Scheitel der Kurve ganz flach, doch fällt das Maximum auf den 17.; im übrigen Deutschland, also in der Mitte, im Westen und im Süden, ist der Scheitel spitz mit einem entschiedenen Höchstwert am 17. Juli.

Von den Störungen im Verlaufe der Temperatur innerhalb eines Jahres will ich nur die bedeutenden, die als typisch bezeichnet werden können, hier aufführen.

In der Pentade vom 10. bis 14. Februar stellt sich bei allen Stationen ein Rückgang der Temperatur ein, der an einigen Orten mehr als einen Grad beträgt: er bringt Memel das absolute Minimum der Temperatur. Wir bezeichnen ihn gewöhnlich als Nachwinter[2].

---

[1] Diese und die später erwähnten Kurven des jährlichen Temperaturganges können aus Sparsamkeitsrücksichten hier nicht wiedergegeben werden, das mitgeteilte Zahlenmaterial (im Klima-Atlas und an dieser Stelle) gibt aber die Möglichkeit, sie sich neu zu zeichnen. Bei der Diskussion der Zahlenergebnisse leisten sie vortreffliche Dienste.

[2] Memel liegt am Südrande eines großen Gebietes, in dem nicht der Januar, sondern der Februar der kälteste Monat ist. Über diese Anomalie, die ihr Maximum an der Westküste von Finnland hat, verbreitet die Inauguraldissertation meines Schülers Karl Schneider (Über eine Anomalie des jährlichen Temperaturgangs in Nordeuropa, Berlin 1921 [noch ungedruckt]), neues Licht.

Der März weist drei Zacken oder Rückgänge auf, von denen nur der mittlere (12. bis 16.) bedeutend ist, bis zu 0.5°.

Ende April tritt bei den Stationen des norddeutschen Binnenlandes eine merkliche Verzögerung in der Temperaturzunahme ein.

Im Mai sind Kälterückfälle nicht erkennbar, insbesondere zeigt die Pentade vom 11. bis 15., der die »gestrengen Herren« oder die drei »Eisheiligen« (11. bis 13., Mamertus, Pancratius, Servatius) angehören, keinerlei Depression in der Kurve.

Ende Mai und Anfang Juni (Mai 26 bis Juni 4) steigt die Temperatur ungewöhnlich rasch an, um von da ab wieder zurückzugehen. Die tiefste Stelle dieses Kälterückfalles, den die Landwirte »Schafkälte« nennen[1], liegt in Norddeutschland etwa nördlich von $51^1/_2$° nördl. Breite in der Pentade vom 10. bis 14. Juni, im übrigen Deutschland in der Pentade vom 15. bis 19. Juni. Die küstennahen Orte Memel, Tilsit, Königsberg, Kiel haben keinen Temperaturrückgang, sondern nur eine Verzögerung im Anstieg.

Im Juli macht sich, ehe das Maximum der Temperatur am 17. bzw. 27. erreicht wird, noch ein kleiner Rückgang oder eine Verzögerung im Anstieg bemerkbar.

Der August zeigt eine ziemlich glatte Kurve des Abfalls, der nur im Binnenland in der Zeit vom 14. bis 18. verlangsamt ist.

Ebenso fällt die Temperatur im September ganz gleichmäßig bis gegen das Ende, an dem (September 28 bis Oktober 2) ein Wärmerückfall einsetzt, der in Schlesien am stärksten auftritt (Ratibor 0.9°), im Westen von Norddeutschland (Kleve, Emden) aber nur schwach, ja sich sogar in das Gegenteil verkehrt (Trier, Köln haben 0.1° Abnahme). Dieser Wärmerückfall führt im Volksmunde den Namen »Altweibersommer«[2].

Im Oktober geht die Abnahme der Temperatur regelmäßig vor sich, und das geschieht auch im November, in dem vom 27. bis 1. Dezember eine Verlangsamung einsetzt, die aber alsbald von einem ungewöhnlich großen Wärmerückfall (7. bis 11. Dezember) abgelöst wird. Er ist in Nordostdeutschland am bedeutendsten und beträgt hier zum Teil mehr als einen Grad (Konitz 1.4°, Tilsit 1.3°). Dagegen ist er im südlichsten Deutschland kaum zu merken, während er sich in Westdeutschland auf die Pentade vom 12. bis 16. verschiebt. Dieser Wärmerückfall wurde noch nicht näher erforscht. Ich nahm (ohne nähere Untersuchung) bisher an, daß er mit dem sekundären Maximum der Niederschläge im Dezember zusammenhängt und daß beide Erscheinungen durch die vom Ozean kommenden Wirbel hervorgerufen werden, die gerade um diese Zeit zahlreich sind und warme, feuchte Luft ins Land bringen.

Es entsteht nun die Frage, welche Genauigkeit haben die 60jährigen Pentadenmittel, aus denen die vorstehenden Feststellungen abgeleitet sind? Zu dem Ende wurden für zwei Stationen, Dresden und Stuttgart, die mittleren Abweichungen der Pentadenmittel berechnet (Tab. 1), aus denen die

---

[1] Um die Zeit werden gewöhnlich die Schafe gebadet und geschoren; wenn dabei kaltes Wetter eintritt, gehen namentlich die jungen Lämmer leicht zugrunde.

[2] Mein Schüler Artur Lehmann hat in seiner Inauguraldissertation (Berlin 1911) den Altweibersommer näher untersucht.

wahrscheinlichen Fehler mittels der Fechnerschen Formel leicht abgeleitet werden können. Man braucht nur den Betrag der mittleren Abweichung mit 0.11 zu multiplizieren. Danach schwankt der wahrscheinliche Fehler

Tab. 1. Mittlere Abweichungen der fünftägigen Temperaturmittel aus 60 jährigen Beobachtungen (1851—1910).

		Dresden	Stuttgart			Dresden	Stuttgart			Dresden	Stuttgart
Januar	1—5	4.0	4.0	Mai	1—5	2.8	2.6	September	3—7	2.2	2.2
	6—10	3.6	3.6		6—10	2.4	2.4		8—12	1.8	2.0
	11—15	3.3	3.5		11—15	3.0	2.8		13—17	1.6	1.9
	16—20	3.7	3.7		16—20	3.3	3.0		18—22	1.7	1.8
	21—25	3.2	3.3		21—25	2.6	2.2		23—27	2.2	2.4
	26—30	2.6	2.9		26—30	2.5	2.4		28—2	2.1	2.2
Februar	31—4	2.9	3.0	Juni	31—4	2.5	2.3	Oktober	3—7	2.1	2.2
	5—9	3.3	3.1		5—9	2.0	2.3		8—12	2.1	2.4
	10—14	3.9	3.4		10—14	2.2	2.0		13—17	2.1	2.0
	15—19	2.9	3.0		15—19	2.3	2.4		18—22	2.5	2.2
	20—24	2.9	2.9		20—24	1.7	1.7		23—27	2.2	2.1
	25—1	2.8	2.7		25—29	1.8	1.8		28—1	2.3	2.2
März	2—6	3.0	2.9	Juli	30—4	1.9	2.2	November	2—6	2.8	2.6
	7—11	2.7	2.8		5—9	1.7	2.4		7—11	2.4	2.6
	12—16	2.8	2.5		10—14	2.1	2.1		12—16	2.4	2.4
	17—21	2.6	2.3		15—19	1.9	2.0		17—21	2.5	2.3
	22—26	2.5	2.7		20—24	1.8	1.8		22—26	2.9	2.6
	27—31	2.7	2.5		25—29	1.9	2.0		27—1	2.6	2.6
April	1—5	2.0	2.2	August	30—3	2.1	2.1	Dezember	2—6	3.2	3.1
	6—10	2.3	2.3		4—8	1.8	1.9		7—11	3.6	3.8
	11—15	2.2	2.5		9—13	2.0	2.1		12—16	2.7	3.7
	16—20	2.7	2.7		14—18	1.9	2.0		17—21	2.5	2.8
	21—25	2.6	2.7		19—23	1.9	1.9		22—26	3.3	3.4
	26—30	2.2	2.3		24—28	1.9	1.9		27—31	3.3	3.8
					29—2	1.6	1.8				

in Dresden zwischen ± 0.44° und ± 0.18°, in Stuttgart zwischen ± 0.44° und ± 0.20°. Störungen im jährlichen Gang von solchem Betrage liegen also innerhalb der Grenzen der wahrscheinlichen Fehler der Mittelwerte.

Die auffallende Tatsache, daß die Kälterückfälle des Mai, die wegen der schädlichen Wirkung, die sie oft auf die Vegetation ausüben, am populärsten geworden sind, in den 60jährigen Pentadenmitteln gar nicht zum Vorschein kommen, regt zu weiteren Untersuchungen über ihr Auftreten an. Die Zunahme im Betrage der mittleren Abweichung von der zweiten zur dritten und vierten Maipentade zeigt schon, daß die Sicherheit der Mittelwerte in diesen beiden Pentaden erheblich abnimmt, daß also eine gewisse Unruhe zu dieser Zeit vorhanden ist. Hat vielleicht ein Ausgleich entgegengesetzter Einflüsse in der kritischen Periode vom 11. bis 15. Mai stattgefunden, durch den die Wärmedepression verwischt worden ist? Um das zu klären, wurden die 60jährigen Mittelwerte in sechs 10jährige Mittelwerte zerlegt, und zwar nicht bloß für die Maipentaden, sondern auch für die hauptsächlichsten anderen Störungsepochen (Nachwinter, »Schafkälte«, »Altweibersom-

mer«). Die Zahlenergebnisse sind in Tabelle 2 zusammengestellt. Halbfette Ziffern zeigen an, daß in der Pentade ein Kälterückfall bzw. ein Wärmerückfall erkennbar ist.

Tab. 2. Fünftägige Temperaturmittel in den 6 Jahrzehnten von 1851 bis 1910.

Ort	Jahrzehnt	Nachwinter Februar			»Gestrenge Herren« Mai			»Schafkälte« Juni				»Altweibersommer« September-Oktober		
		5–9	10–14	15–19	6–10	11–15	16–20	5–9	10–14	15–19	20–24	23–27	28–2	3–7
Tilsit	1851–1860	−4.8	**−5.1**	−3.9	8.6	10.9	12.7	15.8	16.6	17.5	17.8	12.8	12.5	10.6
	1861–1870	−4.2	**−4.8**	−2.3	8.5	12.4	**12.1**	15.8	**15.6**	15.9	16.2	11.8	10.9	8.5
	1871–1880	−4.8	**−5.5**	−3.9	9.1	10.3	**9.6**	16.0	16.9	17.6	**16.0**	9.9	**10.2**	7.9
	1881–1890	−2.7	**−3.0**	−3.5	9.4	10.3	13.2	16.3	**14.4**	**14.3**	16.0	9.2	**10.0**	8.3
	1891–1900	−4.3	−3.0	**−4.6**	11.2	**10.8**	12.2	14.7	**14.6**	15.1	16.3	10.2	**11.0**	10.0
	1901–1910	−1.8	**−4.3**	−2.9	10.9	12.1	**12.1**	15.0	16.0	16.2	16.4	10.8	**11.2**	10.1
Berlin	1851–1860	1.1	**−0.8**	−0.7	10.6	11.9	14.2	17.8	17.8	**16.9**	17.0	13.5	**13.5**	12.1
	1861–1870	0.8	**0.2**	0.9	12.6	15.2	**14.9**	17.7	**16.8**	**17.0**	18.2	14.1	13.7	11.0
	1871–1880	0.8	**−1.1**	3.5	10.7	11.7	12.0	17.4	17.5	18.1	18.6	12.3	**13.3**	11.5
	1881–1890	0.2	**−0.6**	0.0	12.2	12.2	14.8	17.6	**15.5**	**15.0**	16.5	11.6	**11.7**	10.4
	1891–1900	−0.5	1.4	**1.0**	12.6	13.2	13.3	17.4	**16.4**	17.0	17.3	13.0	**13.7**	11.7
	1901–1910	1.4	**−0.3**	1.0	12.7	14.8	**13.3**	16.8	**16.7**	18.0	17.8	13.5	**13.5**	12.2
Breslau	1851–1860	−0.8	**−2.6**	−2.3	9.9	12.4	13.7	17.1	17.5	**16.7**	17.1	12.8	**14.0**	12.2
	1861–1870	−1.2	**−1.5**	0.4	12.1	15.7	**13.8**	17.5	**16.8**	**16.4**	17.4	13.8	13.2	10.0
	1871–1880	−1.3	**−3.7**	0.5	9.8	10.8	12.8	17.3	17.6	17.5	18.0	11.6	**13.0**	11.0
	1881–1890	−0.9	**−1.4**	−1.3	12.1	12.4	15.1	17.3	**15.5**	**14.6**	15.6	11.1	**11.2**	10.1
	1891–1900	−1.5	0.1	**−0.9**	11.9	12.8	13.9	17.1	**15.9**	16.6	17.5	13.2	**14.2**	12.2
	1901–1910	0.6	**−1.5**	−0.5	11.7	14.4	**14.0**	16.2	16.9	17.5	**17.1**	12.8	**13.2**	12.3
Dresden	1851–1860	1.8	**−1.1**	−0.1	10.8	12.4	14.3	17.7	18.0	**16.7**	17.3	13.4	**13.7**	12.8
	1861–1870	1.1	**0.1**	1.9	13.1	15.8	**14.7**	17.4	**16.7**	**16.5**	17.7	14.0	13.9	10.6
	1871–1880	0.0	**−2.5**	2.4	9.6	10.6	11.1	16.5	16.6	16.7	17.5	11.3	**13.1**	11.2
	1881–1890	0.0	**0.0**	0.6	11.9	**11.8**	14.5	16.9	**14.9**	**14.2**	15.8	10.9	**11.4**	10.6
	1891–1900	−0.4	1.3	**0.7**	11.4	12.2	12.9	16.8	**15.3**	16.0	16.6	12.6	**13.2**	11.6
	1901–1910	1.9	**0.2**	1.3	12.6	14.2	**13.7**	16.2	16.5	17.5	**17.4**	12.8	**13.5**	12.4
Köln	1851–1860	3.4	**1.1**	1.1	11.2	13.1	14.3	17.9	**16.9**	17.0	16.8	14.3	14.2	13.9
	1861–1870	3.8	**2.0**	4.0	14.2	15.0	15.6	17.3	**16.7**	**16.5**	18.6	14.8	**15.0**	12.7
	1871–1880	2.5	**1.6**	5.5	11.0	11.6	12.3	15.8	16.3	17.6	18.0	13.0	**13.3**	12.5
	1881–1890	2.3	2.7	3.7	13.3	**12.3**	14.2	17.4	**15.5**	**15.0**	16.9	12.8	12.5	11.7
	1891–1900	1.7	3.0	**2.4**	12.8	13.5	**12.8**	16.9	**16.0**	16.5	17.0	14.0	13.4	11.8
	1901–1910	2.8	**2.0**	3.1	11.9	13.3	**13.2**	16.2	**16.0**	16.2	17.6	13.9	**14.2**	12.8
Stuttgart	1851–1860	2.6	**1.2**	**−0.4**	11.6	13.6	14.7	18.4	18.4	17.4	**17.0**	14.0	**14.2**	13.7
	1861–1870	3.4	**1.7**	3.6	15.3	16.4	**16.1**	18.6	**17.7**	**17.0**	18.9	14.7	14.4	11.8
	1871–1880	1.4	**0.6**	4.4	10.9	12.0	13.4	17.2	**16.8**	17.4	18.5	12.6	**13.1**	11.9
	1881–1890	0.8	1.4	2.4	13.3	**12.5**	14.6	17.6	**16.0**	**15.4**	17.0	11.9	**12.0**	10.3
	1891–1900	1.0	2.4	**2.0**	11.8	13.4	13.5	17.6	**16.6**	**16.8**	17.8	14.3	14.0	12.2
	1901–1910	1.1	2.5	**0.9**	12.2	13.8	**13.7**	16.7	**16.4**	17.0	17.5	13.6	**13.7**	12.8

Während alle Teilreihen von je zehn Jahren die Störungen des Nachwinters, der »Schafkälte« und des »Altweibersommers« deutlich erkennen lassen, zeigt bei den »Gestrengen Herren« nur eine einzige Reihe einen schwachen Temperaturrückgang in der Zeit vom 11. bis 15. Mai, wogegen in der darauf folgenden Pentade (16. bis 20.) bei zwei bis drei Reihen, je nach der Station, leichte Rückgänge nachweisbar sind.

Der Glaube des Volkes an die drei »Eisheiligen« (11., 12., 13. Mai) wird also durch die Beobachtungen der 60 Jahre 1851 bis 1910 nicht bestätigt. Die Kälterückfälle des Mai sind in dieser Periode in so verschiedenen

Abschnitten dieses Monats eingetreten, daß ein Ausgleich in den Pentadenmitteln stattgefunden hat. Dieses Ergebnis lieferten auch schon die eingangs genannten Untersuchungen von mir und Kremser an der Hand der 35- bzw. 50jährigen Mittelwerte.

Bei dieser Sachlage erschien es mir wichtig und interessant, festzustellen, welche Störungen im Jahresverlauf der Temperatur sich in den Pentadenmitteln aus noch längeren Beobachtungsreihen erkennen lassen. Bei der Ähnlichkeit des Kurvenverlaufes aller Stationen brauchte diese Untersuchung nur an einer einzigen durchgeführt werden. Dazu eignete sich, auch wegen seiner ziemlich zentralen Lage, Berlin, für das ich schon früher eine Aufstellung der Temperaturmittel aller Tage in den 150 Jahren von 1766 bis 1915 hatte anfertigen lassen[1]; sie hat bereits bei meinen Arbeiten über extreme Winter und Sommer (diese Sitzungsberichte 1917 und 1918) gute Dienste geleistet. Die aus diesem Material abgeleiteten 150jährigen Pentadenmittel stehen in der vorletzten Spalte der Tabelle 3, deren letzte Spalte die mittleren Abweichungen der Mittelwerte enthält. Diese können wieder zur Berechnung des wahrscheinlichen Fehlers dienen, indem man die mittlere Abweichung mit 0.069 multipliziert. Man findet dann, daß der wahrscheinliche Fehler eines 150jährigen Pentadenmittels zwischen 0.27° (zweite Januarpentade) und 0.12° (zweite und dritte Septemberpentade) liegt.

Die nach den 150jährigen Mitteln gezeichnete Jahreskurve hat naturgemäß einen sehr viel glatteren Verlauf als die aus 60jährigen Mitteln hergestellte. Es zeigen sich nunmehr überhaupt keine wirklichen Kälte- und Wärmerückfälle mehr, sondern nur Verlangsamungen im Anstieg und Abfall. Diese befinden sich an den uns schon bekannten kritischen Stellen der Kurve: 5. bis 14. Februar, 12. bis 16. März; 11. bis 15. Mai — diese Verzögerung im Anstieg wird aber vielleicht richtiger als eine zu schnelle Zunahme der Temperatur vom 26. April bis 10. Mai aufgefaßt, denn sie steigt in den beiden Pentaden um 1.0° bzw. 1.1° —; 5. bis 24. Juni, eine lange Unterbrechung im raschen Ansteigen, durch die eine sehr charakteristische langgestreckte Depression der Kurve vor ihrem letzten Anstieg zum Gipfel zustande kommt; 27. November bis 1. Dezember, die einzige nennenswerte Störung im absteigenden Ast, denn vom »Altweibersommer« ist auch gar nichts zu merken.

Darf man nun annehmen, daß in den Mittelwerten aus noch längeren Beobachtungsreihen, sagen wir von doppelter oder dreifacher Dauer, auch diese kleinen Unregelmäßigkeiten verschwinden werden? Ich glaube es nicht. Die Kurve würde wohl noch glatter verlaufen, aber einige leichte Störungen im Auf- und Abstieg, die dem deutschen Klima eigentümlich sind und relativ oft auftreten, würden bestehen bleiben.

---

[1] Über die Ableitung der 150jährigen Tagesmittel gebe ich Auskunft in der Studie: Die wärmsten und die kältesten Tage in Berlin seit 1766 (Ber. üb. d. Tätigk. d. preuß. met. Inst. i. J. 1916, Berlin 1917, 8°). — Die 150jährige Temperaturreihe ist natürlich nicht streng homogen, aber für den vorliegenden Fall, in dem es sich um Änderungen von Pentade zu Pentade handelt, hat das keine große Bedeutung.

Tab. 3. Fünftägige Temperaturmittel von

		50 Jahre			75 Jahre		80 Jahre	70 Jahre	80 Jahre Ungerade Jahrz.	70 Jahre Gerade Jahrz.	150 Jahre	150 Jahre Mittl. Abweichung
		1766–1815	1816–1865	1866–1915	1766–1840	1841–1915	1766–1845	1846–1915			1766–1915	
Januar	1—5	−2.9	−2.0	−0.3	−2.7	−0.8	−2.6	−0.7	−2.0	−1.4	−1.7	3.8
	6—10	−3.3	−2.9	0.1	−3.4	−0.7	−3.3	−0.6	−1.8	−2.2	−2.0	3.9
	11—15	−2.6	−2.2	−0.7	−2.4	−0.3	−2.4	−1.2	−1.8	−1.9	−1.8	3.8
	16—20	−1.7	−1.6	−0.2	−1.8	−0.6	−1.7	−0.6	−1.5	−0.8	−1.2	3.8
	21—25	−1.6	−0.8	−0.1	−1.5	−0.1	−1.6	0.1	−1.4	−0.2	−0.8	3.6
	26—30	−0.5	−0.4	0.7	−0.6	0.4	−0.6	0.4	−0.2	0.0	−0.1	3.0
Februar	31—4	−0.2	−0.4	0.9	−0.3	0.5	−0.4	0.6	0.1	0.1	0.1	3.1
	5—9	−0.3	−0.4	0.8	−0.3	0.4	−0.6	0.8	0.2	−0.1	0.1	3.0
	10—14	0.2	−0.5	0.4	0.2	−0.1	0.0	0.1	0.2	−0.1	0.0	3.5
	15—19	0.1	0.2	1.6	0.0	1.3	0.1	1.4	0.8	0.6	0.7	3.1
	20—24	0.9	0.8	2.0	1.0	1.5	0.9	1.7	1.3	1.2	1.2	2.9
	25—1	1.7	1.6	2.4	1.8	2.1	1.6	2.3	2.2	1.6	1.9	2.9
März	2—6	2.0	2.1	2.4	2.1	2.2	1.9	2.5	2.3	2.0	2.2	3.0
	7—11	1.6	2.9	3.3	2.2	3.0	2.1	3.1	2.6	2.6	2.6	2.6
	12—16	2.2	3.0	3.0	2.6	2.8	2.5	3.0	2.6	2.9	2.7	2.7
	17—21	3.3	3.4	4.1	3.4	3.8	3.4	3.9	3.3	4.0	3.6	2.6
	22—26	3.6	4.1	4.7	3.8	4.4	3.8	4.5	4.3	3.9	4.1	2.7
	27—31	4.5	5.2	6.4	4.8	6.0	4.8	6.0	5.4	5.3	5.4	2.7
April	1—5	6.0	6.5	6.8	5.9	6.9	5.9	6.9	6.6	6.2	6.4	2.3
	6—10	7.3	7.6	7.6	7.3	7.6	7.3	7.7	7.6	7.3	7.5	2.4
	11—15	8.4	8.2	7.7	8.6	7.6	8.5	7.7	8.2	8.0	8.1	2.5
	16—20	8.9	8.7	9.1	9.0	8.8	9.1	8.8	8.8	9.0	8.9	2.9
	21—25	9.8	9.9	10.2	10.1	9.9	10.1	9.8	9.9	10.0	10.0	2.5
	26—30	10.7	10.4	10.7	10.9	10.3	11.0	10.1	10.6	10.6	10.6	2.8
Mai	1—5	12.1	11.6	11.0	12.4	10.8	12.4	10.6	11.5	11.6	11.6	2.7
	6—10	13.1	12.7	12.3	13.2	12.2	13.2	12.1	12.9	12.4	12.7	2.5
	11—15	13.2	12.7	13.3	13.0	13.2	12.9	13.3	13.4	12.7	13.1	2.8
	16—20	14.3	14.0	13.7	14.1	13.9	14.1	14.0	14.2	13.8	14.0	2.7
	21—25	15.3	15.4	14.5	15.2	14.9	15.3	14.8	15.5	14.6	15.1	2.6
	26—30	16.2	15.3	15.6	15.8	15.8	15.9	15.7	15.6	16.0	15.8	2.6
Juni	31—4	16.6	16.4	17.6	16.4	17.2	16.4	17.3	16.8	16.9	16.8	2.4
	5—9	17.3	17.0	17.5	17.0	17.5	17.0	17.6	17.3	17.1	17.2	2.4
	10—14	17.5	17.7	16.6	17.7	16.8	17.6	16.8	17.2	17.4	17.3	2.4
	15—19	17.6	17.3	17.1	17.6	17.0	17.5	17.1	17.5	17.1	17.3	2.3
	20—24	17.0	17.8	17.8	17.2	17.8	17.2	17.8	17.6	17.4	17.5	2.2
	25—29	18.0	17.9	18.4	18.1	18.0	18.0	18.1	18.4	17.8	18.1	2.2

Nachdem ich so erkannt hatte, daß sich die Mittelwerte aus sehr langen Reihen zum Auffinden der typischen Störungen nicht eignen, schien es angezeigt, auch die 150jährige Reihe in Teilreihen zu zerlegen, und zwar in 15 zehnjährige. Es geschah dies zunächst bei den Mai- und Junipentaden, deren Kälterückfälle das größte Interesse bieten. Da ergab sich nun, daß durch das Jahr 1845 die ganze Reihe in zwei Teile zerlegt wird, die sich ganz verschieden verhalten: in den ersten 80 Jahren von 1766 bis 1845 sind die »Eisheiligen« (11. bis 15. Mai-Pentade) ganz deutlich erkennbar; denn von den 8 Jahrzehnten zeigen sie 7, während in der zweiten Periode (1846 bis 1915) ein einziges Jahrzehnt diesen Kälterückfall ganz schwach erkennen läßt[1]. Er ist natürlich auch seit 1845 wiederholt vorgekommen,

[1] Bemerkenswert häufige Temperaturrückgänge in der Pentade 11. bis 15. Mai waren 1798 bis 1804, also 7 Jahre hintereinander, 1821 bis 1826, 6 Jahre hintereinander, und 1837 bis 1844, 8 Jahre hintereinander. Solche Folgen machen Eindruck und erwecken leicht Vorurteile bzw. den Glauben an Gesetzmäßigkeiten.

Berlin aus verschiedenen Zeiträumen.

		50 Jahre			75 Jahre		80 Jahre	70 Jahre	80 Jahre Ungerade Jahrz.	70 Jahre Gerade Jahrz.	150 Jahre	150 Jahre Mittl. Abweichung
		1766–1815	1816–1865	1866–1915	1766–1840	1841–1915	1766–1845	1846–1915			1766–1915	
Juli	30—4	18.2	17.7	18.8	18.1	18.3	18.1	18.3	18.3	18.1	18.2	2.1
	5—9	18.4	18.6	18.4	18.5	18.4	18.6	18.4	18.5	18.5	18.5	2.1
	10—14	18.7	18.4	19.1	18.7	18.8	18.6	18.9	19.1	18.4	18.8	2.2
	15—19	19.0	19.0	19.2	19.0	19.1	18.9	19.3	19.1	19.1	19.1	2.2
	20—24	19.4	**19.2**	19.2	19.3	**19.2**	19.2	**19.3**	19.3	19.1	19.2	2.1
	25—29	**20.0**	18.9	**19.3**	**19.7**	19.2	**19.5**	19.3	**19.7**	19.1	**19.4**	1.9
August	30—3	19.8	19.0	18.9	19.6	18.8	19.4	19.0	19.3	19.2	19.2	2.2
	4—8	19.7	18.9	18.8	19.4	18.8	19.3	18.8	18.8	**19.5**	19.1	2.0
	9—13	19.4	18.7	18.4	19.1	18.5	19.1	18.5	18.6	19.1	18.8	2.0
	14—18	18.7	18.5	18.2	18.5	18.4	18.5	18.4	18.2	18.7	18.4	1.9
	19—23	18.3	17.9	18.1	18.1	18.1	18.1	18.1	18.2	18.0	18.1	1.9
	24—28	17.7	17.2	17.4	17.5	17.4	17.6	17.3	17.6	17.2	17.4	1.9
	29—2	17.3	16.9	16.7	17.2	16.7	17.2	16.6	16.9	17.0	16.9	1.9
September	3—7	16.7	15.8	16.5	16.4	16.2	16.4	16.2	16.3	16.4	16.3	2.1
	8—12	15.4	15.5	15.4	15.5	15.3	15.5	15.3	15.3	15.6	15.4	1.8
	13—17	14.9	14.6	14.6	14.9	14.5	15.0	14.4	14.1	15.3	14.7	1.8
	18—22	14.3	13.7	13.4	14.2	13.5	14.2	13.4	13.5	14.3	13.8	2.0
	23—27	13.3	13.4	12.9	13.4	13.0	13.3	13.0	13.1	13.4	13.2	1.9
	28—2	11.6	12.8	13.1	12.0	13.0	12.0	13.1	12.4	12.6	12.5	1.9
Oktober	3—7	11.3	12.0	11.2	11.5	11.4	11.6	11.4	11.4	11.6	11.5	2.0
	8—12	10.1	10.9	10.6	10.5	10.6	10.5	10.6	10.5	10.6	10.6	2.0
	13—17	9.2	9.7	9.4	9.4	9.5	9.3	9.6	9.5	9.4	9.4	2.0
	18—22	8.7	8.7	8.2	8.4	8.6	8.4	8.7	8.7	8.3	8.5	2.0
	23—27	7.4	8.1	7.2	7.4	7.8	7.5	7.7	7.6	7.6	7.6	2.1
	28—1	6.4	6.9	7.0	6.4	7.1	6.5	7.1	6.8	6.8	6.8	2.0
November	2—6	5.4	6.0	6.0	5.7	5.8	5.7	6.0	5.8	5.8	5.8	2.2
	7—11	4.4	4.5	5.4	4.5	5.1	4.5	5.2	4.9	4.8	4.8	2.3
	12—16	3.8	3.1	4.4	3.6	4.0	3.7	3.9	3.7	3.9	3.8	2.2
	17—21	2.9	2.9	3.4	3.1	3.0	3.2	2.9	3.0	3.1	3.0	2.3
	22—26	2.0	2.5	2.7	2.1	2.6	2.2	2.6	2.1	2.7	2.4	2.6
	27—1	1.9	2.6	2.8	2.1	2.8	2.3	2.6	2.0	3.0	2.4	2.6
Dezember	2—6	1.5	1.5	1.9	1.8	1.5	1.8	1.5	1.7	1.5	1.6	2.7
	7—11	0.2	1.6	1.6	0.7	1.6	0.7	1.7	1.3	1.0	1.1	3.2
	12—16	0.4	0.6	1.8	0.5	1.4	0.4	1.5	1.3	0.6	1.0	2.9
	17—21	−0.1	0.1	1.3	−0.1	0.9	0.1	0.8	0.9	−0.1	0.4	3.2
	22—26	−0.5	−0.2	0.4	−0.6	0.3	−0.4	0.2	−0.1	−0.1	−0.1	3.2
	27—31	−0.9	−1.0	−0.1	−1.3	0.0	−1.1	−0.2	−0.9	−0.4	−0.7	3.4

seine Eintrittszeit ist aber unbestimmter geworden. Umgekehrt treten die Kälterückfälle des Juni in jener ersten Periode nur undeutlich, in der zweiten aber mit großer Bestimmtheit hervor. Das Auftreten der »Gestrengen Herren« (und wahrscheinlich auch der »Schafkälte«) ist also an bestimmte Zeiträume gebunden.

Dieser Befund macht es auch verständlich, warum man gegen die Mitte des vorigen Jahrhunderts in Deutschland soviel über die Kälterückfälle des Mai schrieb und das Problem so auffaßte, daß man die Frage[1] stellte, warum

[1] Zuerst scheint sich der schlesische Regierungspräsident H. E. von Lüttwitz mit der Frage beschäftigt zu haben; seine im Bull. der naturw. Sektion d. Schles. Ges. 1824 I vermerkte Mitteilung hat den Titel: Die Kälte an den Tagen des Pankratius und Servatius scheint bei uns mit NO-Wind und dem Aufgehen der Ströme in Rußland zusammenzuhängen.

Eine ähnliche Ansicht vertrat Maedler 1834 (Verhandl. des Gartenbauvereins zu Berlin) und noch eingehender in Schumachers Jahrbuch für 1843 (Über den Gang der Temperatur im Laufe des Jahres). Inzwischen hatte 1839 G. A. Erman die Hypothese aufgestellt, daß »die

sind gerade die Tage vom 11. bis 13. Mai in dieser Hinsicht ausgezeichnet? Die Temperaturrückgänge traten eben in jener Periode häufig in diesen Tagen ein und befestigten von neuem den alten Volksglauben an die »Eisheiligen«. Wir wissen jetzt, daß die Kälterückfälle im Mai an die Tage vom 11. bis 13. nicht gebunden sind und daß sie auch an anderen Tagen des Monats vorkommen. Die sich unwillkürlich aufdrängende Frage, ob es vielleicht eine gewisse Periodizität im häufigen Eintreten der kalten Tage am 11., 12. und 13. Mai gibt, läßt sich an der Hand des verfügbaren Materials noch nicht beantworten.

Da also das Jahr 1845 den ganzen 150jährigen Zeitraum in zwei Teile von ganz verschiedenem Verhalten zerlegt, habe ich für alle Pentaden Mittelwerte berechnen lassen aus den ersten 80 und aus den letzten 70 Jahren (1766 bis 1845, 1846 bis 1915), ferner aus je 75 Jahren (1766 bis 1840, 1841 bis 1915), dreimal aus je 50 Jahren (1766 bis 1815, 1816 bis 1865, 1866 bis 1915) und schließlich noch aus den nach der Ordnungsnummer ungeraden und aus den geraden Jahrzehnten (erstes: 1766 bis 1775, drittes: 1786 bis 1795 . . . ; zweites: 1776 bis 1775, viertes: 1796 bis 1805 . . .). Alle diese Mittelwerte stehen in Tabelle 3; nach ihnen wurden Kurven auf einem großen Blatt gezeichnet, die den Vergleich des Jahresverlaufes bei den verschiedenen Gruppen sehr erleichtern. Ich beschränke mich hier darauf, die Unterschiede zwischen den 80jährigen Mitteln der ersten Periode (1766 bis 1845) und den 70jährigen der zweiten Periode hervorzuheben. Es beträgt die Änderung der jeweilig kritischen Pentade gegen die vorhergehende:

	1766—1845		1846—1915	
Februar	Februar 5—9	—0.2°	Februar 10—14	—0.4°
März	Störung fehlt		März 12—16	—0.1°
April	Störung fehlt		April 11—15	0.0 (Verzögerung)
Mai	Mai 11—15	—0.3°	Störung fehlt	
Juni	Juni 20—24	—0.3°	Juni 10—14	—0.8°
Juli	Juli 10—14	0.0 (Verzögerung)	Juli 10—14	+0.5°
Sept./Oktober	Störung fehlt		Sept. 28 bis Okt. 2	+0.1°
Nov./Dezember . . .	Nov. 27 bis Dez. 1	+0.1°	Nov. 27 bis Dez. 1	0.0 (Verzögerung)
Dezember	Störung fehlt		Dez. 7—11	+0.2°

In den Mittelwerten der ersten Periode sind der »Altweibersommer« sowie die kleinen Kälterückfälle gegen die Mitte des März und April nicht

Asteroiden der Novemberperiode sich im Mai jeden Jahres zwischen der Sonne und der Erde auf dem Radius vector der letzteren befinden« und dadurch die Sonnenstrahlung auf der Erde verringern (Poggend. Annal. XLVIII). — Dove, Über die Rückfälle der Kälte im Mai (Abh. d. Berl. Akd. 1856). — Ch. Sainte-Claire Deville, De la coincidence des apparitions d'asteroïdes avec certaines variations dans la température de l'air (Compt. rend. LX, 1865; und fünf weitere Mitteilungen daselbst über die »perturbations périodiques de la température. . .«). Der Verfasser verwirft den Gebrauch von Pentaden und benutzt Tagesmittel, zu deren einigermaßen sicherer Ableitung seine Reihen aber viel zu kurz sind. — Die spätere reiche Literatur über die Kälterückfälle im Mai ist in den Lehrbüchern und in der Meteorologischen Zeitschrift leicht zugänglich.

erkennbar, in der zweiten fehlen die »Gestrengen Herren«. Dem numerischen Betrage nach ist der Rückgang der Temperatur kurz vor Mitte Juni die stärkste Störung der zweiten Periode.

Da man bisweilen die Ansicht geäußert hat, daß fünftägige Mittel zur Untersuchung der Störungen im jährlichen Gang der Temperatur nicht geeignet sind, weil innerhalb eines fünftägigen Zeitraumes Kompensationen von zu hohen und zu niedrigen Temperaturen eintreten, daß vielmehr tägliche Mittel dazu gebraucht werden müssen, gebe ich in Tabelle 4 auch die 150jährigen Tagesmittel von Berlin bekannt, zugleich mit den zugehörigen extremen Werten, in der Form eines Temperaturkalenders. Ihre Genauigkeit ist natürlich viel geringer als die der Pentaden, aber, da meines Wissens von keinem anderen Ort Tagesmittel der Temperatur aus so langen Reihen vorliegen, sollen sie für den vorliegenden Zweck doch gebraucht werden. Die nach diesen Werten gezeichnete Jahreskurve hat einen ähnlich zackigen Verlauf wie die in Hann's Lehrbuch der Meteorologie für Breslau, Paris und Wien nach 100- bis 130jährigen Reihen wiedergegebenen Kurven. Beachten wir nur die uns schon bekannten Hauptstörungen, so ist folgendes zu sagen: Vom 12. zum 13. Februar sinkt die Temperatur um 0.4°, um ebensoviel aber auch vom 27. zum 28. Im Mai zeigt sich ein kleiner Rückgang von 0.1° am 5. und ein solcher von 0.4° am 10.; diesen letzteren kann man aber auch so auffassen, daß die Temperatur vom 7. zum 9. zu rasch gestiegen ist. Der Juni zeigt vom 4. bis zum 19. ein unentschiedenes Hin- und Herschwanken der Temperatur, die sich nur um wenige Zehntel ändert und erst vom 24. ab entschieden wieder ansteigt. Darin kommt zum Ausdruck, daß auch die »Schafkälte« in ihrem Eintreten nicht an einen ganz kurzen Zeitraum gebunden ist. Im August gewahren wir einen Wärmerückfall (+0.2°) vom 19. bis 21., und der »Altweibersommer« ist nur durch eine Zunahme von 0.1° vom letzten September zum ersten Oktober zu verspüren. Das niedrigste Tagesmittel hat der 10. Januar, das höchste der 26. Juli, so daß der aufsteigende Ast der Temperaturkurve um 29 Tage (197—168) länger als der absteigende ist, eine Folge der zahlreichen Rückgänge und Verzögerungen in der Zunahme der Temperatur[1] im aufsteigenden Ast.

Einige Autoren haben die typischen Störungen im jährlichen Gange der Temperatur auf kosmische Ursachen zurückführen wollen. Einer solchen Annahme ist zwar die oben festgestellte Tatsache günstig, daß einige Störungen in ganz Deutschland gleichzeitig in derselben Pentade eintreten, ihr widerspricht aber die andere Tatsache, daß es einige Störungen gibt, die sich innerhalb des Gebietes ganz systematisch zeitlich verschieben, die also einen

[1] Bei einigen nordischen Orten ist das Gegenteil der Fall. Nach WAHLÉN (III. Suppl. Bd. zu Wilds Repert. f. Meteorologie S. XVIII) dauert in Archangelsk der Aufstieg 173, der Abstieg 192 Tage, in Baltischport 174 bzw. 191. In noch stärkerem Maße trifft dies für New York und Toronto zu, von denen weiter unten die Rede ist.

Tab. 4. Temperaturkalender von Berlin nach

Datum	Januar Mittlere	Höchste	Jahr	Niedrigste	Jahr
1	−1.6	9.0	1877	−17.9	1871
2	−1.9	9.4	1883	−15.2	1871
3	−1.7	7.4	1771	−14.1	1768 / 1818
4	−1.7	7.5	1902	−18.7	1789
5	−1.8	7.3	1873	−18.9	1809
6	−1.8	7.6	1796 / 1882	−19.4	1809
7	−2.1	8.0	1873	−17.4	1789
8	−1.8	7.9	1877	−19.1	1789
9	−2.1	11.3	1877	−16.9	1820
10	−2.3	7.9	1910	−21.7	1820
11	−1.9	7.6	1783	−19.8	1820
12	−1.8	6.8	1873	−13.7	1826
13	−1.9	8.9	1796	−13.9	1789
14	−1.8	10.6	1796	−15.2	1802
15	−1.8	9.6	1796	−20.9	1820
16	−1.3	9.7	1852	−15.4	1838
17	−1.2	10.4	1796	−20.2	1838
18	−1.2	8.2	1868	−18.5	1893
19	−1.1	9.1	1796	−17.1	1893
20	−0.9	10.0	1875	−19.4	1776
21	−1.0	9.0	1899	−18.5	1829
22	−1.3	8.9	1804	−19.8	1823
23	−1.0	8.8	1846	−19.2	1795
24	−0.6	11.1	1834	−18.1	1795
25	−0.2	9.4	1840	−17.4	1823
26	−0.4	8.3	1796	−17.4	1803
27	−0.2	10.2	1796	−20.8	1776
28	−0.1	7.6	1796	−16.2	1830
29	0.1	9.7	1786	−20.4	1830
30	0.1	9.5	1884	−20.1	1830
31	0.1	8.3	1863 / 1884	−18.0	1830

Datum	Februar Mittlere	Höchste	Jahr	Niedrigste	Jahr
1	−0.1	9.6	1869	−16.1	1776
2	0.0	10.2	1866	−14.3	1855
3	0.1	8.2	1822	−19.1	1830
4	0.3	8.0	1835 / 1913	−16.4	1830
5	0.2	9.2	1869	−18.6	1830
6	0.2	7.7	1779 / 1866	−15.9	1870
7	0.1	9.9	1894	−19.4	1799
8	0.0	10.1	1869	−18.5	1799
9	−0.1	10.7	1869	−18.1	1799
10	0.0	10.4	1899	−19.0	1855
11	0.2	11.5	1833	−15.2	1871
12	0.2	10.2	1768	−14.5	1829
13	−0.2	9.8	1768	−12.9	1865
14	0.0	9.2	1899	−12.3	1865
15	0.5	9.3	1767	−12.6	1782
16	0.7	8.6	1914	−13.8	1782
17	0.8	11.3	1885	−13.5	1792
18	0.6	9.6	1767	−15.1	1827
19	0.7	8.2	1767	−15.6	1827
20	0.8	8.4	1837 / 1850 / 1880	−12.3	1855
21	1.1	8.7	1903	−12.4	1810
22	1.3	10.0	1861 / 1876	−11.5	1814
23	1.5	10.3	1903	−17.2	1814
24	1.6	10.2	1794	−13.3	1814
25	1.8	10.0	1846	−10.0	1814
26	2.0	11.3	1882	− 9 8	1814
27	2.1	10.3	1882	− 9.8	1785
28	1.7	10.8	1903	−18.3	1785
29	(0.3)	11.4	1772	− 7.4	1808

Datum	März Mittlere	Höchste	Jahr	Niedrigste	Jahr
1	1.8	10.7	1878	−11.4	1886
2	1.9	11.0	1878	−12.5	1845
3	2.1	9.8	1801 / 1846	− 8.0	1858
4	2.2	9.8	1846	− 8.2	1845
5	2.3	10.6	1834	−12.0	1821
6	2.3	11.8	1906	−10.0	1821
7	2.6	12.8	1906	− 9.3	1800
8	2.8	12.3	1774	− 8.7	1800
9	2.5	10.3	1872	− 9.1	1800
10	2.5	11.5	1854	− 8.3	1800
11	2.4	9.4	1882	− 7.6	1789
12	2.6	11.7	1884	− 8.9	1789
13	2.6	11.6	1859	−11.9	1845
14	2.6	9.7	1871 / 1893	−12.6	1845
15	2.9	10.6	1822 / 1893	−11.0	1845
16	3.1	11.5	1791 / 1822	−14.4	1845
17	3.6	11.5	1890	− 6.5	1853
18	3.7	12.2	1884	− 5.6	1888
19	3.5	13.6	1890	− 6.3	1865
20	3.5	11.5	1890	− 6.8	1804
21	3.8	12.8	1836	− 7.8	1804
22	3.8	13.5	1836	− 9.4	1804
23	3.9	14.2	1896	− 8.3	1804
24	4.3	14.9	1896	− 6.0	1782
25	4.4	15.3	1896	− 7.2	1785
26	4.3	15.1	1903	− 5.3	1785
27	4.7	15.0	1903	− 6.8	1853
28	5.0	14.3	1862	− 6.8	1853
29	5.5	16.8	1890	− 5.6	1799
30	5.8	16.2	1872	− 6.8	1799
31	5.8	15.4	1913	− 6.3	1799

regionalen Charakter haben. Weiteres Beweismaterial für die Unrichtigkeit jener Hypothese kann das Verhalten des Temperaturverlaufes an Stationen liefern, die von Deutschland weit entfernt liegen. Es lassen sich leider nur wenige dazu heranziehen, weil man früher in den meisten fremden Beobachtungsnetzen Pentadenmittel nicht veröffentlicht hat. Ich habe aber für zwei spanische Stationen, Madrid und San Fernando bei Cádiz, sowie für zwei nordamerikanische, New York und Toronto, genügend lange Reihen von fünftägigen Temperaturmitteln ausfindig gemacht bzw. berechnen lassen, aus denen Durchschnittswerte gebildet werden konnten. Diese stehen in Tabelle 5, und zwar für Madrid und New York aus der (für mich) längstmöglichen Reihe von Jahrgängen (53 bzw. 41 Jahre) abgeleitet, und außerdem solche aus streng gleichzeitigen Reihen für die beiden Stationspaare Madrid, San Fernando (43 Jahre) und New York, Toronto (30 Jahre aus der Periode 1875 bis 1910). Zeichnet man nach diesen Mittelwerten Kurven des jährlichen Ganges,

150jährigen Beobachtungen von 1766 bis 1915.

Datum	April Mittlere	Höchste	Jahr	Niedrigste	Jahr
1	6.1	15.0	1848	−4.8	1799
2	6.1	15.0	1815	−4.4	1808
3	6.5	17.4	1815	−2.6	1799
4	6.7	15.8	1778	−2.6	1799
5	6.7	14.4	1892	−3.0	1809
6	7.1	15.1	1892	−1.7	1809
7	7.3	15.5	1778	−4.2	1771
8	7.5	16.8	1803	−1.8	1812
9	7.7	18.0	1800	−2.6	1812
10	7.7	16.6	1831	−2.7	1812, 1837
11	7.9	16.7	1781	−0.6	1913
12	7.9	17.0	1906	−0.2	1809
13	7.9	18.4	1906	0.7	1775
14	8.4	19.1	1820	0.2	1853
15	8.5	19.1	1779, 1820	0.5	1853
16	8.5	18.9	1822	−1.6	1852
17	8.8	18.9	1800	0.2	1852
18	8.9	17.7	1880	−0.9	1852
19	9.1	18.8	1911	0.0	1777
20	9.4	18.9	1814	−0.7	1807
21	9.7	17.8	1800	0.6	1807
22	9.7	23.2	1800	1.7	1877
23	9.9	19.4	1822	2.2	1861
24	10.2	19.4	1821	2.9	1854, 1857
25	10.3	20.4	1821	1.5	1817
26	10.2	20.4	1821	0.7	1817
27	10.4	21.5	1800	2.4	1817
28	10.7	21.8	1913	1.5	1814
29	10.8	21.8	1913	2.5	1782
30	10.9	21.8	1913	2.7	1782, 1886

Datum	Mai Mittlere	Höchste	Jahr	Niedrigste	Jahr
1	11.0	23.9	1795	3.7	1909
2	11.4	21.7	1824	3.3	1861
3	11.7	21.7	1800	3.7	1864
4	11.9	22.2	1903	2.0	1864
5	11.8	22.8	1789	3.7	1864
6	12.2	22.8	1825	3.5	1892
7	12.5	21.7	1825	3.8	1773
8	12.9	21.0	1900	5.2	1864
9	13.1	21.6	1834	5.0	1836
10	12.7	21.8	1779	4.8	1814, 1836
11	12.8	23.8	1779	4.8	1814
12	13.1	23.4	1907	5.6	1792
13	13.1	24.6	1907	5.2	1795
14	13.1	21.7	1911	3.9	1795
15	13.3	22.0	1907	5.6	1867
16	13.6	22.0	1798	5.0	1802
17	14.0	23.3	1798	4.3	1816
18	14.1	23.8	1833, 1888	4.8	1871
19	14.1	24.9	1888	5.6	1876
20	14.4	25.2	1797	6.5	1877
21	14.6	24.2	1886	5.8	1840
22	14.8	25.2	1773	6.4	1867
23	15.0	26.9	1773	3.5	1867
24	15.4	26.2	1773	2.9	1867
25	15.5	25.7	1773	4.9	1867
26	15.4	24.6	1790	5.8	1836
27	15.7	25.8	1892	6.8	1795
28	15.7	26.8	1892	8.3	1795
29	16.1	22.6	1789	8.9	1795, 1818
30	16.1	23.5	1827, 1902	8.4	1864
31	16.1	25.8	1827	8.5	1805

Datum	Juni Mittlere	Höchste	Jahr	Niedrigste	Jahr
1	16.5	25.6	1908	8.7	1829
2	16.9	26.3	1889	7.8	1810
3	17.3	26.2	1889	7.8	1810
4	17.4	25.6	1905	7.8	1805
5	17.2	25.8	1910	7.4	1805
6	17.4	24.8	1910	8.7	1825
7	17.2	25.2	1795	10.0	1825
8	17.2	26.1	1766	9.4	1881
9	17.3	26.2	1915	10.0	1854
10	17.2	27.7	1915	9.6	1881
11	17.4	26.1	1795	6.8	1881
12	17.4	26.7	1779	8.6	1881
13	17.2	24.4	1787	9.1	1799
14	17.2	25.7	1787	8.3	1799
15	17.3	25.2	1787	8.7	1799, 1800
16	17.5	24.6	1774	8.9	1800
17	17.3	25.4	1896	9.6	1800
18	17.1	25.2	1774	9.1	1793
19	17.3	25.8	1908	9.1	1793
20	17.5	26.7	1788	9.3	1821
21	17.4	25.9	1788	8.9	1806
22	17.6	25.1	1861	10.0	1803
23	17.6	26.3	1790	7.8	1806
24	17.5	25.7	1829	9.1	1806
25	17.7	26.4	1829	9.8	1802
26	17.8	25.3	1833	11.3	1809
27	18.1	25.8	1833	11.8	1840
28	18.3	26.8	1829	11.6	1865
29	18.4	25.7	1826	11.5	1797
30	18.3	28.0	1833	11.5	1799

am besten auf einem Blatt und in demselben großen Maßstabe wie bei den deutschen Stationen, so kann man den Vergleich gut durchführen. Man erkennt sofort, daß es bei den spanischen und amerikanischen Stationen weniger Störungen gibt als bei den deutschen, und daß einige charakteristische vorhanden sind, die ein anderes Gepräge haben als die mitteleuropäischen.

Madrid zeigt im aufsteigenden Ast der Kurve im März, April und Mai einige schwache Verzögerungen im Aufstieg, die in San Fernando kaum noch angedeutet sind. Hier erfolgt die Zunahme der Temperatur so langsam und gleichmäßig, daß ein eigentlicher Frühling gar nicht zustande kommt, sondern der Winter fast unvermittelt zum Sommer übergeht, eine Eigentümlichkeit des ganzen südlichen Teiles der gemäßigten Zone. Der Scheitel der Madrider Kurve hat infolge eines Temperaturrückganges (—0.3°) in der Pentade vom 25. bis 29. Juli zwei gleich hohe Gipfel in den Pentaden 20. bis 24. Juli und 4. bis 8. August; in San Fernando verzögert sich infolge zweier kleiner

Datum	Juli				
	Mittlere	Höchste	Jahr	Niedrigste	Jahr
1	18.0	28.5	1905	9.4	1789
2	18.2	27.8	1826	9.8	1789
3	18.2	28.9	1781	10.4	1806
4	18.2	27.8	1781	10.5	1837
5	18.1	27.0	1828	10.4	{1812, 1813
6	18.4	28.5	1819	11.7	1860
7	18.4	28.9	1819	12.0	{1820, 1864
8	18.8	28.5	1845	13.0	1780
9	18.8	28.3	1826	11.5	1815
10	18.7	26.9	1826	12.4	{1815, 1850
11	18.6	25.6	1834	12.3	1785
12	18.8	27.6	1792	10.6	1888
13	18.7	27.6	1832	11.3	1812
14	19.0	27.3	1832	11.1	1802
15	19.2	26 7	1797	11.7	1802
16	19.1	28.4	1904	10.9	1802
17	18.9	28.5	1793	10.7	1802
18	18 9	27.3	1778	10.9	1809
19	19 3	27.3	1778	12.0	1809
20	19.2	29.5	1865	11.5	1832
21	19.1	29.0	1865	11.3	1800
22	19.3	26.2	{1865, 1914	12.3	1913
23	19.4	26.9	1868	12.6	1825
24	19.2	27.9	1894	12.0	1783
25	19.6	27.4	1854	10.4	1832
26	19.7	28.5	1782	13.2	1838
27	19.4	27.4	1834	13.8	1832
28	19.2	27.5	1834	13.3	1832
29	19.2	26.7	1814	14.0	1867
30	19.3	26.4	1834	12.4	1841
31	19.4	27.8	1887	11.7	1799

Datum	August				
	Mittlere	Höchste	Jahr	Niedrigste	Jahr
1	19.2	28.5	1803	12.5	{1836, 1907
2	19.1	28.5	1803	13.3	1907
3	19.2	28.3	{1803, 1826	12.9	1828
4	19.3	27.6	1826	12.6	1833
5	19.0	27.1	1857	12.0	1833
6	19.3	26.9	1779	11.6	1833
7	19.0	26.8	1779	12.2	1833
8	18.8	27.6	1807	11.4	1833
9	18.9	26.7	1802	12.2	1835
10	18.9	29.6	1802	12.9	1869
11	18.7	27.0	1802	12.3	1864
12	18.7	26.3	1781	11.8	1908
13	18.9	27.4	1781	11.9	1902
14	18.8	27.2	1798	12.8	1908
15	18.9	27.4	1800	12.4	1845
16	18.5	28.2	1868	12.3	1845
17	18.2	27.7	1898	12.5	1885
18	17.9	26.3	1868	11.2	1885
19	18.1	26.5	1892	12.0	1885
20	18.2	25.2	1892	12.6	1830
21	18.3	25.0	1876	11.0	1907
22	18.0	26.5	1802	11.8	1816
23	17.9	27.4	1802	10.7	1813
24	17.7	28.3	1802	12.7	{1874, 1912
25	17.6	27.2	1802	11.5	1848
26	17.4	26.8	1823	11.7	1864
27	17.3	27.4	1823	10.2	1864
28	17.1	24.8	1807	11.6	{1837, 1901
29	17.0	24.3	1807	10.4	1827
30	17.2	26.3	1797	12.2	1836
31	17.1	24.0	1826	11.7	1798

Datum	September				
	Mittlere	Höchste	Jahr	Niedrigste	Jahr
1	16.7	25.2	1797	10.9	1890
2	16.7	26.0	1781	10.0	1893
3	16.4	25.0	1781	10.0	1814
4	16.4	24.6	1824	9.6	1814
5	16.3	24.6	1872	9.4	1845
6	16.4	25.3	1872	10.0	{1814, 1815
7	16.1	23.3	1775	8.9	1850
8	15.8	23.1	1775	8.2	1814
9	15.7	22.8	1795	9.7	1912
10	15.6	23.0	1795	10.2	{1787, 1794
11	15.2	21.5	{1795, 1827, 1886	8.2	1814
12	14.9	22.1	1839	9.4	1814
13	14.8	22.9	1886	8.8	1902
14	14.8	22.9	1886	8.9	1803
15	14.7	22.4	1823	7.8	1889
16	14.5	21.1	1796	8.5	1889
17	14.6	21.5	{1854, 1885	8.9	1792
18	14.5	23.5	1796	8.2	1774
19	14.0	23.2	1796	8.5	1776
20	13.8	22.6	1796	7.5	1776
21	13.5	23.7	1796	5.0	1793
22	13.3	21.6	1835	7.0	1793
23	13.2	21.2	1874	7.5	1881
24	13.2	20.4	{1835, 1901	6.2	1834
25	13.3	19.8	{1797, 1866	5.2	1774
26	13.1	22.2	1797	6.0	1774
27	13.1	20.9	1866	5.2	1774
28	12.9	20.1	1866	4.8	1774
29	12.7	20.7	1874	6.9	1785
30	12.4	20.5	1874	5.1	1842

Temperaturrückgänge in den Pentaden 10. bis 14. Juli und 30. Juli bis 3. August (—0.2° bzw. —0.3°) der Eintritt der höchsten Temperatur bis zur Pentade 14. bis 18. August, was bei einer maritimen Einflüssen ausgesetzten Station ganz natürlich erscheint. Der Abfall der Temperatur erfolgt an beiden Orten sehr gleichmäßig, wird aber gegen Ende August (29. August bis 2. September) von einem gar nicht unbedeutenden Wärmerückfall unterbrochen (Madrid +0.5°, San Fernando +0.2°), ein sehr viel schwächerer findet in der Pentade vom 12. bis 16. Dezember statt (Madrid +0.2°, in San Fernando nur Verzögerung). Das Minimum der Temperatur fällt in Madrid bereits auf die letzte Pentade des Jahres, 27. bis 31. Dezember. In San Fernando ändert sich die Temperatur in den Pentaden des Januar so wenig, daß der Zeitpunkt des Minimums etwas unbestimmt wird, etwa Januar 11. bis 15. Der aufsteigende Ast der Kurve ist also in beiden Orten erheblich länger als der absteigende: Madrid 41 gegen 32, San Fernando 43 gegen 30 Pentaden.

Datum	Oktober					November					Dezember				
	Mittlere	Höchste	Jahr	Niedrigste	Jahr	Mittlere	Höchste	Jahr	Niedrigste	Jahr	Mittlere	Höchste	Jahr	Niedrigste	Jahr
1	12.5	20.3	1874	5.4	1842	6.5	12.9	1867	− 2.2	1805	2.1	11.8	1823	− 9.5	1875
2	12.1	19.6	1819	4.7	1769, 1902	6.0	12.0	1830	− 2.4	1805	1.9	10.2	1817	− 9.3	1879
3	11.7	19.6	1819	3.0	1769	6.1	13.0	1821	− 2.3	1858	1.5	11.4	1779	−11.3	1855
4	11.6	18.8	1908	3.4	1912	5.8	14.7	1899	− 2.8	1804	1.4	9.6	1847	−12.1	1829
5	11.5	17.2	1839	3.4	1769	5.7	13.8	1899	− 4.3	1804	1.7	10.6	1833	−12.5	1829
6	11.3	17.5	1783	3.0	1769	5.3	14.8	1834	− 6.1	1791	1.6	10.9	1868	−12.1	1829
7	11.3	17.9	1783	3.9	1784, 1912	5.1	15.0	1834	− 5.4	1842	1.4	10.8	1868	−15.7	1788
8	11.3	17.8	1834	3.9	1809	5.2	12.4	1899	− 5.8	1842	1.4	11.7	1848	−14.3	1815
9	11.0	20.0	1802	3.9	1809	4.9	11.9	1838	− 5.7	1791	1.0	11.9	1831	−15.0	1879
10	10.4	17.3	1834	3.2	1814	4.5	13.0	1767	− 4.2	1842	0.9	10.8	1831	−12.2	1815
11	10.1	17.6	1787, 1876	2.8	1805, 1809	4.3	11.0	1881	− 4.6	1876	1.0	9.7	1915	−12.8	1835
12	10.0	19.0	1876	2.2	1810	3.9	11.7	1784	− 5.8	1774	1.0	10.3	1898	−13.3	1849
13	9.8	18.5	1876	2.2	1805, 1809	3.9	11.8	1767	− 6.0	1774	1.1	9.8	1814	−15.9	1812
14	9.5	18.4	1876	2.4	1805	3.9	12.2	1880	− 8.1	1786	0.9	9.1	1806, 1884	−16.8	1788
15	9.4	17.0	1792	2.0	1882	3.7	11.1	1821	− 7.4	1835	0.8	8.4	1912	−20.6	1788
16	9.3	15.9	1876	2.1	1778, 1882	3.5	12.0	1821	− 7.2	1835	0.9	10.0	1814	−21.9	1788
17	9.2	15.9	1876	1.5	1778	3.5	12.2	1821	− 5.4	1820	0.9	9.6	1806	−18.3	1788
18	8.9	16.1	1874	1.3	1778	3.3	11.7	1783	− 6.5	1902	0.6	10.0	1814	−15.6	1788
19	8.6	16.3	1780	1.2	1832	2.9	9.0	1845	− 6.8	1902	0.3	7.8	1795, 1869	−17.2	1812
20	8.6	16.5	1795	−0.9	1908	3.0	10.6	1822	− 5.5	1770	0.1	10.4	1795	−14.6	1812
21	8.3	17.2	1795	0.4	1908	2.6	9.7	1872	− 5.9	1816	0.3	10.2	1828	−15.2	1855
22	8.1	15.4	1795	0.4	1777	2.4	9.4	1881	− 7.6	1816	0.0	10.9	1795	−12.3	1829
23	7.8	14.3	1873	−0.2	1777, 1908	2.6	11.3	1881	− 8.8	1774	0.0	10.9	1789	−18.3	1829
24	7.8	14.3	1773	−0.4	1769	2.5	11.7	1778	− 6.5	1774	−0.1	10.6	1839	−16.5	1798
25	7.7	16.5	1795	0.7	1866	2.3	10.4	1888	− 7.0	1774	−0.2	8.1	1857	−20.4	1798
26	7.4	15.2	1767	0.8	1887	2.1	9.6	1839	−12.1	1890	−0.4	7.6	1768	−18.0	1829
27	7.2	14.6	1767	− 1.1	1805	2.5	11.4	1872	−11.6	1890	−0.6	8.5	1852	−19.1	1788
28	7.2	14.6	1888	−2.0	1915	2.5	10.7	1878	− 9.6	1890	−0.4	9.2	1852	−20.6	1788
29	6.7	14.0	1912	−2.3	1915	2.6	10.8	1836	− 6.1	1849	−0.6	9.6	1882	−20.1	1799
30	6.8	14.2	1855	−1.5	1805	2.5	9.8	1823	− 7.2	1875	−0.6	9.6	1789	−16.7	1804
31	6.6	13.3	1766	−2.2	1805						−1.2	10.5	1901	−19.1	1804

Gerade umgekehrt verhält es sich bei den amerikanischen Stationen: die Temperatur steigt bei ihnen in 31 Pentaden vom Minimum zum Maximum auf und braucht 42 zum Abstieg. Die tiefste Temperatur fällt nämlich erst auf die Pentade Januar 31 bis Februar 4 und die höchste schon auf die Pentade vom 5. bis 9. Juli. Im aufsteigenden Ast der Kurve weist Toronto drei Rückfälle auf, die sich in New York nur durch Verlangsamung der Temperaturzunahme bemerkbar machen, nämlich vom 12. bis 16. März (—0.4°), 11. bis 15. Mai (—0.2°), 26. bis 30. Mai (—0.1°). Vom Scheitelpunkt der Kurve (5. bis 9. Juli) bis zur ersten Pentade des September (3. bis 7.) gibt es an beiden Orten noch drei Wärmerückfälle von 0.1° bis 0.5°, die den Kurven eine sehr charakteristische Gestalt geben. Dieses Stück der Kurve nach dem Eintritt des Maximums ist beinahe das Spiegelbild des bei den deutschen Stationen vor dem Eintritt der größten Wärme liegenden Kurventeiles. Dann sinkt die Temperatur sehr gleichmäßig bis Anfang Dezember, wo in der

Tab. 5. Fünftägige Temperaturmittel.

		Madrid (53 J.)	Madrid (43 J.)	San Fernando (43 J.)	New York (41 J.)	New York (30 J.)	Toronto (30 J.)	Batavia (45 J.)
		1860–1912	1870–1912		1870–1910	[1875–1910]		1866–1910
Januar	1—5	3.8	3.9	11.2	−0.4	−0.9	−4.6	25.6
	6—10	4.1	4.1	11.1	−0.7	−0.3	−5.1	25.4
	11—15	4.4	4.3	11.1	−0.6	−0.9	−5.6	25.6
	16—20	4.2	4.1	11.1	−0.7	−0.6	−5.3	25.3
	21—25	4.9	4.5	11.1	−0.3	−0.6	−5.6	25.5
	26—30	5.0	4.5	11.2	−1.5	−1.6	−6.1	25.6
Februar	31—4	5.2	4.9	11.5	−2.2	−2.3	−7.4	25.6
	5—9	5.7	5.6	11.9	−1.8	−1.8	−7.2	25.5
	10—14	6.0	6.1	12.1	−0.4	−0.2	−6.3	25.3
	15—19	6.6	6.6	12.5	−0.3	−0.7	−6.0	25.5
	20—24	6.5	6.6	12.6	−0.1	0.1	−5.1	25.5
	25—1	7.3	7.2	12.9	0.6	0.5	−4.4	25.6
März	2—6	7.7	7.5	13.1	1.1	1.3	−3.8	25.6
	7—11	8.3	8.4	13.5	2.7	2.4	−2.3	25.8
	12—16	8.1	8.2	13.5	2.4	2.6	−2.7	26.0
	17—21	8.7	8.6	13.7	2.9	2.6	−2.0	26.0
	22—26	9.1	9.0	14.0	4.2	4.3	0.1	26.0
	27—31	9.6	9.6	14.5	5.6	5.9	1.2	26.2
April	1—5	10.4	10.3	14.9	6.3	6.1	1.4	26.2
	6—10	11.2	10.6	15.0	7.6	7.4	3.4	26.3
	11—15	11.4	11.1	15.4	9.0	9.0	5.0	26.3
	16—20	11.6	11.2	15.4	9.7	10.0	5.9	26.4
	21—25	13.2	12.7	16.0	11.6	12.0	7.7	26.5
	26—30	13.3	12.9	16.6	12.4	12.6	8.4	26.4
Mai	1—5	14.1	13.7	17.0	13.1	13.1	8.8	26.4
	6—10	14.1	13.9	17.4	14.8	15.1	11.1	26.5
	11—15	15.2	15.2	17.8	15.6	16.0	10.9	26.5
	16—20	16.2	15.7	18.2	16.4	16.8	12.7	26.5
	21—25	16.4	15.9	18.7	17.4	17.7	13.8	26.5
	26—30	17.2	17.0	19.1	18.0	18.3	13.7	26.4
Juni	31—4	17.8	17.6	19.4	19.3	19.6	15.0	26.3
	5—9	18.8	18.3	20.1	20.1	20.3	16.1	26.2
	10—14	19.3	18.9	20.6	20.4	20.3	16.9	26.1
	15—19	20.6	20.4	21.5	21.4	21.3	18.2	26.1
	20—24	22.0	21.9	22.0	22.5	22.4	18.7	26.0
	25—29	22.9	22.8	22.4	23.2	23.2	19.3	25.9

		Madrid (53 J.)	Madrid (43 J.)	San Fernando (43 J.)	New York (41 J.)	New York (30 J.)	Toronto (30 J.)	Batavia (45 J.)
		1860–1912	1870–1912		1870–1910	[1875–1910]		1866–1910
Juli	30—4	23.2	23.1	22.4	23.8	23.8	20.2	25.8
	5—9	24.3	24.0	23.6	24.1	24.4	20.8	25.7
	10—14	24.5	24.2	23.4	24.1	24.1	20.3	25.8
	15—19	24.9	24.8	23.7	24.4	24.3	20.4	25.8
	20—24	25.1	25.0	23.9	23.8	23.9	20.1	25.8
	25—29	25.0	24.7	24.3	24.1	23.9	20.6	25.9
August	30—3	25.0	24.8	24.0	23.7	23.7	20.3	25.9
	4—8	25.3	25.0	24.3	23.9	24.0	20.1	25.9
	9—13	25.1	25.0	24.6	23.9	23.7	19.8	26.0
	14—18	24.6	24.7	24.8	22.8	22.7	19.0	26.1
	19—23	23.6	23.5	24.2	22.9	22.8	19.1	26.1
	24—28	22.6	22.2	23.8	21.9	21.7	18.4	26.2
	29—2	22.7	22.7	24.0	21.7	21.8	18.4	26.2
September	3—7	21.3	21.2	23.2	21.4	21.6	17.6	26.4
	8—12	20.4	20.0	22.7	20.3	20.6	16.5	26.4
	13—17	19.1	19.0	22.2	19.6	19.7	15.9	26.4
	18—22	18.4	18.3	21.7	18.4	18.5	14.4	26.5
	23—27	17.2	17.2	21.3	17.8	17.6	13.5	26.4
	28—2	16.2	16.3	20.7	16.6	16.8	12.4	26.5
Oktober	3—7	15.4	15.2	20.1	15.3	15.6	10.7	26.6
	8—12	14.4	14.2	19.5	14.1	14.1	10.1	26.4
	13—17	13.0	12.6	18.4	13.4	13.4	9.3	26.5
	18—22	12.4	12.2	18.2	12.5	12.5	7.7	26.5
	23—27	11.5	11.2	17.3	11.5	11.3	6.7	26.5
	28—1	10.6	10.5	16.7	10.1	10.3	5.7	26.5
November	2—6	10.1	10.0	16.2	9.1	9.6	5.1	26.3
	7—11	9.0	8.9	15.5	8.6	9.1	4.4	26.4
	12—16	8.7	8.7	15.0	7.1	7.6	3.0	26.3
	17—21	8.0	7.9	14.3	5.7	6.1	1.9	26.2
	22—26	6.8	6.7	13.9	5.3	5.6	1.1	26.1
	27—1	6.0	5.7	13.4	2.8	3.2	−0.9	26.0
Dezember	2—6	5.3	5.0	12.5	2.3	2.0	−2.8	26.0
	7—11	4.9	4.5	11.9	2.3	1.9	−1.9	25.8
	12—16	4.9	4.7	11.9	1.7	1.3	−3.2	25.8
	17—21	4.7	4.7	11.7	0.3	0.4	−3.4	25.6
	22—26	4.4	4.6	11.7	0.6	1.1	−3.1	25.6
	27—31	3.7	3.6	11.3	−0.1	0.6	−3.3	25.5

Pentade Dezember 7 bis 11 Toronto eine bedeutende Temperaturerhöhung (+0.7°) erfährt, während in New York der Temperaturabfall nur etwas verlangsamt wird. Von da bis zum Eintritt der niedrigsten Temperatur zählt man noch zwei kleine Temperaturanstiege.

Diesen Feststellungen liegen die gleichzeitigen 30jährigen Beobachtungen zugrunde, die längere 41jährige Reihe von New York ändert aber nichts wesentlich an ihnen. Die Störungen im jährlichen Gange der Temperatur in Spanien und im östlichen Nordamerika sind demnach verschieden von den in Deutschland vorkommenden; denn daß Toronto auch in der Pentade vom 11. bis 15. Mai einen kleinen Kälterückfall hat, kann etwas Zufälliges sein.

Schließlich habe ich noch untersucht, ob in der Tropenzone, in der die meteorologischen Erscheinungen sehr viel regelmäßiger als bei uns verlaufen, auch Störungen im jährlichen Temperaturgang vorhanden sind. Die einzige Station, von der ich fünftägige Mittel vorfand, war Batavia, von der 45jährige Mittelwerte in der letzten Spalte der Tabelle 5 mitgeteilt werden. Die Temperatur erreicht hier zwei nahezu gleich hohe Maxima im Mai und Oktober und zwei Minima im Januar (Hauptminimum) und Juli, schwankt aber nur um 1.3°. Gleichwohl gibt es auch in Batavia einige kleine Störungen in der Zu- und Abnahme der Temperatur im Betrage von ±0.1° bis ±0.3°, vor allem während der Regenzeit von Mitte Oktober bis Ende Februar, was leicht verständlich ist, sowie jedesmal vor Eintritt der höchsten Temperatur, nämlich April 26 bis 30 und September 23 bis 27 (je —0.1°). Diese Störung bedarf noch einer besonderen Untersuchung.

Damit ist der Beweis dafür erbracht, daß die Störungen im jährlichen Temperaturgang regional verschieden sind. Jedes Land hat seine eigenen Anomalien. Das Problem gehört also mehr in das Gebiet der Klimatologie als der Meteorologie. Gegenüber den von Dr. van Rijckevorsel vertretenen Anschauungen (Konstant auftretende sekundäre Maxima und Minima in dem jährlichen Verlauf der meteorologischen Erscheinungen. Rotterdam 1905 ff.) möchte ich dieses Ergebnis besonders betonen.

Ausgegeben am 15. Februar.

SITZUNGSBERICHTE
DER PREUSSISCHEN
AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.
1923

III. Sitzung der physikalisch-mathematischen Klasse. 1. Februar.

Vorsitzender Sekretar: Hr. Rubner.

1. Hr. Fick sprach über die Atemwirkung der Zwischenrippenmuskeln. (Ersch. später.)

Die neuerdings von Chr. van Gelderen dagegen vorgebrachten Einwände werden widerlegt. Er ist der Meinung, daß durch seine früher beschriebenen Versuche an Hunden, bei denen der Brustkorb nur noch der Wirkung der Zwischenrippenmuskeln überlassen war, jeder Zweifel an der Lehre Hambergers verstummen müßte.

2. Hr. Zimmermann überreichte sein Werk: »Rechentafel nebst Sammlung häufig gebrauchter Zahlenwerte«, 9. Aufl. (Ausgabe A und B) (Berlin 1922).

Ausgegeben am 15. Februar.

Berlin, gedruckt in der Reichsdruckerei.

1923 IV. V. VI. VII

SITZUNGSBERICHTE

DER PREUSSISCHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

Physikalisch-mathematische Klasse

BERLIN 1923

VERLAG DER AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

IN KOMMISSION BEI WALTER DE GRUYTER U. CO.

Aus dem Reglement für die Redaktion der akademischen Druckschriften

Aus § 1.

Die Akademie gibt gemäß § 41, 1 der Statuten zwei fortlaufende Veröffentlichungen heraus: »Sitzungsberichte der Preußischen Akademie der Wissenschaften« und »Abhandlungen der Preußischen Akademie der Wissenschaften«.

Aus § 2.

Jede zur Aufnahme in die Sitzungsberichte oder die Abhandlungen bestimmte Mitteilung muß in einer akademischen Sitzung vorgelegt werden, wobei in der Regel das druckfertige Manuskript zugleich einzuliefern ist. Nichtmitglieder haben hierzu die Vermittelung eines ihrem Fache angehörenden ordentlichen Mitgliedes zu benutzen.

§ 3.

Der Umfang einer aufzunehmenden Mitteilung soll in der Regel in den Sitzungsberichten bei Mitgliedern 32, bei Nichtmitgliedern 8 Seiten in der gewöhnlichen Schrift der Sitzungsberichte, in den Abhandlungen 12 Druckbogen von je 8 Seiten in der gewöhnlichen Schrift der Abhandlungen nicht übersteigen.

Überschreitung dieser Grenzen ist nur mit Zustimmung der Gesamtakademie oder der betreffenden Klasse statthaft und ist bei Vorlage der Mitteilung ausdrücklich zu beantragen. Läßt der Umfang eines Manuskripts vermuten, daß diese Zustimmung erforderlich sein werde, so hat das vorlegende Mitglied es vor dem Einreichen von sachkundiger Seite auf seinen mutmaßlichen Umfang im Druck abschätzen zu lassen.

§ 4.

Sollen einer Mitteilung Abbildungen im Text oder auf besonderen Tafeln beigegeben werden, so sind die Vorlagen dafür (Zeichnungen, photographische Originalaufnahmen usw.) gleichzeitig mit dem Manuskript, jedoch auf getrennten Blättern, einzureichen.

Die Kosten der Herstellung der Vorlagen haben in der Regel die Verfasser zu tragen. Sind diese Kosten aber auf einen erheblichen Betrag zu veranschlagen, so kann die Akademie dazu eine Bewilligung beschließen. Ein darauf gerichteter Antrag ist vor der Herstellung der betreffenden Vorlagen mit dem schriftlichen Kostenanschlage eines Sachverständigen an den vorsitzenden Sekretar zu richten, dann zunächst im Sekretariat vorzuberaten und weiter in der Gesamtakademie zu verhandeln.

Die Kosten der Vervielfältigung übernimmt die Akademie. Über die voraussichtliche Höhe dieser Kosten ist — wenn es sich nicht um wenige einfache Textfiguren handelt — der Kostenanschlag eines Sachverständigen beizufügen. Überschreitet dieser Anschlag für die erforderliche Auflage 5000 Mark, so ist Vorberatung durch das Sekretariat geboten.

Aus § 5.

Nach der Vorlegung und Einreichung des **vollständigen druckfertigen** Manuskripts an den zuständigen Sekretar oder an den Archivar wird über Aufnahme der Mitteilung in die akademischen Schriften, und zwar, wenn eines der anwesenden Mitglieder es verlangt, verdeckt abgestimmt.

Mitteilungen von Verfassern, welche nicht Mitglieder der Akademie sind, sollen der Regel nach nur in die Sitzungsberichte aufgenommen werden. Beschließt eine Klasse die Aufnahme der Mitteilung eines Nichtmitgliedes in die Abhandlungen, so bedarf dieser Beschluß der Bestätigung durch die Gesamtakademie.

Aus § 6.

Die an die Druckerei abzuliefernden Manuskripte müssen, wenn es sich nicht bloß um glatten Text handelt, ausreichende Anweisungen für die Anordnung des Satzes und die Wahl der Schriften enthalten. Bei Einsendungen Fremder sind diese Anweisungen von dem vorlegenden Mitgliede vor Einreichung des Manuskripts vorzunehmen. Dasselbe hat sich zu vergewissern, daß der Verfasser seine Mitteilung als vollkommen druckreif ansieht.

Die erste Korrektur ihrer Mitteilungen besorgen die Verfasser. Fremde haben diese erste Korrektur an das vorlegende Mitglied einzusenden. Die Korrektur soll nach Möglichkeit nicht über die Berichtigung von Druckfehlern und leichten Schreibversehen hinausgehen. Umfängliche Korrekturen Fremder bedürfen der Genehmigung des redigierenden Sekretars vor der Einsendung an die Druckerei, und die Verfasser sind zur Tragung der entstehenden Mehrkosten verpflichtet. Übersteigen die Kosten der Korrektur einen gewissen Prozentsatz der Satzkosten, so fallen die Mehrkosten den Verfassern selbst ganz oder teilweise zur Last.

Aus § 8.

Von allen in die Sitzungsberichte oder Abhandlungen aufgenommenen wissenschaftlichen Mitteilungen, Reden, Adressen oder Berichten werden für die Verfasser, von wissenschaftlichen Mitteilungen, wenn deren Umfang im Druck 4 Seiten übersteigt, auch für den Buchhandel Sonderabdrucke hergestellt, die alsbald nach Erscheinen ausgegeben werden.

Von Gedächtnisreden werden ebenfalls Sonderabdrucke für den Buchhandel hergestellt, indes nur dann, wenn die Verfasser sich ausdrücklich damit einverstanden erklären.

§ 9.

Von den Sonderabdrucken aus den Sitzungsberichten erhält ein Verfasser, welcher Mitglied der Akademie ist, zu unentgeltlicher Verteilung ohne weiteres 50 Freiexemplare; er ist indes berechtigt, zu gleichem Zwecke auf Kosten der Akademie weitere Exemplare bis zur Zahl von noch 100 und auf seine Kosten noch weitere bis zur Zahl von 200 (im ganzen also 350) abziehen zu lassen, sofern er dies rechtzeitig dem redigierenden Sekretar angezeigt hat; wünscht er auf seine Kosten noch mehr Abdrucke zur Verteilung zu erhalten, so bedarf es dazu der Genehmigung der Gesamtakademie oder der betreffenden Klasse. — Nichtmitglieder erhalten 50 Freiexemplare und dürfen nach rechtzeitiger Anzeige bei dem redigierenden Sekretar weitere 200 Exemplare auf ihre Kosten abziehen lassen.

Von den Sonderabdrucken aus den Abhandlungen erhält ein Verfasser, welcher Mitglied der Akademie ist, zu unentgeltlicher Verteilung ohne weiteres 30 Freiexemplare; er ist indes berechtigt, zu gleichem Zwecke auf Kosten der Akademie weitere Exemplare bis zur Zahl von noch 100 und auf seine Kosten noch weitere bis zur Zahl von 100 (im ganzen also 230) abziehen zu lassen, sofern er dies rechtzeitig dem redigierenden Sekretar angezeigt hat; wünscht er auf seine Kosten noch mehr Abdrucke zur Verteilung zu erhalten, so bedarf es dazu der Genehmigung der Gesamtakademie oder der betreffenden Klasse. — Nichtmitglieder erhalten 30 Freiexemplare und dürfen nach rechtzeitiger Anzeige bei dem redigierenden Sekretar weitere 100 Exemplare auf ihre Kosten abziehen lassen.

(Fortsetzung auf S. 3 des Umschlags.)

SITZUNGSBERICHTE
DER PREUSSISCHEN
AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.
1923

IV. Gesamtsitzung. 8. Februar.

Vorsitzender Sekretar: Hr. Roethe.

*1. Hr. Schlenk sprach: Über den Chemismus der katalytischen Hydrierung mittels Wasserstoff und Nickel.

Es wurde gefunden, daß Nickel in kolloidaler Lösung erhalten werden kann durch Umsetzung von wasserfreiem Nickelchlorid mit Lithiumalkylen oder Grignardschen Magnesiumverbindungen. Im kolloidalen Zustand nimmt das Nickel begierig Wasserstoff auf. Die Zusammensetzung des gebildeten Produktes entspricht der Formel NiH^2. Da dieser Nickelwasserstoff energisch hydrierend wirkt und sich nach Ablauf der Hydrierung regeneriert, hat man in seiner Bildung die Ursache der katalytischen Wirksamkeit von Nickel bei Hydrierungen im allgemeinen zu erblicken.

2. Hr. Goldschmidt überreichte sein Werk: »Die Elfenbeinskulpturen aus der romanischen Zeit XI.—XIII. Jahrhundert«, 3. Band (Berlin 1923).

3. Das korrespondierende Mitglied Hr. Heymans übersandte sein Werk »Die Gesetze und Elemente des wissenschaftlichen Denkens, ein Lehrbuch der Erkenntnistheorie in Grundzügen« (Leipzig 1923).

4. Die Witwe des verstorbenen Prof. Dr. Julius Rodenberg hat bei der Akademie eine Stiftung errichtet, deren Statut in diesem Stück abgedruckt ist.

5. Der physikalisch-mathematischen Klasse der Akademie stand zum 26. Januar d. J. aus der Dr.-Karl-Güttler-Stiftung ein Betrag von 1800 Mark zur Verfügung; sie hat beschlossen, die Summe diesmal nicht zu verleihen.

Zum 26. Januar 1924 steht ein Betrag von 1800 Mark zur Verfügung der philosophisch-historischen Klasse, die ihn in einer oder mehreren Raten vergeben kann. Die Zuerteilungen erfolgen nach § 2 des Statuts der Stiftung zur Förderung wissenschaftlicher Zwecke, und zwar insbesondere als Gewährung von Beiträgen zu wissenschaftlichen Reisen, zu Natur- und Kunststudien, zu Archivforschungen, zur Drucklegung größerer wissenschaftlicher Werke, zu Herausgabe unedierter Quellen und Ähnlichem.

Bewerbungen müssen spätestens bis zum 25. Oktober d. J. im Bureau der Akademie, Berlin NW 7, Unter den Linden 38, eingereicht werden.

Die Akademie hat in ihrer Gesamtsitzung am 18. Januar den Professor an der Universität Freiburg, Hrn. Dr. Johannes von Kries, zum korrespondierenden Mitglied ihrer physikalisch-mathematischen Klasse gewählt.

Die Akademie hat das ordentliche Mitglied ihrer philosophisch-historischen Klasse, Hrn. Ernst Troeltsch, am 1. Februar durch den Tod verloren.

Julius-Rodenberg-Stiftung.

Statut vom 29. Januar 1923.

Die Witwe des verstorbenen Prof. Dr. Julius Rodenberg hat, um sein Andenken zu ehren, bei der Preußischen Akademie der Wissenschaften eine »Julius-Rodenberg-Stiftung für die Wissenschaft vom deutschen Leben« errichtet. Die Preußische Akademie der Wissenschaften hat die Stiftung mit Zustimmung des Ministeriums für Wissenschaft, Kunst und Volksbildung angenommen und für sie nach dem Willen der Stifterin folgendes Statut festgesetzt:

§ 1.

Das Kapital der Stiftung zerfällt in zwei voneinander gesonderte Teile:

1. Ein Kapital von 750000 Mark, das in seiner ganzen Substanz zur Unterstützung der von dem ordentlichen Mitgliede der Akademie Hrn. Geheimrat Prof. D. Dr. Konrad Burdach unternommenen und geleiteten Arbeiten zur neueren deutschen Sprach- und Bildungsgeschichte, insbesondere zur Fortführung des Druckes des Werkes »Vom Mittelalter zur Reformation« verwendet werden soll.

2. Ein Kapital von 250000 Mark, das in seiner Substanz niemals angegriffen, sondern durch periodische Zahlungen festgesetzter Beträge aus seinen Zinsen dazu dienen soll, die Publikationen bedeutsamer Forschungen auf dem Gebiete der deutschen Sprach- und Literaturwissenschaft zu fördern.

Falls von dem ersteren Kapital ein Rest unverbraucht bleibt, ist er dem zweiten Kapital zuzuschlagen.

Das unter Nr. 2 genannte Stiftungsvermögen bildet einen Bestandteil des Vermögens der Akademie und wird verwaltet nach den Bestimmungen, welche hierfür in den Statuten der Akademie getroffen sind.

§ 2.

Die Zinsen des im § 1 unter Nr. 2 genannten Kapitals zur Förderung der deutschen Sprach- und Literaturwissenschaft können in folgender Weise Verwendung finden:

1. durch Gewährung von Stipendien, die an junge oder auch an bereits bewährte Gelehrte für eingereichte hervorragende wissenschaftliche Arbeiten im Manuskript oder auch für erschienene Schriften auf dem Gebiete der deutschen Sprach- und Literaturwissenschaft gezahlt werden,

2. durch Aussetzung von Preisen für Preisaufgaben aus dem genannten wissenschaftlichen Arbeitsgebiet,

3. durch Zuschüsse zu wissenschaftlichen Forschungsreisen verdienter oder vielversprechender Gelehrter des angegebenen Faches,

4. durch Zuschüsse zu allen im Gange befindlichen oder neu ins Leben zu rufenden Unternehmungen der Akademie aus dem bezeichneten Forschungsgebiete.

§ 3.

Die Stiftung wird verwaltet durch ein Kuratorium von 3 Mitgliedern, die von der philosophisch-historischen Klasse der Akademie in einer Sitzung, zu welcher unter Angabe des Zweckes besonders einzuladen ist, aus ihrer Mitte gewählt werden. Unter den Mitgliedern des Kuratoriums muß ein Sekretar sein. Die Amtsdauer des Kuratoriums beträgt jeweils 5 Jahre, die Wahl erfolgt in einer Klassensitzung im Dezember, erstmalig im Jahre 1922 für die nächsten 5 Kalenderjahre.

§ 4.

Das Kuratorium tritt, wenn die Zinsen des Kapitals von 250000 Mark eine angemessene Höhe erreicht haben, mindestens aber im Laufe des der Neuwahl folgenden Monats, zusammen und berät über die Verwendung der Zinsen. Es kann eine weitere Vertagung dieser Verwendung beschließen. Kommt es zu positiven Vorschlägen, so werden diese, spätestens im Mai des betreffenden Jahres, schriftlich dem vorsitzenden Sekretar der philosophisch-historischen Klasse angezeigt und in einer Klassensitzung, zu welcher besonders einzuladen ist, vorgelegt. Die Klasse befindet endgültig über die Verwendung der Zinsen durch einfachen Mehrheitsbeschluß; sie kann auch bestimmen, daß die Zinsen noch länger angesammelt werden.

Das Ergebnis des Klassenbeschlusses wird, wenn die im § 2 gekennzeichneten Wege 1—3 eingeschlagen werden, in der nächstfolgenden Festsitzung zur Feier des Leibnizischen Jahrestages öffentlich verkündigt.

§ 5.

Schriften, die mit Unterstützung der Stiftung bearbeitet oder gedruckt oder von der Stiftung preisgekrönt worden sind, müssen auf dem Titelblatt eine entsprechende Angabe aufweisen. Bei bereits vorher gedruckt vorliegenden Werken wird von dieser Bestimmung abgesehen, statt dessen aber eine entsprechende Mitteilung in den Sitzungsberichten und in einer geeigneten wissenschaftlichen Zeitschrift veröffentlicht. Die Empfänger von Unterstützungen, Stipendien oder Preisen aus der Stiftung sind verpflichtet, der Akademie drei Exemplare der betreffenden Schrift unentgeltlich zu überlassen.

§ 6.

Bewerbungen um Stipendien und Druckunterstützungen aus der Stiftung sind zulässig. Sie sind an das Kuratorium der Stiftung zu richten. Doch können solche Unterstützungen auch ohne vorherige Bewerbung verliehen werden.

§ 7.

Falls gemäß § 2, Ziffer 2 eine Preisaufgabe gestellt wird, so wird das Kuratorium jedesmal die Bearbeitungsfrist und den Termin der Ablieferung festsetzen, der so anzuberaumen ist, daß das Ergebnis noch in der Leibnizsitzung des betreffenden Jahres mitgeteilt werden kann. Der Beschluß über die Preiserteilung selbst erfolgt in einer Sitzung der philosophisch-historischen Klasse, zu welcher besonders einzuladen ist.

§ 8.

Änderungen des Statuts dürfen bei Lebzeiten der Stifterin nur mit deren Zustimmung vorgenommen werden. Nach ihrem Ableben bedürfen sie der Genehmigung des Ministeriums für Wissenschaft, Kunst und Volksbildung.

Ausgegeben am 12. März.

SITZUNGSBERICHTE
DER PREUSSISCHEN
AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.
1923

V. Sitzung der physikalisch-mathematischen Klasse. 15. Februar.

Vorsitzender Sekretar: Hr. Rubner.

1. Hr. von Laue sprach über »Die Lösungen der Feldgleichungen der Schwere von Schwarzschild, Einstein und Trefftz und ihre Vereinigung«.

Er gab eine Übersicht über die strengen, statischen und zentralsymmetrischen Lösungen der Differentialgleichungen des Schwerefeldes und sprach über ihre Zusammensetzung zu einem neuen Lösungssystem, bei welchem der sphärisch geschlossene Raum Einsteins in sehr willkürlicher Weise mit Sternen besetzt werden kann.

2. Hr. Einstein überreichte durch Hrn. Planck eine Arbeit: »Zur allgemeinen Relativitätstheorie«.

Es wird gezeigt, wie man durch Anwendung des Hamiltonschen Prinzips auf Grund der Eddingtonschen Auffassung zu einer vollständigen Theorie von Gravitation und Elektrizität gelangen kann, welche unserem bisherigen Wissen gerecht wird. Diese Theorie ist dadurch gegenüber den bisherigen Theorien ausgezeichnet, daß ihre Hamiltonsche Funktion nicht aus logisch voneinander unabhängigen Summanden besteht.

Die Lösungen der Feldgleichungen der Schwere von SCHWARZSCHILD, EINSTEIN und TREFFTZ und ihre Vereinigung.

Von M. v. LAUE.

Sucht man nach statischen zentralsymmetrischen Lösungen der EINSTEINschen Feldgleichungen

$$R_{ik} - \frac{1}{2} R g_{ik} - \lambda g_{ik} = -\varkappa T_{ik},$$

so kann man von dem Ansatz

$$ds^2 = \frac{r}{r-w} dr^2 + r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\phi^2) - v^2 \frac{r-w}{r} dt^2 \qquad (1)$$

für die Maßbestimmung ausgehen und auf sie das Prinzip der kleinsten Wirkung anwenden, welches nach den Arbeiten von HILBERT, H. A. LORENTZ, EINSTEIN mit jenen Feldgleichungen gleichwertig ist. v und w sind dabei Funktionen der Koordinate r allein. Dies Verfahren führt für das Innere einer Flüssigkeit auf die LAGRANGEschen Gleichungen

$$\frac{dw}{dr} - (\lambda + c^2 \varkappa \mu) r^2 = 0, \frac{dv}{dr} - \frac{c \varkappa P r^{5/2}}{2(r-w)^{3/2}} = 0, \qquad (2)$$

in denen P mit der Dichte μ und dem auf das hier benutzte System bezogenen Druck p in dem Zusammenhang

$$P = c \mu v \sqrt{\frac{r-w}{r}} + p \qquad (3)$$

steht. Aus (2) folgt als Grenzbedingung für eine Fläche $r = r_m$, an welcher sich die Dichte sprungweise ändert, die Stetigkeit von v und w, also des ganzen Maßtensors; denn da die neben dv/dr und dw/dr auftretenden Summanden überall, auch in einer solchen Fläche, endlich bleiben, findet man durch Integration

$$\lim_{\varepsilon = 0} (w(r_m + \varepsilon) - w(r_m - \varepsilon)) = 0$$

und Entsprechendes für v. Wenn die Flüssigkeit in dieser Fläche an den leeren Raum stößt, lautet die weitere Grenzbedingung $p = 0$; denn der natürlich gemessene Druck, welcher sich auf das geodätische Ruhsystem eines

Flüssigkeitsteilchens bezieht, muß hier nach Betrachtungen, die man aus der klassischen Mechanik übernehmen darf, verschwinden, und er unterscheidet sich von p nur durch einen überall endlichen Faktor.

Für den leeren Raum vereinfacht sich (2) zu

$$\frac{dw}{dr} - \lambda r^2 = 0, \quad \frac{dv}{dr} = 0; \tag{4}$$

und die allgemeinste Lösung heißt

$$w = \alpha + \frac{1}{3}\lambda r^3, \quad v = c$$

$$ds^2 = \frac{dr^2}{1 - \frac{1}{3}\lambda r^2 - \frac{\alpha}{r}} + r^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\phi^2) - c^2\left(1 - \frac{\lambda r^2}{3} - \frac{\alpha}{r}\right)dt^2 \tag{5}$$

Die Integrationskonstante α hängt dabei näherungsweise mit der Masse m des den Nullpunkt des Koordinatensystems umgebenden kugelförmigen Körpers zusammen nach der Gleichung

$$\alpha = \frac{mc}{4\pi\varkappa}. \tag{6}$$

Diese gilt ihrer Ableitung nach freilich nicht für beliebig große Massen, dürfte aber selbst für die größten Fixsterne noch brauchbar sein. Dies ist die Lösung von Trefftz[1], welche die Lösungen von Schwarzschild[2] ($\lambda = 0$) und von de Sitter[3] ($\alpha = 0$) mit umfaßt.

Lassen wir sie für $r > r_m$ gelten, denken wir uns aber den Raum von $r = 0$ bis $r = r_m$ mit einer unzusammendrückbaren Flüssigkeit ($\mu = \text{const.}$) erfüllt, so läßt sich durch Anwendung des Impulssatzes die Konstanz der Größe P in (2) zeigen. Die Integration dieser Differentialgleichungen liefert dann

$$w = \frac{r^3}{A^2}\left(wvA^2 = \frac{3}{\lambda + c^2\varkappa\mu}\right), \quad v = \frac{c}{2}\left[(3 - \lambda A^2)\sqrt{\frac{A^2 - r_m^2}{A^2 - r^2}} - (1 - \lambda A^2)\right]$$

$$\begin{aligned} ds^2 = {} & \frac{dr^2}{1 - \left(\frac{r}{A}\right)^2} + r^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\phi^2) \\ & - \frac{c^2}{4}\left[(3 - \lambda A^2)\sqrt{1 - \left(\frac{r_m}{A}\right)^2} - (1 - \lambda A^2)\sqrt{1 - \left(\frac{r}{A}\right)^2}\right]^2 dt^2, \end{aligned} \tag{7}$$

eine Lösung, die von der von Schwarzschild[4] gegebenen nur durch die Glieder mit λ abweicht. Der Druck berechnet sich dabei nach der Formel:

$$p = c^2\mu(1 - \lambda A^2)\left(\sqrt{1 - \left(\frac{r_m}{A}\right)^2} - \sqrt{1 - \left(\frac{r}{A}\right)^2}\right). \tag{8}$$

[1] E. Trefftz, Mathem. Ann. 86, 317, 1922.
[2] K. Schwarzschild, Berliner Sitzungsberichte 1916, S. 189.
[3] de Sitter, On Einsteins Theory of gravitation. Monthly Notices 1916 und 1917.
[4] K. Schwarzschild, Berliner Sitzungsberichte 1916, S. 424.

Nach (7) gilt im Inneren der Flüssigkeit die Geometrie eines dreidimensionalen Kugelraums vom Halbmesser A. Doch muß die Flüssigkeit weniger als die Hälfte dieser Kugel erfüllen, weil sonst der Faktor von dt^2 nicht überall positiv ist.

Diese bekannten, nur mit ziemlichem Aufwand an Rechnung abzuleitenden Lösungen mußten wir hier vorausschicken, um nun mühelos zur EINSTEINschen kosmologischen Lösung[1] und einer neuen Verallgemeinerung von ihr fortschreiten zu können.

Setzen wir nämlich mit EINSTEIN in (7) und (8)

$$\mu = \frac{2\lambda}{c^2 \varkappa} \tag{9}$$

so wird $\lambda A^2 = 1$ und $p = 0$, der Faktor von dt^2 aber konstant, so daß wir ihn durch Übergang zu einer anderen Zeitveränderlichen gleich c^2 setzen können. Also:

$$ds^2 = \frac{dr^2}{1 - \lambda r^2} + r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\phi^2) - c^2 dt^2 . \tag{10}$$

Nichts hindert uns dann, diese Lösung bis zu $r = A$ auszudehnen, also über die eine Hälfte des dreidimensionalen Kugelraums mit dem Halbmesser A. Dann können wir aber ohne weiteres noch eine zweite derartige Halbkugel (von drei Dimensionen) daran setzen. Die Ansatzstelle $r = A$ unterscheidet sich dabei in keiner Weise mehr von jedem anderen Kugelpunkt, es tritt keinerlei Unstetigkeit an ihr auf, so daß wir uns auch nicht um die Erfüllung von Grenzbedingungen zu sorgen brauchen. So gelangen wir zu dem sphärischen Raum, den EINSTEIN als ein ungefähres Abbild des ganzen Kosmos hingestellt hat.

Er ist, wenn man EINSTEINS Lösung wörtlich nimmt, mit einer äußerst dünnen Nebelmaterie überall gleichmäßig erfüllt. EINSTEIN selbst hat hervorgehoben, daß in der Nähe jeder Zusammenballung der Materie zu einem Stern eine ganz andere, nämlich die SCHWARZSCHILD-TREFFTZsche Maßbestimmung gelten muß. Wir wollen jetzt zeigen, wie sich diese, wenigstens unter einer beschränkenden Bedingung, an die EINSTEINsche Maßbestimmung anschließen läßt. Wir schneiden zu diesem Zweck vom EINSTEINschen Kugelraum die Kalotte ab, welche von $r = 0$ bis $r = r_i$ führt, und fügen hier die Maßbestimmung (5) ein. Dies gelingt ohne weiteres, wenn wir in ihr

$$\alpha = \frac{2}{3} \lambda r_i^3 \tag{11}$$

setzen und außerdem durch die physikalisch bedeutungslose Veränderung der Zeitveränderlichen um einen konstanten Faktor aus (5) machen:

[1] A. EINSTEIN, Berliner Sitzungsberichte 1917, S. 142.

$$ds = \frac{dr^2}{1 - \frac{1}{3}\lambda r^2 - \frac{2}{3}\lambda\frac{r_i^3}{r}} + r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\phi^2)$$
$$- c^2 \frac{1 - \frac{1}{3}\lambda r^2 - \frac{2}{3}\lambda\frac{r_i^3}{r}}{1 - \lambda r_i^2} dt^2 . \tag{12}$$

Der Maßtensor, wie er sich aus (12) ergibt, geht nämlich bei $r = r_i$ stetig in den durch (10) bestimmten über, und da jetzt überall in der Nebelmaterie $p = 0$ ist, ist es auch bei $r = r_i$ der Fall. Die Grenzbedingungen sind also erfüllt.

Auf diese Weise haben wir die Kugel von $r = 0$ bis $r = r_i$ von Materie entleert, aber ihren Mittelpunkt umgeben mit einem kugelförmigen Körper, welcher nach (6), (9) und (11) die Masse

$$m = \frac{4\pi}{3}\mu r_i^3$$

besitzt. Ist $r_i \ll A$, so ist aber $\frac{4\pi}{3} r_i^3$ das Volumen der herausgeschnittenen Kalotte. Ihre Masse ist somit in jenem Stern vereinigt; das ist der physikalische Inhalt der hier eingeführten Beschränkung (11). Sie bewirkt, daß am Rande der Höhlung, d. h. bei $r = r_i$, die Lichtgeschwindigkeit

$$V = c\sqrt{\frac{1 - \frac{1}{3}\lambda r^2 - \frac{2}{3}\lambda\frac{r_i^3}{r}}{1 - \lambda r_i^2}}$$

ein Maximum hat. Aus $dV/dr = 0$ folgt aber, daß dort ein ruhender Massenpunkt keine Schwerewirkung erfährt. Die Anziehung jenes Zentralkörpers hebt also am Rande der ihn umgebenden Höhlung die Anziehung nach außen, welche die Nebelmaterie ausübt, gerade auf.

Jetzt haben wir somit in dem sphärischen, nebelerfüllten Raum Einsteins eine Höhlung mit einem zentralen Stern. Nichts hindert uns nun, die schon einmal vorgenommene Operation zu wiederholen, d. h. wiederum eine Kalotte — mit anderem Mittelpunkt — abzuschneiden und in die entstehende Lücke einen Hohlraum mit einem zweiten Stern zu setzen, dessen Masse wiederum gleich der ganzen entfernten Nebelmasse sein muß. Wegen der Gleichwertigkeit aller Punkte im sphärischen Raum bleiben wir dabei durchaus im Bereiche strenger Lösungen der Feldgleichungen; und es ändert nichts daran, daß wir so zu Lösungen kommen, welche nicht mehr zentralsymmetrisch sind. Solange sich die beiden herausgeschnittenen Kalotten nicht überdecken, sondern höchstens in einem Punkte berühren, übt die zwischen ihnen liegende Nebelmaterie eine vollkommene Schutzwirkung aus. Man kann in dem einen Hohlraum keine Veränderung des Schwerefeldes durch den anderen bemerken.

Und dann können wir das Verfahren sogar beliebig oft wiederholen, indem wir die Mittelpunkte der wegzuschneidenden Kalotten, also auch die Orte

der Sterne, ganz beliebig wählen; nur dürfen sich keine zwei von ihnen überdecken. So übersähen wir in einer außerordentlich willkürlichen Anordnung den im allgemeinen sphärischen Raum mit Sternen.

Bedenkt man, daß man die Trefftzsche Lösung (5) bei irgendeinem Wert r_m, der nur kleiner als r_i sein muß, an die Schwarzschildsche Lösung (7) für das Innere einer materiellen Kugel anschließen kann, so sehen wir auf diese Weise die Möglichkeit, unter mathematisch strenger Erfüllung der Feldgleichungen und der Grenzbedingungen einen sphärisch geschlossenen Kosmos aufzubauen, welcher mit dem wirklichen zwar durchaus keine volle Übereinstimmung, wohl aber doch schon eine erheblich größere Ähnlichkeit aufweist, als die ursprüngliche Einsteinsche Lösung (10).

Zur allgemeinen Relativitätstheorie.

Von A. Einstein.

---

§ 1. Allgemeines. Aufstellung der Feldgleichungen.

Die allgemeine Relativitätstheorie war in ihrem mathematischen Aufbau ursprünglich ganz auf die Metrik, d. h. auf die Invariante

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu \qquad (1)$$

gegründet. Die Größen $g_{\mu\nu}$ und ihre Ableitungen stellten das metrische und das Gravitationsfeld dar. Ihnen gegenüber waren die Komponenten $\phi_{\mu\nu}$ des elektrischen Feldes wesensfremde Gebilde. Der Wunsch, das Gravitationsfeld und das elektromagnetische Feld als Wesenseinheit zu begreifen, beherrscht in den letzten Jahren das Streben der Theoretiker.

Diesen Bestrebungen kam eine mathematische Erkenntnis entgegen, welche wir Levi-Civita und Weyl verdanken: Die Ableitung des für die allgemeine Relativitätstheorie fundamentalen Riemannschen Krümmungstensors gründet man am natürlichsten auf das Gesetz der Parallelverschiebung der Vektoren (»affiner Zusammenhang«)

$$\delta A^\mu = -\Gamma^\mu_{\alpha\beta} A^\alpha dx_\beta. \qquad (2)$$

Dieses läßt sich zwar auf (1) zurückführen mittels des Postulates, daß sich der Betrag eines Vektors bei seiner Parallelverschiebung nicht ändere; aber logisch nötig ist eine solche Zurückführung nicht. Dies hat H. Weyl zuerst klar erkannt und auf diese Erkenntnis eine Verallgemeinerung der Riemannschen Geometrie gegründet, welche nach seiner Meinung die Theorie des elektromagnetischen Feldes liefert. Weyl erteilt nicht dem Betrag eines Linienelementes bzw. Vektors eine invariante Bedeutung, sondern nur dem Verhältnis der Beträge zweier Linienelemente bzw. Vektoren mit demselben Angriffspunkt. Die Parallelverschiebung (2) soll so beschaffen sein, daß sie jenes Verhältnis ungeändert läßt. Man kann die Basis dieser Theorie als eine halb-metrische bezeichnen. Nach meiner Überzeugung kommt man so nicht zu einer physikalisch brauchbaren Theorie. Auch vom rein logischen Standpunkt muß es befriedigender erscheinen, die Theorie auf (2) allein zu gründen, wenn man sich dazu bewogen fühlt, die Invariante (1) als Basis der Theorie fallen zu lassen.

Dies that Eddington und bemerkte, daß umgekehrt eine metrische Invariante vom Typus (1), deren physikalische Existenz nicht bezweifelt werden

kann, auf (2) gegründet werden kann. Aus (2) folgt nämlich die Existenz des RIEMANNschen Tensors vierten Ranges

$$R^i_{k,lm} = -\frac{\partial \Gamma^i_{kl}}{\partial x_m} + \Gamma^i_{\tau l}\Gamma^\tau_{km} + \frac{\partial \Gamma^i_{km}}{\partial x_l} - \Gamma^i_{\tau m}\Gamma^\tau_{kl}$$

und aus diesem durch Verjüngung nach den Indizes i und m die Existenz des RIEMANNschen Tensors zweiten Ranges

$$R_{kl} = -\frac{\partial \Gamma^\alpha_{kl}}{\partial x_\alpha} + \Gamma^\alpha_{k\beta}\Gamma^\beta_{l\alpha} + \frac{\partial \Gamma^\alpha_{k\alpha}}{\partial x_l} - \Gamma^\alpha_{kl}\Gamma^\beta_{\alpha\beta}, \qquad (3)$$

dessen fundamentale Bedeutung in der Gravitationstheorie wohlbekannt ist.

$$R_{kl}\, dx_k\, dx_l$$

ist also eine Invariante des Linienelementes, welche EDDINGTON als metrische Invariante ansieht.

Die R_{kl} bilden bei beliebig gewählten $\Gamma^\alpha_{\mu\nu}$, die nur der Symmetriebedingung

$$\Gamma^\alpha_{\mu\nu} = \Gamma^\alpha_{\nu\mu} \qquad (4)$$

unterworfen werden, keinen symmetrischen Tensor. Zerlegt man den Tensor (R_{kl}) in einen symmetrischen und antisymmetrischen gemäß der Gleichung

$$R_{kl} = g_{kl} + \phi_{kl}, \qquad (5)$$

wobei

$$\phi_{kl} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \Gamma^\alpha_{k\alpha}}{\partial x_l} - \frac{\partial \Gamma^\alpha_{l\alpha}}{\partial x_k}\right), \qquad (6)$$

so liegt es nahe, den Tensor (g_{kl}) dem metrischen Tensor g_{kl} gleich zu setzen, den Tensor (ϕ_{kl}) aber, welcher der Relation

$$\frac{\partial \phi_{kl}}{\partial x_m} + \frac{\partial \phi_{lm}}{\partial x_k} + \frac{\partial \phi_{mk}}{\partial x_l} = 0 \qquad (7)$$

genügt, als elektromagnetischen Feldtensor anzusehen.

Zunächst eine Bemerkung zugunsten der beschränkenden Symmetriebedingung (4). Aus (2) folgt das Verschiebungsgesetz des kovarianten Vektors durch die natürliche Festsetzung, daß das skalare Produkt aus einem kontravarianten und kovarianten Vektor sich bei der Parallelverschiebung nicht ändere. Hieraus folgt das Gesetz

$$\delta B_\mu = \Gamma^\alpha_{\mu\beta} B_\alpha dx_\beta .$$

Hieraus folgt in bekannter Weise der Tensorcharakter von

$$\frac{\partial B_\mu}{\partial x_\nu} - \Gamma^\alpha_{\mu\nu} B_\alpha .$$

Hieraus und aus dem Tensorcharakter von $\frac{\partial B_\mu}{\partial x_\nu} - \frac{\partial B_\nu}{\partial x_\mu}$ kann dann der Tensor-

charakter von $\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} - \Gamma^{\alpha}_{\nu\mu}$ geschlossen werden. Hieraus und aus dem Vorigen folgt dann, daß auch

$$\frac{\partial B_\mu}{\partial x_\nu} - \Gamma^{\alpha}_{\nu\mu} B_\alpha$$

Tensorcharakter besitzt. Die Symmetriebedingung (4) ist also nötig, wenn der eindeutige Charakter der kovarianten Erweiterung des Vektors gewahrt bleiben soll.

In der Eddingtonschen Theorie treten die 40 Größen $\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$ als unbekannte Funktionen der x_ν auf, wie in der ursprünglichen Relativitätstheorie die 14 Größen $g_{\mu\nu}$ und ϕ_μ. Das bei Eddington nicht gelöste Problem besteht nun darin, die zur Bestimmung dieser Größen notwendigen Gleichungen zu finden. Als bequemste Methode hierfür bietet sich das Hamiltonsche Prinzip dar. Sei $\mathfrak{H}$ eine nur von den Γ und ihren ersten Ableitungen abhängige skalare Dichte, so soll für jede am Rande des Integrationsgebietes verschwindende stetige Variation der $\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$ gelten

$$\delta\left\{\int \mathfrak{H}\, d\tau\right\} = 0. \tag{8}$$

Die Feldgleichungen, welche wegen des Tensorcharakters von $\delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$ ebenfalls Tensorcharakter besitzen, lauten dann

$$0 = \mathfrak{H}^{\mu\nu}_{\alpha} = \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}} - \frac{\partial}{\partial x_\sigma}\left(\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu,\sigma}}\right), \tag{9}$$

wobei

$$\frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} = \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu,\sigma}$$

gesetzt ist. Dabei ist angenommen, daß $\mathfrak{H}$ eine (algebraische) Funktion der $R^{i}_{k,lm}$ sei. Unsere Hauptaufgabe liegt in der Wahl dieser Funktion.

Es gibt solche Tensordichten, welche r a t i o n a l e Funktionen zweiten Grades aus den $R^{i}_{k,lm}$ sind; sie können mittels der Tensordichte δ^{iklm} gewonnen werden, deren Komponenten gleich 1 oder —1 sind, je nachdem $iklm$ eine gerade oder ungerade Permutation von 1, 2, 3, 4 ist. Eine solche Tensordichte ist z. B.

$$R^{i}_{k,lm} R^{k}_{i,\sigma\tau} \delta^{lm\sigma\tau}.$$

Ich halte es aber für richtig, sich auf diejenigen Tensordichten zu beschränken, welche aus dem verjüngten Tensor R_{kl} gebildet sind bzw. aus S_{kl} und ϕ_{kl}, da wir nur diesen Größen physikalische Bedeutung zuzuschreiben geneigt sind. Dann müssen wir irrationale Funktionen zulassen, wie wir dies aus der bisherigen Entwicklung der allgemeinen Relativitätstheorie bereits gewöhnt sind (z. B. $\sqrt{-g}$). Auch dann gibt es noch verschiedene Möglichkeiten, von denen mir die folgende als die interessanteste erscheint:

$$\mathfrak{H} = 2\sqrt{-|R_{kl}|}, \tag{10}$$

welche ein Analogon der Tensordichte des Volumens darstellt und aus R_{kl} o h n e Z e r s p a l t u n g i n d e n s y m m e t r i s c h e n u n d a n t i s y m m e t r i s c h e n T e i l gebildet ist. Erweist sich diese Hamiltonsche Funktion als brauch-

bar, so leistet die Theorie die Vereinigung von Gravitation und Elektrizität unter einen Begriff in idealer Weise, indem nicht nur dieselben Γ die Felder beider Art bestimmen, sondern auch die Hamiltonsche Funktion eine durchaus einheitliche ist, während sie bisher aus logisch voneinander unabhängigen Summanden bestand.

Im folgenden soll die Brauchbarkeit der Theorie wahrscheinlich gemacht werden.

§ 2. Beziehung der neuen Theorie zu den früheren Ergebnissen der allgemeinen Relativitätstheorie.

Zunächst eine Bemerkung zu Gleichung (5). $g_{kl}dx_k dx_l$ stellt die metrische Invariante für einen »kosmischen« Maßstab dar. Soll $g_{kl}dx_k dx_l$ für einen Maßstab von menschlichen Dimensionen das Längenquadrat darstellen, so hat man zu setzen

$$\lambda^2 R_{kl} = g_{kl} + \phi_{kl}, \tag{5a}$$

wobei λ eine sehr große Zahl ist. Man hat daher gemäß (3)

$$\frac{1}{\lambda^2} g_{kl} = -\frac{\partial \Gamma^\alpha_{kl}}{\partial x_\alpha} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \Gamma^\alpha_{k\alpha}}{\partial x_l} + \frac{\partial \Gamma^\alpha_{l\alpha}}{\partial x_k}\right) + \Gamma^\alpha_{k\beta}\Gamma^\beta_{l\alpha} - \Gamma^\alpha_{kl}\Gamma^\beta_{\alpha\beta} \tag{11}$$

$$\frac{1}{\lambda^2} \phi_{kl} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \Gamma^\alpha_{k\alpha}}{\partial x_l} - \frac{\partial \Gamma^\alpha_{l\alpha}}{\partial x_k}\right). \tag{12}$$

Wir führen nun die in (8) angedeutete Variation durch unter der allgemeineren Annahme, daß $\mathfrak{H}$ eine vorläufig unbestimmt gelassene Funktion von g_{kl} und ϕ_{kl} sei. Dann ist

$$\delta\mathfrak{H} = \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial g_{kl}}\delta g_{kl} + \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial \phi_{kl}}\delta\phi_{kl} = \mathfrak{s}^{kl}\delta g_{kl} + \mathfrak{f}^{kl}\delta\phi_{kl}, \tag{13}$$

wobei $\mathfrak{s}^{kl}$ eine symmetrische, $\mathfrak{f}^{kl}$ eine antisymmetrische Tensordichte bedeutet. Mit Rücksicht auf (11), (12) und (13) nimmt (8) die Form an

$$0 = \int d\tau\,\delta\Gamma^\alpha_{kl}\left\{\mathfrak{s}^{kl}{}_{;\alpha} - \frac{1}{2}\delta^k_\alpha \mathfrak{s}^{l\sigma}{}_{;\sigma} - \frac{1}{2}\delta^l_\alpha \mathfrak{s}^{k\sigma}{}_{;\sigma} - \frac{1}{2}\delta^k_\alpha \frac{\partial \mathfrak{f}^{l\sigma}}{\partial x_\sigma} - \frac{1}{2}\delta^l_\alpha \frac{\partial \mathfrak{f}^{k\sigma}}{\partial x_\sigma}\right\}. \tag{14}$$

Da wir ϕ_{kl} als den kovarianten Tensor des elektromagnetischen Feldes auffassen, werden wir $\mathfrak{f}^{kl}$ als die kontravariante Tensordichte des elektromagnetischen Feldes und

$$i^l = \frac{\partial \mathfrak{f}^{l\sigma}}{\partial x_\sigma} \tag{15}$$

als die Stromdichte anzusehen haben. In (14) bedeutet $\mathfrak{s}^{kl}{}_{;\alpha}$ die kovariante Erweiterung von $\mathfrak{s}^{kl}$ gemäß der Formel

$$\mathfrak{s}^{kl}{}_{;\alpha} = \frac{\partial \mathfrak{s}^{kl}}{\partial x_\alpha} + \mathfrak{s}^{\sigma l}\Gamma^k_{\sigma\alpha} + \mathfrak{s}^{k\sigma}\Gamma^l_{\sigma\alpha} - \mathfrak{s}^{kl}\Gamma^\sigma_{\alpha\sigma}. \tag{16}$$

Aus (14) folgt

$$0 = \mathfrak{s}^{kl}{}_{;\alpha} - \frac{1}{2}\delta^k_\alpha \mathfrak{s}^{l\sigma}{}_{;\sigma} - \frac{1}{2}\delta^l_\alpha \mathfrak{s}^{k\sigma}{}_{;\sigma} - \frac{1}{2}\delta^k_\alpha i^l - \frac{1}{2}\delta^l_\alpha i^k. \tag{17}$$

Durch Kombination dieser Gleichung mit der durch Verjüngung nach den Indizes α und l zu gewinnenden

$$0 = 3\mathfrak{f}^{l\sigma}{}_{;\sigma} + 5\mathfrak{i}^{l} \tag{18}$$

folgt endlich als allgemeines Ergebnis unserer Variationsbetrachtung

$$0 = \mathfrak{f}^{kl}{}_{;\alpha} + \frac{1}{3}\delta^k_\alpha \mathfrak{i}^l + \frac{1}{3}\delta^l_\alpha \mathfrak{i}^k . \tag{19}$$

Dies sind 40 Gleichungen, aus welchen man die Größen Γ berechnen kann. Zu diesem Zweck führen wir die zu der Tensordichte $\mathfrak{f}^{kl}$ gehörigen Tensoren s_{kl} bzw. s^{kl} ein, wobei diese Tensoren zueinander in der nämlichen Beziehung stehen wie der kovariante und kontravariante Fundamentaltensor ($g_{\mu\nu}$ und $g^{\mu\nu}$) der allgemeinen Relativitätstheorie. Es mögen also die Gleichungen bestehen

$$\mathfrak{f}^{kl} = s^{kl}\sqrt{-|s_{ik}|} \tag{20}$$

$$s_{\alpha i}s^{\beta i} = \delta^\beta_\alpha . \tag{21}$$

Ferner setzen wir

$$\mathfrak{i}^l = \sqrt{-|s_{ik}|}\; i^l = \sqrt{-s}\; i^l \tag{22}$$

$$i_l = s_{l\sigma} i^\sigma . \tag{23}$$

Dann erhalten wir durch Rechnungen, welche aus der allgemeinen Relativitätstheorie wohlbekannt sind

$$\Gamma^\alpha_{kl} = \frac{1}{2}s^{\alpha\beta}\left(\frac{\partial s_{k\beta}}{\partial x_l} + \frac{\partial s_{l\beta}}{\partial x_k} - \frac{\partial s_{kl}}{\partial x_\beta}\right) - \frac{1}{2}s_{kl}i^\alpha + \frac{1}{6}\delta^\alpha_k i_l + \frac{1}{6}\delta^\alpha_l i_k . \tag{24}$$

Diese Werte der Γ hat man in (11) und (12) eingesetzt zu denken. Da die $\mathfrak{f}$ und $\check{\mathfrak{f}}$ vermöge (13) durch die Wahl der Hamiltonschen Funktion durch die g und ϕ ausdrückbar sind, so genügen nach Substitution die Gleichungen (11) und (12) zur Bestimmung der unbekannten Funktionen. Um nun die physikalische Berechtigung der in (10) getroffenen Wahl der Hamiltonschen Funktion zu erkennen, betrachten wir zunächst den Fall des Fehlens eines elektromagnetischen Feldes. Nach (10) und (13) wird dann

$$\mathfrak{f}^{kl} = g^{kl}\sqrt{-g}$$

$$\check{\mathfrak{f}}^{kl} = 0 ,$$

wobei g^{kl} und g zu g_{kl} in der aus der allgemeinen Relativitätstheorie geläufigen Relation stehen. Die Gleichung (24) nimmt dann die wohlbekannte Form an

$$\Gamma^\alpha_{kl} = \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\left(\frac{\partial g_{k\beta}}{\partial x_l} + \frac{\partial g_{l\beta}}{\partial x_k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x_\beta}\right), \tag{24a}$$

welche Gleichung zusammen mit (11) genau die Vakuumgleichung des Gravitationsfeldes der allgemeinen Relativitätstheorie beim Verschwinden des elektromagnetischen Feldes mit Berücksichtigung des kosmologischen Gliedes liefert. Dies ist ein starkes Argument für unsere Wahl der Hamiltonschen Funktion sowie für die Brauchbarkeit der Theorie überhaupt.

Wir gehen nun zu dem Falle über, daß das elektromagnetische Feld nicht verschwindet. Aus (12) und (24) folgt zunächst allgemein

$$\frac{1}{\lambda^2}\phi_{kl} = \frac{1}{6}\left(\frac{\partial i_k}{\partial x_l} - \frac{\partial i_l}{\partial x_k}\right). \qquad (25)$$

Hieraus erhellt zwar, daß bei absolut verschwindender Stromdichte kein elektrisches Feld möglich ist. Aber die außerordentliche Kleinheit von $\frac{1}{\lambda^2}$ bringt es mit sich, daß endliche ϕ_{kl} nur bei winzigen, praktisch verschwindenden kovarianten Stromdichten möglich sind. Singuläre Stellen ausgenommen, verschwindet praktisch also die Stromdichte. Es gelten also dort sehr angenähert die Gleichungen

$$\frac{\partial \mathfrak{f}^{kl}}{\partial x_l} = 0 \cdots \qquad (26)$$

$$\frac{\partial \phi_{kl}}{\partial x_\sigma} + \frac{\partial \phi_{l\sigma}}{\partial x_k} + \frac{\partial \phi_{\sigma k}}{\partial x_l} = 0\,, \qquad (27)$$

welch letztere Gleichung mit Rücksicht auf (12) strenge gilt. Die Beziehung zwischen den ϕ und den $\mathfrak{f}$ wird bei unserer Wahl der Hamiltonschen Funktion dadurch bestimmt, daß die Größen

$$\mathfrak{r}^{kl} = \mathfrak{f}^{kl} + \mathfrak{f}^{kl}$$

die mit der Wurzel aus der negativ genommenen Determinante r der

$$r_{kl} = g_{kl} + \phi_{kl}$$

multiplizierten Unterdeterminanten der r_{kl} sind. Bezeichnet man nämlich jene normierten Unterdeterminanten mit r^{kl}, so hat man

$$\delta r = r\, r^{kl}\, \delta r_{kl}$$

und folglich

$$\delta \mathfrak{H} = \delta(2\sqrt{-r}) = \frac{1}{\sqrt{-r}}\,\delta(-r) = \sqrt{-r}\; r^{kl}\,\delta r_{kl} = \sqrt{-r}\; r^{kl}(\delta g_{kl} + \delta\phi_{kl})\,,$$

woraus die Behauptung folgt.

Die approximative Berechnung der $\mathfrak{f}^{kl}$ ist somit einfach in dem wichtigen Falle, daß sich die r_{kl} nur unendlich wenig von den konstanten Werten δ_{kl} (= 1 bzw. = 0) unterscheiden. In diesem Falle ist in erster Näherung — wobei in üblicher Weise die Zeitkoordinate imaginär gewählt ist —

$$\mathfrak{f}^{kl} = \phi_{kl}\,.$$

Durch dies Ergebnis in Verbindung mit (26) und (27) ist damit gezeigt, daß in erster Näherung (für genügend schwache Felder) die Maxwellschen Gleichungen des leeren Raumes gelten.

Ob unsere Theorie auch die elektrischen Elementargebilde umfaßt, kann nur durch strenge Berechnung des zentralsymmetrischen statischen Feldes entschieden werden. Jedenfalls zeigt die Gleichung (25), daß endliche Werte

der Stromdichte i^l nur möglich sind, wenn gleichzeitig die i_l von der Größenordnung $\frac{1}{\lambda^2}$ klein werden; so wären singularitätsfreie Elektronen denkbar. Bemerkenswert ist, daß nach dieser Theorie die positive und die negative Elektrizität keineswegs bloß dem Vorzeichen nach verschieden sein können. —

Die vorstehende Untersuchung zeigt, daß Eddingtons allgemeiner Gedanke in Verbindung mit dem Hamiltonschen Prinzip zu einer von Willkür fast freien Theorie führt, welche unserem bisherigen Wissen über Gravitation und Elektrizität gerecht wird und beide Feldarten in wahrhaft vollendeter Weise vereinigt.

Haruna Maru, Januar 1923.

Einige Bemerkungen über Singularitäten Taylorscher und Dirichletscher Reihen.

Von Dr. Alexander Ostrowski
in Hamburg.

(Vorgelegt von Hrn. Schur am 11. Januar 1923 [s. oben S. 1].)

Der als Verallgemeinerung eines Fabryschen[1] Lückensatzes von Carlson-Landau[2] und Szász[3] aufgestellte Lückensatz für Dirichletsche Reihen besagt: Ist bei einer Dirichletschen Reihe $f(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}$ mit der imaginären Achse als Konvergenzgeraden $\underline{\lim}\,(\lambda_{n+1} - \lambda_n) > 0$ und $\lim \frac{n}{\lambda_n} = 0$, so ist $f(s)$ über die Konvergenzgerade hinaus nicht fortsetzbar.

Man kann versuchen, einen Einblick in das Zustandekommen der natürlichen Grenze unter den Bedingungen dieses Satzes so zu gewinnen, daß man die Verteilung der Singularitäten unter der Annahme untersucht, daß $\overline{\lim} \frac{n}{\lambda_n}$ sehr klein ist. Man kann nun leicht den folgenden Satz beweisen:

Satz I. Bei jeder Dirichletschen Reihe $f(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}$ mit der imaginären Achse als Konvergenzgeraden, bei der $\underline{\lim}\,(\lambda_{n+1} - \lambda_n) \geqq 2$ und $\overline{\lim} \frac{n}{\lambda_n} \leqq \vartheta$ ist, liegt in einem Kreise mit dem Radius $r(\vartheta)$ um einen beliebigen Punkt der imaginären Achse wenigstens eine Singularität der durch die Reihe $f(s)$ dargestellten analytischen Funktion, wo $r(\vartheta)$ nur von ϑ abhängt und $\lim_{\vartheta = 0} r(\vartheta) = 0$ ist.

[1] Fabry, Annales Éc. N. S. (3) XIII (1896) pp. 367—399; Acta Math. XXII (1899), p. 86.

[2] F. Carlson und E. Landau, Gött. Nachr., 1921, pp. 184—188.

[3] O. Szász, Math. Ann., 85 (1922) pp. 99—110. Die in der vorliegenden Note mitgeteilten Überlegungen habe ich Anfang 1921 angestellt — bis auf die erst während der Niederschrift (Oktober 1922) hinzugekommene genauere Berechnung von $r(\vartheta)$ — im Anschluß an den mir durch eine Mitteilung von Hrn. Hecke bekannt gewordenen Beweis von Carlson und Landau für den obigen Lückensatz. Erst im April 1921 habe ich gelegentlich einer Zusammenkunft in Berlin von Hrn. Szász erfahren, daß der für $\vartheta = 0$ aus meinen Überlegungen entstehende neue Beweis dieses Lückensatzes mit einem Beweis identisch ist, den Hr. Szász 1920 auf der Nauheimer Mathematikertagung vorgetragen und nunmehr in der zitierten Abhandlung veröffentlicht hat. Indessen geht der Spezialfall $\vartheta = 0$, $k = 0$ meines Satzes II* in mehreren Beziehungen weiter als der entsprechende Satz bei Hrn. Szász.

Das Bemerkenswerte an diesem Satz ist, daß in ihm das Auftreten von Singularitäten wesentlich durch die formale Gestalt der Dirichletschen Reihe, d. h. durch die Exponentenfolge bedingt ist — ebenso wie in den Lückensätzen.

Es genügt offenbar die Behauptung des Satzes für den Kreis um den Nullpunkt mit dem Radius $r(\vartheta)$ zu beweisen. Man kann sich aber auch auf den Fall reeller Koeffizienten a_n beschränken. Denn ist $f(s)$ für $|s| \leqq r(\vartheta)$ regulär, so ist dasselbe auch für die durch die Dirichletsche Reihe mit konjugiert-komplexen Koeffizienten dargestellte Funktion der Fall und auch für die Summe und die Differenz beider. Für den Fall reeller Koeffizienten ist aber unser Satz im folgenden enthalten:

Satz II. Kommen in der Folge der Koeffizienten der Dirichletschen Reihe $f(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}$ mit reellen Koeffizienten und $\underline{\lim}\,(\lambda_{n+1} - \lambda_n) \geqq 2$ unendlich viele Zeichenwechsel, und zwar nach den Koeffizienten mit den Indizes n_ν vor und ist $\overline{\lim}\, \frac{\nu}{\lambda_{n_\nu}} = \vartheta$, so hat $f(s)$ wenigstens eine Singularität für $|s| \leqq r(\vartheta)$, wo $r(\vartheta)$ eine nur von ϑ abhängige positive Zahl ist, für die $\lim_{\vartheta=0} r(\vartheta) = 0$ ist.

Der Beweis des Satzes II, bei dem wir $\lambda_0 \geqq 1$, $\lambda_{n+1} - \lambda_n \geqq 1$ annehmen können, da man offenbar endlich viele Glieder weglassen kann, ergibt sich sehr leicht aus dem folgenden Satz von H. Cramér[1]: Es sei $\phi(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{c_\nu}{\nu!} z^\nu$ eine ganze transzendente Funktion, die für jedes $\varepsilon > 0$ für hinreichend große $|z|$ der Abschätzung $|\phi(z)| < e^{(k+\varepsilon)|z|}$ genügt (höchstens »vom Typus k der Ordnung 1« ist), $f(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}$ eine Dirichletsche Reihe mit der imaginären Achse als Konvergenzgeraden. Man schneide aus dem Regularitätsgebiet D von $f(s)$ alle Punkte heraus, deren Distanz vom Rand dieses Regularitätsgebiets $\leqq k$ ist und bezeichne das mit der Halbebene $R(s) > k$ zusammenhängende Teilgebiet des übrigbleibenden Gebietes durch D_k^*. Dann ist die Konvergenzabszisse der Dirichletschen Reihe $f_\phi(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \phi(\lambda_n) e^{-\lambda_n s}$ höchstens gleich k, und die durch sie dargestellte Funktion ist in D_k^* regulär.

Man bezeichne nämlich die Punkte $\frac{\lambda_{n_\nu} + \lambda_{n_\nu+1}}{2}$ durch r_ν und bilde

$$\phi(z) = \prod_{\nu=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{r_\nu^2}\right).$$

[1] H. Cramér. Arkiv för Math., 13, Nr. 22 (1918).

Für diese ganze transzendente Funktion beweist man leicht für jedes $\varepsilon > 0$ die folgende für hinreichend große $|z|$ geltende Abschätzung

$$|\phi(z)| < e^{(r'(\vartheta)+\varepsilon)|z|}, \quad r'(\vartheta) \underset{\vartheta \to 0}{\longrightarrow} 0, \quad r'(\vartheta) \geqq 0$$

Da nun die Koeffizienten der Dirichletschen Reihe $f_\phi(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \phi(\lambda_n) e^{-\lambda_n s}$ ein und dasselbe Vorzeichen haben, ist $f_\phi(s)$ im reellen Punkt t ihrer Konvergenzgeraden singulär, und $f(s)$ für ein s mit $|s-t| \leqq r'(\vartheta)$, nach dem Cramérschen Satze. Um t nach unten abzuschätzen, hat man für $\frac{1}{\phi(\lambda_n)}$ die für jedes $\varepsilon > 0$ von einem n an richtige Abschätzung zu beweisen

$$\frac{1}{|\phi(\lambda_n)|} < e^{(r''(\vartheta)+\varepsilon)\lambda_n}, \quad r''(\vartheta) \underset{\vartheta \to 0}{\longrightarrow} 0, \quad r''(\vartheta) \geqq 0.$$

Denn bestimmt man für ein $\varkappa > 0$ aus der Koeffizientensumme von $f(s-\varkappa)$: $\sum_{n=0}^{m} a_n e^{\varkappa \lambda_n} = \sum_{n=0}^{m} a_n \phi(\lambda_n) \frac{e^{\varkappa \lambda_n}}{\phi(\lambda_n)}$ in bekannter Weise die Konvergenzabszisse $\varkappa$ von $f(s-\varkappa)$ und berücksichtigt, daß sämtliche Zahlen $a_n \phi(\lambda_n)$ gleiches Vorzeichen haben, so folgt aus

$$0 < \varkappa = \overline{\lim} \frac{\log \sum_0^m a_n e^{\varkappa \lambda_n}}{\lambda_m} \leqq \overline{\lim} \frac{\log \sum_0^m a_n \phi(\lambda_n) e^{(r''(\vartheta)+\varepsilon)\lambda_n} e^{\varkappa \lambda_n}}{\lambda_m},$$

daß die Konvergenzabszisse der Reihe $f_\phi(r''(\vartheta) + \varkappa + \varepsilon + s)$ für jedes $\varepsilon > 0$ nicht kleiner als $\varkappa$ ist, daß daher die Konvergenzabszisse t der Reihe $f_\phi(s)$ nicht kleiner als $-r''(\vartheta)$ ist. So sehen wir schließlich, daß $f(s)$ wenigstens eine singuläre Stelle für $|s| \leqq r'(\vartheta) + r''(\vartheta)$ hat, w. z. b. w.

Die Rechnung[1] zur Bestimmung von $r'(\vartheta)$ und $r''(\vartheta)$ verläuft wie folgt:

Es sei $\eta_m = \underset{\nu \geqq m}{\mathrm{Max}} \frac{\nu}{r_\nu}$ gesetzt ($\lim_{m=\infty} \eta_m \leqq \vartheta$, $\eta_m \leqq 1$, $\vartheta \leqq 1$). Dann ist für jedes $m > 1$, $r > 0$:

$$1. \quad \underset{|z|=r}{|\phi(z)|} \leqq \prod_{\nu=1}^{\infty} \left(1 + \frac{r^2}{r_\nu^2}\right) \leqq (1+r^2)^m \prod_{\nu=m+1}^{\infty} \left(1 + \frac{(\eta_m r)^2}{\nu^2}\right) < (1+r^2)^m \frac{\sin \pi i \eta_m r}{\pi i \eta_m r}.$$

Und hier ist die rechte Seite offenbar für jedes $\varepsilon > 0$ von einem $m = m(\varepsilon)$ an kleiner als $e^{(\pi\vartheta+\varepsilon)r}$, so daß $r'(\vartheta) = \pi\vartheta$ gesetzt werden kann.

2. Es sei $r_{m-1} < \lambda_n < r_m$, $r_{m_1-1} \leqq 2\lambda_n < r_{m_1}$, $[\lambda_n] = l_n - 1$, $[2\eta_{m_1}\lambda_n] = \alpha_n l_n$, dann folgt von einem n an

$$\left| \frac{\left(1 - \frac{\lambda_n^2}{r_{m-1}^2}\right)\left(1 - \frac{\lambda_n^2}{r_m^2}\right)}{\phi(\lambda_n)} \right| \leqq \prod_{\nu=1}^{m-2} \frac{1}{\frac{\lambda_n^2}{r_\nu^2} - 1} \cdot \prod_{\nu=m+1}^{\infty} \left(1 + \frac{\lambda_n^2}{(r_\nu + \lambda_\nu)(r_\nu - \lambda_n)}\right).$$

[1] Für diese Rechnung vgl. man die analogen Stellen bei Carlson und Landau, l. c.

Für das erste Produkt folgt

$$\prod_{\nu=1}^{m-2} \frac{1}{\frac{\lambda_n^2}{r_\nu^2}-1} < \frac{\prod_{\nu=1}^{m-2} r_\nu}{(m-2)!} < \frac{r_{m-2}^{m-2} e^{m-2}}{(m-2)^{m-2}} < e^{r_{m-2}\frac{m-2}{r_{m-2}}\lg\frac{e r_{m-2}}{m-2}} < C_{(\varepsilon)} e^{(\vartheta \lg(\frac{e}{\vartheta})+\varepsilon)\lambda_n}$$

für jedes $\varepsilon > 0$ mit einem von n unabhängigen $C(\varepsilon)$ (für $\vartheta = 0$ ist natürlich $\vartheta \lg \vartheta = 0$ zu setzen).

Für das zweite Produkt folgt zuerst ebenso wegen $r_\nu - \lambda_n > r_\nu - r_m$

$$\prod_{\nu=m+1}^{\infty} < \prod_{\nu=m+1}^{\infty}\left(1+\frac{\lambda_n^2}{r_\nu(\nu-m)}\right) < \prod_{\mu=1}^{\infty}\left(1+\frac{(\lambda_n\sqrt{\eta_m})^2}{\mu^2}\right)$$

$$= \frac{\sin \pi i \lambda_n \sqrt{\eta_m}}{\pi i \lambda_n \sqrt{\eta_m}} < C'(\varepsilon)\, e^{(\pi\sqrt{\vartheta}+\varepsilon)\lambda_n}.$$

Ist aber $0 < \vartheta < \frac{1}{4}$, so folgt für das zweite Produkt wegen $m_1 - 1 \leqq 2\,\eta_m \lambda_n$:

$$\prod_{\nu=m+1}^{\infty} = \prod_{\lambda_n < r_\nu \leqq 2\lambda_n} \prod_{r_\nu > 2\lambda_n} < \prod_{\nu=m+1}^{m_1-1}\left(1+\frac{\lambda_n}{r_\nu-\lambda_n}\right)\prod_{\nu \geqq m_1}\left(1+\frac{2\lambda_n^2}{r_\nu^2}\right)$$

$$\leqq \prod_{\nu=1}^{\alpha_n l_n}\left(1+\frac{\lambda_n}{\nu}\right)\prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1+\frac{(2\,\eta_{m_1}\lambda_n)^2}{\nu^2}\right) \leqq \frac{((1+\alpha_n)\,l_n)!}{(\alpha_n l_n)!\; l_n!}\;\frac{\sin \pi i\, 2\,\eta_{m_1}\lambda_n}{\pi i\, 2\,\eta_{m_1}\lambda_n}.$$

Benutzen wir die Stirlingsche Formel, so folgt weiter von einem m an:

$$\leqq C''(\varepsilon)\,\frac{((1+\alpha_n)\,l_n)^{(1+\alpha_n)l_n}}{(\alpha_n l_n)^{\alpha_n l_n}\, l_n^{l_n}}\, e^{(2\vartheta\pi+\varepsilon)\lambda_n} \leqq C'''(\varepsilon)\, e^{(2\alpha_n - \alpha_n \lg \alpha_n)l_n + (2\vartheta\pi+\varepsilon)\lambda_n}$$

$$\leqq C'''(\varepsilon)\, e^{(2\vartheta \lg\frac{e^{10}}{\vartheta}+\varepsilon)\lambda_n},$$

und dies gilt offenbar auch für $\frac{1}{4} \leqq \vartheta \leqq 1$. Wir können daher $r''(\vartheta)$ offenbar gleich $3\vartheta \lg \frac{e^7}{\vartheta}$ setzen. Für $r(\vartheta)$ kann man also $4\vartheta \lg \frac{e^{10}}{\vartheta}$ setzen.

Man übersieht sofort, daß unsere Abschätzungen auch dann gelten, wenn wir die Annahme $\underline{\lim}\,(\lambda_{n+1}-\lambda_n) \geqq 2$ ersetzen durch $\underline{\lim}\,(r_{n+1}-r_n) \geqq 2$ und $\lambda_{n_\nu+1} - \lambda_{n_\nu} > e^{-\varepsilon\lambda_{n_\nu}}$ für jedes $\varepsilon > 0$ von einem ν an.

Setzt man allgemeiner voraus, daß für jedes $\varepsilon > 0$ von einem ν an

$$\lambda_{n_\nu+1} - \lambda_{n_\nu} > e^{-(k+\varepsilon)\lambda_{n_\nu}}, \text{ wo } k > 0 \text{ fest ist,}$$

so ergibt sich $r''(\vartheta) = 2\left(k + 2\vartheta \lg \frac{e^7}{\vartheta}\right)$. Ist aber $\underline{\lim}\,(r_{n+1}-r_n) \geqq 2\,d > 0$, so führt die Substitution $s = \frac{s'}{d}$ diesen Fall auf den obigen zurück. So gelangt man zu dem

Satz II*: Besitzt die Folge der Koeffizienten der Dirichletschen Reihe $f(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}$ mit reellen Koeffizienten und der Konvergenzabszisse 0 unendlich viele Zeichenwechsel, und zwar nur nach den Koeffizienten a_{n_ν}, ist $\underline{\lim}(\lambda_{n_\nu+1+1} - \lambda_{n_\nu}) \geqq 4d > 0$, $\overline{\lim} \frac{\nu}{\lambda_{n_\nu}} \leqq \vartheta$ und ist für jedes $\varepsilon > 0$ von einem ν an $\lambda_{n_\nu+1} - \lambda_{n_\nu} > e^{-(k+\varepsilon)\lambda_{n_\nu}}$, wo k fest ist, so besitzt die durch $f(s)$ dargestellte Funktion für $|s| \leqq 2\left(2\vartheta \lg \frac{e^{10}}{\vartheta d} + k\right)$ wenigstens eine singuläre Stelle. —

Es sei endlich bemerkt, daß bei Hrn. Fabry[1] für den Fall Taylorscher Reihen — wenn λ_n ganze Zahlen sind — sich ein insofern analoger Satz findet, als in ihm unter der Annahme $\overline{\lim} \frac{\nu}{\lambda_{n_\nu}} \leqq \vartheta$ und einer weiteren Bedingung, die darauf hinausläuft, daß die Zeichenwechsel in einem gewissen Maße regelmäßig verteilt sind, behauptet wird, daß die Strecke auf der Konvergenzgeraden $-\vartheta\pi \leqq \mathfrak{J}(s) \leqq \vartheta\pi$ eine Singularität enthält. —

Hr. Cramér führt den Beweis seines Satzes mit Hilfe der in D_k^* gültigen Formel

$$f_\phi(s) = \sum \frac{(-1)^\nu}{\nu!} f^{(\nu)}(s),$$

die er auf einem etwas umständlichen Wege gewinnt. Man kann nun sowohl den Cramérschen Satz, als auch diese Formel aus der folgenden sehr leicht beweisbaren Integralformel herleiten.

Aus der Annahme über das Anwachsen von $\phi(z)$ folgt nämlich bekanntlich leicht $\overline{\lim} \sqrt[n]{|c_n|} \leqq k$, so daß die Potenzreihe

$$\phi^*(z) = \frac{c_0}{z} - \frac{c_1}{z^2} + \frac{c_2}{z^3} - \cdots$$

für $|z| > k$ regulär ist[2]. Man bilde nunmehr das Integral

$$\frac{1}{2\pi i} \int f(s+u)\, \phi^*(u)\, du,$$

in dem s in D_k^* liegt und längs des Kreises $|u| \leqq k + \varepsilon$ zu integrieren ist, für ein so kleines $\varepsilon > 0$, daß $s + u$ in D liegt. Um diese in D_k^* reguläre Funktion in D_k^* darzustellen, benutze man die Reihenentwicklung von $\phi^*(s)$ und integriere gliedweise. Dann folgt aus dem Cauchyschen Satz

$$\frac{1}{2\pi i} \int f(s+u)\, \phi^*(u)\, du = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu c_\nu}{\nu!} f^{(\nu)}(s).$$

[1] Fabry, Acta Math., XXII (1899), p. 77.

[2] Der Zusammenhang zwischen den Potenzreihen $\phi(z)$ und $\phi^*\left(\frac{1}{z}\right)$ tritt in den Untersuchungen von Borel über analytische Fortsetzung mit Hilfe seiner Summationsmethode auf. Vgl. E. Borel, Leçons sur les séries divergentes, p. 108.

Benutzt man aber für $\Re(s) > k$ die Entwicklung von $f(s)$ und integriert gliedweise, so folgt sofort

$$\frac{1}{2\pi i}\int f(s+u)\,\phi^*(u)\,du = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \phi(\lambda_n) e^{-\lambda_n s} = f_\phi(s).$$

Diese Integralformel bringt besonders prägnant zum Ausdruck, daß es sich beim Übergang von $f(s)$ zu $f_\phi(s)$ um einen in $D^*_{k+\varepsilon}$ additiven auf $f(s)$ ausgeübten Prozeß handelt, der beschränkte bzw. konvergente Funktionenfolgen wiederum in solche überführt. Sie leistet daher bei vielen Problemen sehr gute Dienste. Insbesondere folgt aus ihr, daß, wenn $f(s)$ eine Dirichletsche Reihe mit überkonvergenten Abschnittsfolgen ist, auch $f_\phi(s)$ für $k = 0$ oder auch nur für hinreichend kleines k dieselbe Eigenschaft beibehält. Man kann daher auch beim Studium der Erscheinung der Überkonvergenz diese Formel mit Vorteil benutzen, worauf ich in einem anderen Zusammenhang zurückkommen werde.

Hamburg, Mathematisches Seminar der Universität, Oktober 1922.

Über die Existenz unendlich vieler singulärer Punkte auf der Konvergenzgeraden gewisser Dirichletscher Reihen.

Von Prof. Dr. Georg Pólya
in Zürich.

(Vorgelegt von Hrn. Schur am 11. Januar 1923 [s. oben S. 1].)

§ 1. Es sei mir gestattet, im Anschluß an die vorstehende Mitteilung des Hrn. A. Ostrowski[1] den folgenden Satz nebst Beweisskizze mitzuteilen:

I. Es sei

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n < \cdots, \quad \lim_{n=\infty} \lambda_n = \infty, \tag{1}$$

$$\varliminf_{n=\infty} (\lambda_{n+1} - \lambda_n) = p > 0. \tag{2}$$

Die »Maximaldichte« der Folge $\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_n, \cdots$ werde mit D bezeichnet. Dann enthält jede auf der Konvergenzgeraden der Dirichletschen Reihe

$$c_1 e^{-\lambda_1 s} + c_2 e^{-\lambda_2 s} + \cdots + c_n e^{-\lambda_n s} + \cdots = \Phi(s) \tag{3}$$

gelegene abgeschlossene Strecke von der Länge $2\pi D$ mindestens einen singulären Punkt der Reihe (3).

Die Maximaldichte ist eine der Folge $\lambda_1, \lambda_2, \cdots$ eindeutig zugeordnete Zahl, deren genaue Definition unten folgt. Hier seien folgende Eigenschaften von D erwähnt: a) Wenn $\lim_{n=\infty} n\lambda_n^{-1}$ existiert, so ist $D = \lim_{n=\infty} n\lambda_n^{-1}$. b) Auf alle Fälle ist $D \geqq \varlimsup_{n=\infty} n\lambda_n^{-1}$. c) Es ist $pD \leqq 1$. — Gemäß c) besagt Satz I, daß jede Dirichletsche Reihe von der Eigenschaft (2) unendlich viele singuläre Punkte auf der Konvergenzgeraden besitzt. Dies war nur im Falle der Potenzreihen (λ_n ganzzahlig) bekannt. Gemäß b) folgt aus $D = 0$, daß $\lim_{n=\infty} n\lambda_n^{-1} = 0$ ist; der dem Werte $D = 0$ entsprechende Spezialfall des Satzes I war durch die HH. Carlson, Landau und Szász bekannt geworden[2]. Was Satz I über Potenzreihen aussagt, war dank Hrn. Fabry[3] im wesentlichen bekannt. Mit dem Satz I der vorstehenden Mitteilung von Hrn. A. Ostrowski[1] kreuzt sich inhaltlich mein Satz im Spezialfall des geläufigen Fabryschen Lücken-

[1] A. Ostrowski, diese Sitzungsber. 22 (1923), S. 39.
[2] F. Carlson und E. Landau, Götting. Nachr. (1921). O. Szász, Math. Ann. 85 (1922), S. 99—110.
[3] E. Fabry, Acta Math. 22 (1898), S. 65—87.

satzes (λ_n ganzzahlig, $D = 0$), aber keiner der beiden Sätze enthält den anderen. Es gibt Fälle, wo der Satz von Hrn. Ostrowski singuläre Stellen aufdeckt, die mein Satz nicht liefert, z. B. wenn λ_n ganzzahlig, $D = 1$ und $\overline{\lim\limits_{n=\infty}}\, n\lambda_n^{-1}$ sehr klein ist[1]. Wenn beide anwendbar sind, so enthüllt mein Satz singuläre Punkte nicht nur in der Nähe, sondern auf der Konvergenzgeraden und gibt eine genaue, häufig erreichte Schranke.

Um Satz I zu erhalten, muß man den vorstehenden Überlegungen des Hrn. Ostrowski zweierlei hinzufügen: Erstens eine graphische Darstellung der Wachstumsverhältnisse in der Nähe gewisser singulärer Stellen, vgl. § 2; dieses Hilfsmittel dürfte ein über das hier behandelte Problem hinausgehendes Interesse beanspruchen. Zweitens muß diejenige Eigenschaft der Exponentenfolge $\lambda_1, \lambda_2, \cdots$ ermittelt werden, die für die Singularitäten am Konvergenzrand charakteristisch ist; diese Eigenschaft wird durch die Maximaldichte D ausgedrückt, vgl. § 3. Beide Punkte waren mir aus Beschäftigung mit ähnlichen Fragestellungen bereits wohlbekannt[2], bevor ich die vorstehende Mitteilung des Hrn. Ostrowski kennen lernte; zum Satz I bin ich erst hiernach gelangt.

Ich führe den Beweis stufenweise, muß mich jedoch leider auf eine Aufzählung der einzelnen Stufen beschränken. Es ist aber der Schritt von jeder Stufe zur nächstfolgenden an der Hand der Andeutungen und Literaturnachweise leicht auszuführen.

§ 2. Eine ganze Funktion $F(z)$, die in der ganzen z-Ebene einer Ungleichung von der Form

$$|F(z)| < Ae^{a|z|} \qquad (A,\ a \text{ Konstanten})$$

genügt, soll eine Funktion vom Exponentialtypus heißen. Man setze, mit den HH. Phragmén und Lindelöf[3]

$$\overline{\lim_{r=+\infty}}\, r^{-1} \lg |F(re^{i\phi})| = h(\phi).$$

Die reelle Funktion $h(\phi)$ besitzt die Periode 2π. Es soll $h(\phi)$ der Indikator von $F(z)$ heißen.

II. Der Indikator einer ganzen Funktion vom Exponentialtypus ist die Stützfunktion eines ganz im Endlichen gelegenen konvexen Bereiches J.

$h(\phi)$ ist bekanntlich[3] beschränkt, stetig und genügt der Ungleichung

$$(4) \qquad h(\phi_1)\sin(\phi_3 - \phi_2) + h(\phi_2)\sin(\phi_1 - \phi_3) + h(\phi_3)\sin(\phi_2 - \phi_1) \geqq 0,$$

wenn die Werte ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 so angeordnet sind, daß

$$\phi_1 < \phi_2 < \phi_3, \quad \phi_2 - \phi_1 < \pi, \quad \phi_3 - \phi_2 < \pi.$$

Die Ungleichung (4) nebst der Periodizität $h(\phi + 2\pi) = h(\phi)$, ist für die Stützfunktion eines ganz im Endlichen gelegenen konvexen Bereiches charakte-

[1] G. Faber, Sitzungsber. München **36** (1906), S. 581—583.

[2] Vgl. das Protokoll der Versammlung in Leipzig, Sept. 1922 in Jahresb. d. deutsch. Math.-Ver. (im Erscheinen).

[3] E. Phragmén und E. Lindelöf, Acta Math. **31** (1908) S. 381—406.

ristisch[1]. — Es ist also jeder ganzen Funktion $F(z)$ ein konvexer Bereich J der Ebene, umhüllt von den Geraden $x\cos\phi + y\sin\phi - h(\phi) = 0$, zugeordnet. J heißt das Indikatordiagramm von $F(z)$. Das Spiegelbild $\bar{J}$ von J in bezug auf die reelle Achse heißt das gespiegelte Indikatordiagramm.

III. Wenn die Potenzreihe

$$a_0 + \frac{a_1 z}{1!} + \frac{a_2 z^2}{2!} + \cdots + \frac{a_n z^n}{n!} + \cdots = F(z) \tag{5}$$

eine ganze Funktion $F(z)$ vom Exponentialtypus darstellt, so ist die Potenzreihe

$$a_0 s^{-1} + a_1 s^{-2} + a_2 s^{-3} + \cdots + a_n s^{-n-1} + \cdots = f(s) \tag{6}$$

für große Werte von s konvergent, und die Funktion $f(s)$ außerhalb des gespiegelten Indikatordiagramms $\bar{J}$ von $F(z)$ regulär, hingegen in jedem Randpunkt von $\bar{J}$, der nicht zum Innern eines geradlinigen Begrenzungsstückes gehört, singulär.

Satz III ist im wesentlichen nur eine andere Fassung der wohlbekannten Borelschen Beziehungen[2] zwischen dem Summationspolygon der exponentiellen Summation und den Singularitäten der summierten Potenzreihe. Man kann Satz III auch direkt beweisen aus den zueinander reziproken Integralformeln

$$f(s) = \int_0^\infty F(z)e^{-sz}dz, \tag{7}$$

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint f(s)e^{zs}ds. \tag{8}$$

Die Integrationslinie ist in (7) ein Halbstrahl, etwa die positive reelle Achse, und in (8) ein den Konvergenzkreis von (6) einschließender, mit ihm konzentrischer Kreis. Wenn man den Integrationshalbstrahl in (7) um $z = 0$ herumrotieren läßt, kann man $f(s)$ in den Außenraum von $\bar{J}$ fortsetzen, durch Zusammenziehen des Integrationsweges in (8) kann man $F(z)$ günstig abschätzen, so daß Satz III hervorgeht.

IV. Es sei die Dirichletsche Reihe

$$\Phi(s) = c_1 e^{-\lambda_1 s} + c_2 e^{-\lambda_2 s} + \cdots + c_n e^{-\lambda_n s} + \cdots \tag{9}$$

in einer gewissen Halbebene konvergent und $F(z)$ eine ganze Funktion vom Exponentialtypus. Dann ist die Reihe

$$\Psi(s) = c_1 F(\lambda_1) e^{-\lambda_1 s} + c_2 F(\lambda_2) e^{-\lambda_2 s} + \cdots + c_n F(\lambda_n) e^{-\lambda_n s} + \cdots \tag{10}$$

in einer gewissen Halbebene konvergent; wird der Bereich $s - \bar{J}$ von $s = +\infty$ aus kommend so bewegt, daß er an keine singuläre Punkte von (9) anstößt, so ist (10) entlang des von s beschriebenen Weges fortsetzbar.

Unter $s - \bar{J}$ verstehe ich den Bereich zu dem, wenn w einen generellen Punkt von $\bar{J}$ bezeichnet, die Punkte $s - w$ gehören. Satz IV ist eine Ver-

[1] W. Blaschke, Jahresber. d. D. Math.-Ver. **23** (1914) S. 210—234, insb. S. 222; H. Rademacher, Math. Zschr. **13** (1922) S. 18—27.

[2] E. Borel, Séries divergentes (Paris 1901) Chap. IV.

feinerung eines Satzes des Hrn. Cramér[1]. IV geht aus der von Hrn. Ostrowski[2] zum Beweis des Cramérschen Satzes benutzten Integralformel

$$\Psi(s) = \frac{1}{2\pi i} \oint f(u)\, \Phi(s-u)\, du \tag{11}$$

(hier Bezeichnung anders!) und aus Satz III hervor; (11) folgt aus (8) und (10).

V. Ist (9) eine meromorphe Funktion mit lauter einfachen Polen $s_1, s_2, s_3, \cdots$ und haben die abgeschlossenen konvexen Bereiche $s_1 + \bar{J}, s_2 + \bar{J}, s_3 + \bar{J}, \cdots$ keinen Punkt gemeinsam, so ist (10) im mehrfach zusammenhängenden Außenraum dieser Bereiche eindeutig und regulär, hingegen in den Randpunkten dieser Bereiche, abgesehen eventuell von Innenpunkten geradliniger Begrenzungsstücke, singulär.

Man leitet V ab, indem man die Integrationslinie von (11) über die Pole von $\Phi(s-u)$ hinwegzieht und die Residuen berücksichtigt. Ich beschreibe dies nicht genauer, denn ich gebrauche V nachher nicht. Der Spezialfall $\Phi(s) = (1-e^{-s})^{-1}$ ist nach wichtigen Vorarbeiten vieler Forscher von Hrn. Carlson[3] am genauesten untersucht worden.

§ 3. Es sei

$$r_1, r_2, r_3, \cdots r_n, \cdots \tag{12}$$

eine monoton ins Unendliche wachsende Folge positiver Zahlen. Man bezeichne mit $N(r)$ die Anzahl derjenigen Glieder der Folge (12), die $\leq r$ sind. $N(r)$ heißt die Anzahlfunktion der Folge (12). Wenn der Grenzwert

$$\lim_{r=\infty} N(r) \cdot r^{-1} = \lim_{n=\infty} n r_n^{-1} \tag{13}$$

existiert, so soll die Folge (12) glatt und der Wert (13) die Dichte der Folge (12) heißen. Im allgemeinen ist eine Folge nicht glatt.

Es sei α fest gegeben, $0 < \alpha \leq 2$. Man betrachte sämtliche Paare von nichtnegativen Zahlen n, n' die der Ungleichung

$$n' - n \geq \alpha \frac{1}{2}(n + n') > 0 \tag{14}$$

genügen. Man bilde mit sämtlichen durch (14) zugelassenen Zahlenpaaren n, n' den Quotienten

$$\frac{N(n') - N(n)}{n' - n}. \tag{15}$$

Die Zahlen (15) bilden eine abzählbar unendliche Menge, deren kleinster Häufungspunkt mit $d(\alpha)$ und größter Häufungspunkt mit $D(\alpha)$ bezeichnet werden soll. Es ist z. B. $d(2) = \underline{\lim}_{n=\infty} n r_n^{-1}$, $D(2) = \overline{\lim}_{n=\infty} n r_n^{-1}$. Es ist offen-

[1] H. Cramér, Arkiv för mat. astr. och fys. **13** (1918) Nr. 22.

[2] A. Ostrowski, diese Sitzungsber. 22 (1923) S. 39.

[3] F. Carlson, Sur une classe de séries de Taylor, Diss. Upsala (1914) und Math. Zschr. **11** (1921) S. 1—23, insb. § 2.

bar $d(\alpha') \leq d(\alpha)$, $D(\alpha') \geqq D(\alpha)$, wenn $\alpha' < \alpha$. Daher existieren die Grenzwerte

$$\lim_{\alpha=0} d(\alpha) = d, \qquad \lim_{\alpha=0} D(\alpha) = D.$$

Es soll d die Minimaldichte, D die Maximaldichte der Folge (12) heißen.

Ist eine Folge glatt, so haben ihre Dichte, ihre Maximaldichte und ihre Minimaldichte denselben Wert. Daß $\underline{\lim}\, nr_n^{-1} = \overline{\lim}\, nr_n^{-1} = \lim nr_n^{-1}$ ist, falls letzterer Grenzwert überhaupt existiert, ist trivial. D. h. es ist für $\alpha = 2$ bekannt, daß $d(\alpha) = D(\alpha) =$ Dichte, falls die Dichte überhaupt existiert; nun ist dies für $0 < \alpha < 2$ zu beweisen. — Wenn man von einer Folge zu einer Teilfolge übergeht, so können die Werte $d(\alpha)$, $D(\alpha)$ nur abnehmen, insofern sie sich überhaupt ändern. Es gilt insbesondere: Die Dichte jeder glatten Folge, die in (12) als Teilfolge enthalten ist, ist $\leq d$. Die Dichte jeder glatten Folge, die (12) als Teilfolge enthält, ist $\geqq D$. Endlich erhält man durch passende Auswahl auf die übliche Art: Es existieren in (12) enthaltene glatte Folgen, deren Dichte $= d$, und (12) enthaltende glatte Folgen, deren Dichte $= D$ ist. Die Auswahl läßt ziemlich viel Willkür zu und ergibt auch folgenden Satz, den ich eigentlich brauche: Es sei vorgelegt die Folge $\lambda_1, \lambda_2, \cdots$ von den Eigenschaften (1), (2) und der Maximaldichte D. Die Intervalle λ_n, λ_{n+1} $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ seien in Intervalle erster und zweiter Art eingeteilt. Es existiert eine glatte Folge $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \cdots$ von folgenden Eigenschaften: a) Es ist $\rho_1 > \lambda_1$. Jedes Intervall λ_n, λ_{n+1} erster Art enthält eine ungerade Anzahl, jedes Intervall zweiter Art eine gerade Anzahl Glieder der Folge $\rho_1, \rho_2, \cdots$. b) Es existiert eine Zahl l, $l > 0$ derart, daß $\rho_{m+1} > \rho_m + l$, $|\rho_m - \lambda_n| \geqq l$ für $m, n = 1, 2, 3, \cdots$. c) Die Folge $\rho_1, \rho_2, \cdots$ ist glatt, und ihre Dichte ist $= D$.

Es sei noch bemerkt, daß für eine glatte Folge $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \cdots$ von positiver endlicher Dichte und der Anzahlfunktion $\mathrm{N}(r)$ die Formel

$$(16) \qquad \lim_{r=\infty} \frac{1}{\mathrm{N}(r)} \sum_{m=1}^{\infty} \psi\left(\frac{\rho_m}{r}\right) = \int_0^{\infty} \psi(x)\,dx$$

gilt, unter Bedingungen, die die Natur der Funktion $\psi(x)$ nur wenig einschränken[1].

§ 4. Es sei s_0 ein Punkt der Konvergenzgeraden der Reihe (3), $c_n e^{-\lambda_n s_0} = a_n' + i a_n''$, a_n', a_n'' reell. Es ist

$$(17) \qquad \Phi(s + s_0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n' e^{-\lambda_n s} + i \sum_{n=1}^{\infty} a_n'' e^{-\lambda_n s}.$$

Von den beiden Reihen rechts in (17) hat eine sicher die imaginäre Achse zur Konvergenzgeraden, sagen wir die erste. Das Intervall λ_n, λ_{n+1} soll von erster oder zweiter Art heißen, je nachdem a_n' und a_{n+1}' verschiedene oder gleiche Vorzeichen haben. Verschwindende a_n' sollen konventionell als positiv

[1] G. Pólya, Götting. Nachr. (1917) S. 149—159.

betrachtet werden. Man bilde mit der in § 3 erwähnten Folge $\rho_1, \rho_2, \cdots$ die ganze Funktion

$$F(z) = \prod_{m=1}^{\infty} (1 - z^2 \rho_m^{-2}). \tag{18}$$

Es ist für $\phi \not\equiv 0$, $\phi \not\equiv \pi$

$$\lim_{r=\infty} \frac{\lg |F(re^{i\phi})|}{r} = \lim_{r=\infty} \frac{N(r)}{r} \cdot \frac{1}{N(r)} \sum_{m=1}^{\infty} \lg \left| 1 - \left(\frac{r}{\rho_m}\right)^2 e^{2i\phi} \right| \tag{19}$$

$$= D \cdot \int_0^{\infty} \lg |1 - x^{-2} e^{2i\phi}| dx = D \cdot \pi |\sin \phi|,$$

gemäß (16), kraft der Eigenschaft c) der Folge $\rho_1, \rho_2, \cdots$. D. h. das Indikatordiagramm von (18) ist die gerade Verbindungsstrecke von $-i\pi D$ und $+i\pi D$. Es ist

$$\lambda_n^{-1} \lg |F(\lambda_n)| = \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_n^{-1} \lg |1 - \lambda_n^2 \rho_m^{-2}| = \Sigma' + \Sigma''.$$

Σ' umfaßt die Glieder, für welche $|\rho_m - \lambda_n| < \lambda_n \eta$, Σ'' die übrigen, $0 < \eta < 0{,}1$. Es ist wegen der Eigenschaft b) der Folge $\rho_1, \rho_2, \cdots$ (ich schreibe λ für λ_n)

$$\sum{}' \geqq \frac{1}{\lambda} \sum_{\mu=1}^{\lambda\eta l^{-1}} \left\{ \lg \left(\left(\frac{\lambda}{\lambda - \mu l}\right)^2 - 1 \right) + \lg \left(1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda + \mu l}\right)^2 \right) \right\}$$

$$\sim \frac{1}{l} \int_0^{\eta} \left\{ \lg \left(\left(\frac{1}{1 - x}\right)^2 - 1 \right) + \lg \left(1 - \left(\frac{1}{1 + x}\right)^2 \right) \right\} \cdot dx$$

$$\sum{}'' = \frac{N(\lambda)}{\lambda} \cdot \frac{1}{N(\lambda)} \sum_{|\rho_m - \lambda| \geqq \lambda\eta} \lg |1 - \lambda^2 \rho_m^{-2}| \sim D \left(\int_0^{1-\eta} + \int_{1+\eta}^{\infty} \right) \lg |1 - x^{-2}| dx$$

für unendlich wachsendes λ; es wurde wieder (16) und Eigenschaft c) herangezogen. Da η beliebig klein gewählt werden kann, folgt

$$\underline{\lim}_{n=\infty} \lambda_n^{-1} \lg |F(\lambda_n)| \geqq D \int_0^{\infty} \lg |1 - x^{-2}| dx = 0.$$

Wegen (19) und der Stetigkeit des Indikators ist $\overline{\lim}_{\lambda=\infty} \lambda^{-1} \lg |F(\lambda)| = 0$, daher

$$\lim_{n=\infty} \lambda_n^{-1} \lg |F(\lambda_n)| = 0. \tag{20}$$

Die Reihe

$$a_1' F(\lambda_1) e^{-\lambda_1 s} + a_2' F(\lambda_2) e^{-\lambda_2 s} + \cdots + a_n' F(\lambda_n) e^{-\lambda_n s} + \cdots \tag{21}$$

hat wegen (20) die imaginäre Achse zur Konvergenzgeraden. Alle Koeffizienten der Reihe (21) haben gleiches Vorzeichen, kraft der Eigenschaft a) der Folge $\rho_1, \rho_2, \cdots$, und daher hat (21) den Punkt $s = 0$ zum singulären Punkt. Das ist aber gemäß IV nur so möglich, daß $\sum a_n' e^{-\lambda_n s}$ einen Punkt des Indikatordiagramms von (18), d. h. einen Punkt der Strecke $-i\pi D$, $+i\pi D$ zum singulären Punkt hat, womit Satz I bewiesen ist.

Ausgegeben am 12. März.

SITZUNGSBERICHTE
DER PREUSSISCHEN
AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.
1923

VI. Gesamtsitzung. 22. Februar.

Vorsitzender Sekretar: Hr. Roethe.

*1. Hr. von Harnack las über das Antithesenwerk des Stephanus Gobarus (Photius, Cod. 232).

Das ohne Titel überlieferte und bisher vernachlässigte Werk eines sonst unbekannten Aristotelikers, Monophysiten und Tritheisten aus dem Kreise des Johannes Philoponus, wahrscheinlich in der Zeit des Kaisers Justins II. entstanden, unternimmt es durch Gegenüberstellung sich widersprechender Sätze der angesehensten Kirchenväter die Autorität der kirchlichen Tradition auf den verschiedensten Gebieten zu erschüttern — im Interesse des vernünftigen aristotelischen Denkens und der tritheistischen Fassung der Gotteslehre. Von Wirkungen des Werks in der morgenländischen Kirche fehlt jede Spur; aber das 550 Jahre später entstandene Werk Abälards »Sic et Non« ist nach seinen Voraussetzungen, seinem Zweck sowie nach seiner Anlage und Durchführung eine vollkommene Parallele zu dem Unternehmen des Stephanus Gobarus. Daß es gänzlich unabhängig von ihm ist, ist eine erstaunliche Tatsache, die nur durch die Erwägung begreiflicher wird, daß die Situation und die Stufe der theologischen Wissenschaft im Abendland im Anfang des 12. Jahrhunderts dem Stande der morgenländischen Wissenschaft in der Mitte des 6. Jahrhunderts sehr ähnlich waren.

2. Das korrespondierende Mitglied Hr. Hugo Hildebrand Hildebrandsson in Uppsala übersandte einen Abdruck seiner Schrift »Sur les variétés des Cirrus« (1922).

3. Vorgelegt wurden Gustav Schmoller, »Grundriß der allgemeinen Volkswirtschaftslehre«, 2 Bde. (München 1919) und Gustav Schmoller, »Deutsches Städtewesen in älterer Zeit« (Bonn und Leipzig 1922).

Die Akademie hat das auswärtige Mitglied ihrer physikalisch-mathematischen Klasse Hrn. Wilhelm Conrad Röntgen in München am 10. Februar durch den Tod verloren.

Ausgegeben am 12. März.

SITZUNGSBERICHTE
DER PREUSSISCHEN
AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.
1923

VII. Sitzung der physikalisch-mathematischen Klasse. 1. März.

Vorsitzender Sekretar: Hr. Rubner.

1. Hr. Schur sprach über den Zusammenhang zwischen einem Problem der Zahlentheorie und einem Satz über algebraische Funktionen. (Ersch. später.)

Ist $f(x)$ ein Polynom vom Primzahlgrad $n > 3$, und ist die Anzahl der linear unabhängigen unter den n Zweigen der Umkehrungsfunktion von $f(x)$ kleiner als $n - 1$, so läßt sich $f(x)$ durch eine lineare Transformation von x in die Potenz x^n oder in das Tschebyscheffsche Polynom $T_n(x)$ überführen. Mit Hilfe dieses Satzes wird bewiesen, daß ein ganzzahliges Polynom vom Primzahlgrad $n > 3$, das für unendlich viele Primzahlen p Permutationen mod. p liefert, entweder die n-te Potenz einer linearen Funktion sein oder zu den von L. E. Dickson angegebenen Polynomen gehören muß.

2. Hr. Schmidt legte eine Arbeit von Hrn. Dr. Alexander Ostrowski in Hamburg vor: Über Potenzreihen, die überkonvergente Abschnittsfolgen besitzen. (Ersch. später.)

Besitzt $f(z) = \sum a_n z^n$ eine Abschnittsfolge $s_{n_\varkappa}(z)$, die in einer Umgebung eines regulären Punktes des Konvergenzkreises gleichmäßig konvergiert, so ist $f(z)$ Summe von zwei Potenzreihen, von denen die erste einen größeren Konvergenzradius hat, die zweite aber solche Lücken $n_\nu \cdots n_\nu + 1$, für die $\frac{n_\nu + 1}{n_\nu} > 1 + \vartheta$ mit einem festen $\vartheta > 0$ ist, und in die die Indizes $n_\varkappa$ hineinfallen.

Ausgegeben am 12. März.

Berlin, gedruckt in der Reichsdruckerei.

1923 VIII. IX. X. XI

SITZUNGSBERICHTE

DER PREUSSISCHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

Physikalisch-mathematische Klasse

BERLIN 1923
VERLAG DER AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
IN KOMMISSION BEI WALTER DE GRUYTER U. CO.

Aus dem Reglement für die Redaktion der akademischen Druckschriften

Aus § 1.

Die Akademie gibt gemäß § 41, 1 der Statuten zwei fortlaufende Veröffentlichungen heraus: »Sitzungsberichte der Preußischen Akademie der Wissenschaften« und »Abhandlungen der Preußischen Akademie der Wissenschaften«.

Aus § 2.

Jede zur Aufnahme in die Sitzungsberichte oder die Abhandlungen bestimmte Mitteilung muß in einer akademischen Sitzung vorgelegt werden, wobei in der Regel das druckfertige Manuskript zugleich einzuliefern ist. Nichtmitglieder haben hierzu die Vermittelung eines ihrem Fache angehörenden ordentlichen Mitgliedes zu benutzen.

§ 3.

Der Umfang einer aufzunehmenden Mitteilung soll in der Regel in den Sitzungsberichten bei Mitgliedern 32, bei Nichtmitgliedern 8 Seiten in der gewöhnlichen Schrift der Sitzungsberichte, in den Abhandlungen 12 Druckbogen von je 8 Seiten in der gewöhnlichen Schrift der Abhandlungen nicht übersteigen.

Überschreitung dieser Grenzen ist nur mit Zustimmung der Gesamtakademie oder der betreffenden Klasse statthaft und ist bei Vorlage der Mitteilung ausdrücklich zu beantragen. Läßt der Umfang eines Manuskripts vermuten, daß diese Zustimmung erforderlich sein werde, so hat das vorlegende Mitglied es vor dem Einreichen von sachkundiger Seite auf seinen mutmaßlichen Umfang im Druck abschätzen zu lassen.

§ 4.

Sollen einer Mitteilung Abbildungen im Text oder auf besonderen Tafeln beigegeben werden, so sind die Vorlagen dafür (Zeichnungen, photographische Originalaufnahmen usw.) gleichzeitig mit dem Manuskript, jedoch auf getrennten Blättern, einzureichen.

Die Kosten der Herstellung der Vorlagen haben in der Regel die Verfasser zu tragen. Sind diese Kosten aber auf einen erheblichen Betrag zu veranschlagen, so kann die Akademie dazu eine Bewilligung beschließen. Ein darauf gerichteter Antrag ist vor der Herstellung der betreffenden Vorlagen mit dem schriftlichen Kostenanschlage eines Sachverständigen an den vorsitzenden Sekretar zu richten, dann zunächst im Sekretariat vorzuberaten und weiter in der Gesamtakademie zu verhandeln.

Die Kosten der Vervielfältigung übernimmt die Akademie. Über die voraussichtliche Höhe dieser Kosten ist — wenn es sich nicht um wenige einfache Textfiguren handelt — der Kostenanschlag eines Sachverständigen beizufügen. Überschreitet dieser Anschlag für die erforderliche Auflage 5000 Mark, so ist Vorberatung durch das Sekretariat geboten.

Aus § 5.

Nach der Vorlegung und Einreichung des **vollständigen druckfertigen** Manuskripts an den zuständigen Sekretar oder an den Archivar wird über Aufnahme der Mitteilung in die akademischen Schriften, und zwar, wenn eines der anwesenden Mitglieder es verlangt, verdeckt abgestimmt.

Mitteilungen von Verfassern, welche nicht Mitglieder der Akademie sind, sollen der Regel nach nur in die Sitzungsberichte aufgenommen werden. Beschließt eine Klasse die Aufnahme der Mitteilung eines Nichtmitgliedes in die Abhandlungen, so bedarf dieser Beschluß der Bestätigung durch die Gesamtakademie.

Aus § 6.

Die an die Druckerei abzuliefernden Manuskripte müssen, wenn es sich nicht bloß um glatten Text handelt, ausreichende Anweisungen für die Anordnung des Satzes und die Wahl der Schriften enthalten. Bei Einsendungen Fremder sind diese Anweisungen von dem vorlegenden Mitgliede vor Einreichung des Manuskripts vorzunehmen. Dasselbe hat sich zu vergewissern, daß der Verfasser seine Mitteilung als vollkommen druckreif ansieht.

Die erste Korrektur ihrer Mitteilungen besorgen die Verfasser. Fremde haben diese erste Korrektur an das vorlegende Mitglied einzusenden. Die Korrektur soll nach Möglichkeit nicht über die Berichtigung von Druckfehlern und leichten Schreibversehen hinausgehen. Umfängliche Korrekturen Fremder bedürfen der Genehmigung des redigierenden Sekretars vor der Einsendung an die Druckerei, und die Verfasser sind zur Tragung der entstehenden Mehrkosten verpflichtet. Übersteigen die Kosten der Korrektur einen gewissen Prozentsatz der Satzkosten, so fallen die Mehrkosten den Verfassern selbst ganz oder teilweise zur Last.

Aus § 8.

Von allen in die Sitzungsberichte oder Abhandlungen aufgenommenen wissenschaftlichen Mitteilungen, Reden, Adressen oder Berichten werden für die Verfasser, von wissenschaftlichen Mitteilungen, wenn deren Umfang im Druck 4 Seiten übersteigt, auch für den Buchhandel Sonderabdrucke hergestellt, die alsbald nach Erscheinen ausgegeben werden.

Von Gedächtnisreden werden ebenfalls Sonderabdrucke für den Buchhandel hergestellt, indes nur dann, wenn die Verfasser sich ausdrücklich damit einverstanden erklären.

§ 9.

Von den Sonderabdrucken aus den Sitzungsberichten erhält ein Verfasser, welcher Mitglied der Akademie ist, zu unentgeltlicher Verteilung ohne weiteres 50 Freiexemplare; er ist indes berechtigt, zu gleichem Zwecke auf Kosten der Akademie weitere Exemplare bis zur Zahl von noch 100 und auf seine Kosten noch weitere bis zur Zahl von 200 (im ganzen also 350) abziehen zu lassen, sofern er dies rechtzeitig dem redigierenden Sekretar angezeigt hat; wünscht er auf seine Kosten noch mehr Abdrucke zur Verteilung zu erhalten, so bedarf es dazu der Genehmigung der Gesamtakademie oder der betreffenden Klasse. — Nichtmitglieder erhalten 50 Freiexemplare und dürfen nach rechtzeitiger Anzeige bei dem redigierenden Sekretar weitere 200 Exemplare auf ihre Kosten abziehen lassen.

Von den Sonderabdrucken aus den Abhandlungen erhält ein Verfasser, welcher Mitglied der Akademie ist, zu unentgeltlicher Verteilung ohne weiteres 30 Freiexemplare; er ist indes berechtigt, zu gleichem Zwecke auf Kosten der Akademie weitere Exemplare bis zur Zahl von noch 100 und auf seine Kosten noch weitere bis zur Zahl von 100 (im ganzen also 230) abziehen zu lassen, sofern er dies rechtzeitig dem redigierenden Sekretar angezeigt hat; wünscht er auf seine Kosten noch mehr Abdrucke zur Verteilung zu erhalten, so bedarf es dazu der Genehmigung der Gesamtakademie oder der betreffenden Klasse. — Nichtmitglieder erhalten 30 Freiexemplare und dürfen nach rechtzeitiger Anzeige bei dem redigierenden Sekretar weitere 100 Exemplare auf ihre Kosten abziehen lassen.

(Fortsetzung auf S. 3 des Umschlags.)

SITZUNGSBERICHTE
DER PREUSSISCHEN
AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.
1923

VIII. Gesamtsitzung. 8. März.

Vorsitzender Sekretar: Hr. Roethe.

*1. Hr. Haber sprach über die Hydratation des Malachitgrüns in Säuren und sauren Salzlösungen.

Die Annahme, daß die verhältnismäßige Änderung der Aktivität des Wassers bei Änderung der Salz- oder Säurekonzentration eine Konstante ist, die von der Natur des Salzes und der Säure abhängt, führt zu einer quantitativen Darstellung der Beobachtungen und liefert Zahlenwerte für die lyotrope Folge Salzsäure, Lithiumchlorid, Natriumchlorid, Kaliumchlorid usw. und ebenso für die Folge der Anionen, die mit anderweitigen qualitativen Kenntnissen gut stimmen.

2. Das korrespondierende Mitglied Hr. A. G. Högbom in Uppsala übersandte seine Schriften: »Nivåförändringarna in norden« (Göteborg 1920) und »Hjalmar Sjögren, Life and work« (Uppsala 1922), sowie die Sonderabdrucke »Epeirogenetische Bewegungen (Niveauveränderungen)« und »Om -Sta-bygder och -Inge-gårdar, ett bebyggelse historiskt spörsmål« (1921).

Die Akademie hat durch ihre physikalisch-mathematische Klasse dem Hrn. Dr. Georg Struve in Neubabelsberg 3000 Mark bewilligt zur Fortführung seiner Beobachtungen der Saturntrabanten.

Ausgegeben am 17. April.

SITZUNGSBERICHTE

DER PREUSSISCHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

1923

IX. Sitzung der physikalisch-mathematischen Klasse. 15. März.

Vorsitzender Sekretar: Hr. Rubner.

1. Hr. Ludendorff sprach über seine Untersuchungen über veränderliche Sterne. (Ersch. später.)

Es wird zunächst die Klassifizierung der veränderlichen Sterne besprochen. Alsdann wird erörtert, inwiefern sich die den Spektralklassen N, K, Ma, Mb, Mc angehörigen Mira-Sterne in ihrem Lichtwechsel von den typischen Mira-Sternen (Spektralklasse Md) unterscheiden. Ferner werden die Mira-Sterne der Spektralklasse Md einer statistischen Untersuchung unterworfen, und es wird besonders die Abhängigkeit der Periodenlänge dieser Sterne von ihren spektralen Eigentümlichkeiten diskutiert. Zum Schluß wird auf eine merkwürdige Ähnlichkeit zwischen den Mira-Sternen sehr langer Periode und den δ Cephei-Sternen sehr langer Periode hingewiesen.

2. Hr. Zimmermann legte eine Arbeit vor über »Die Größen s und t der Knicktheorie«.

Darin werden diese Größen näher untersucht und werden mehrere Verfahren zu ihrer genauen Berechnung angegeben. Eine Zahlentafel und ein Kurvenbild sind beigefügt.

3. Hr. Ludendorff überreichte die 7. Auflage des von ihm in Gemeinschaft mit den HH. Prof. Dr. Eberhard, Dr. Freundlich und Dr. Kohlschütter herausgegebenen Werkes Newcomb-Engelmanns Populäre Astronomie (Leipzig 1922).

Die Größen s und t der Knicktheorie.

Von H. ZIMMERMANN.

Die Größen

$$(1)\qquad s = -\left(1 - \frac{\alpha}{\sin\alpha}\right)\frac{1}{aS} \text{ und } t = \left(1 - \frac{\alpha}{\operatorname{tang}\alpha}\right)\frac{1}{aS}$$

werden in neuerer Zeit immer häufiger und vielseitiger zur Lösung von Aufgaben aus dem Gebiete der Knickfestigkeit benutzt[1]. Es erscheint daher angezeigt, diese Hilfsgrößen einer näheren Betrachtung zu unterziehen mit dem Ziele, ihren Verlauf als Funktionen von α klarzustellen und die Berechnung ihrer Zahlenwerte in Tafelform zu erläutern. Dabei empfiehlt es sich, die Faktoren $1:aS$ abzusondern. Um anzudeuten, daß es sich nur um die Untersuchung der eingeklammerten Teile der s und t handelt, setzen wir im allgemeinen

$$(2)\qquad s\cdot aS = \left(\frac{\alpha}{\sin\alpha} - 1\right) = (\mathbf{s}) \text{ und } t\cdot aS = \left(1 - \frac{\alpha}{\operatorname{tang}\alpha}\right) = (\mathbf{t}),$$

benutzen aber auch statt der Zeichen (s) und (t) die Buchstaben s und t allein mit dahinter in Klammern gestellter Angabe des Winkels, auf den sie sich beziehen. Demgemäß wäre statt (2) bestimmter zu schreiben

$$(3)\qquad \frac{\alpha}{\sin\alpha} - 1 = s(\alpha); \qquad 1 - \frac{\alpha}{\operatorname{tang}\alpha} = t(\alpha),$$

und beispielsweise

$$\frac{\beta}{\sin\beta} - 1 = s(\beta); \qquad 1 - \frac{\beta}{\operatorname{tang}\beta} = t(\beta).$$

I. Die erste wesentliche Frage betrifft die Berechnung der (s) und (t) für große Werte von α. Die gebräuchlichen Tafeln geben die Sinus und Tangenten nur für α zwischen 0 und 90°. Für größere Winkel hilft die

[1] Vergl. Sitzungsberichte 1907 S. 239, Gleichung (11) und (12) sowie auch die Anmerkung 1 auf S. 892 des Jahrgangs 1921. Mit Hilfe der in demselben Jahrgang auf S. 775 u. ff. entwickelten Theorie des Stabes mit elastischer Einspannung ist es sogar gelungen, die bis dahin immer getrennt behandelten einzelnen Knickfälle auf nur eine Gleichung zurückzuführen. Vergl. Zentralblatt der Bauverwaltung 1922 S. 34: »Die Knickfestigkeit in neuer einheitlicher Behandlung.« — Die Bezeichnungen s und t finden sich zuerst auf S. 183 der Sitzungsberichte von 1909 in der Abhandlung über die Knickfestigkeit des Stabes mit mehreren Feldern; die Zeichen $(\mathbf{s})$ und $(\mathbf{t})$ sowie eine kleine Zahlentafel dieser Größen in meinem Schriftchen »Die Knickfestigkeit der Druckgurte offener Brücken« (Berlin 1910). Die oben in zweiter Linie angeführte Schreibweise behandelt die s und t gewissermaßen als Funktionszeichen.

Periode aus, nach den Regeln $\sin(180°\pm\alpha) = \mp\sin\alpha$ und $\tan(180°\pm\alpha) = \pm\tan\alpha$. Auf die gemischten Funktionen (s) und (t) ist das nicht ohne weiteres anwendbar. Durch einen kleinen Kunstgriff lassen sich aber ganz ähnliche Regeln gewinnen. Wir benutzen als Maß für den Bogen α der Bequemlichkeit halber den Grad (und nötigenfalls seine Bruchteile), setzen also kurz

$$\alpha = n, \tag{4}$$

wo n eine zwischen 1 und 90 liegende positive Zahl bedeutet. Dann läßt sich nachweisen, daß für Werte von α in der Umgebung von π

$$\left\{\begin{aligned} s(180\pm n) &= -\left(\frac{180}{\pm n}+1\right)s(n) - \left(\frac{180}{\pm n}+2\right); \\ t(180\pm n) &= \left(\frac{180}{\pm n}+1\right)t(n) - \frac{180}{\pm n}. \end{aligned}\right. \tag{5}$$

Dasselbe Verfahren liefert in der Umgebung von 2π:

$$\left\{\begin{aligned} s(360\pm n) &= \left(\frac{360}{\pm n}+1\right)s(n) + \frac{360}{\pm n}; \\ t(360\pm n) &= \left(\frac{360}{\pm n}+1\right)t(n) - \frac{360}{\pm n}. \end{aligned}\right. \tag{6}$$

Ähnlich ist für die Summen und Unterschiede der (s) und (t) in der Umgebung von π:

$$\left\{\begin{aligned} t(180\pm n)+s(180\pm n) &= \left(\frac{180}{\pm n}+1\right)[t(n)-s(n)] - 2\left(\frac{180}{\pm n}+1\right); \\ t(180\pm n)-s(180\pm n) &= \left(\frac{180}{\pm n}+1\right)[t(n)+s(n)] + 2; \end{aligned}\right. \tag{7}$$

und ferner in der Umgebung von 2π:

$$\left\{\begin{aligned} t(360\pm n)+s(360\pm n) &= \left(\frac{360}{\pm n}+1\right)[t(n)+s(n)]; \\ t(360\pm n)-s(360\pm n) &= \left(\frac{360}{\pm n}+1\right)[t(n)-s(n)] - 2\,\frac{360}{\pm n}\,[1]. \end{aligned}\right. \tag{8}$$

Die Gleichungen für die Summen und Unterschiede der (s) und (t) sind von Bedeutung, weil diese Ausdrücke in den Knickformeln auftreten[2]. Hiermit können nun alle vier Größen für die höheren Kreisviertel aus den für das erste Viertel ermittelten berechnet werden.

[1] Alle diese Gleichungen gelten übrigens auch für $n > 90$. Jede von ihnen reicht also über den ganzen Kreisumfang. Daher ergibt sich z. B. aus Gleichung (6) mit $n = 359$:

$$s(360-359) = \left(\frac{360}{-359}+1\right)s(359) - \frac{360}{359} = -\frac{1}{359}\left(\frac{359}{\sin 359}-1\right) - 1 - \frac{1}{359}$$
$$= \frac{1°}{\sin 1°} - 1 = s(1).$$

[2] Vergl. Zentralblatt der Bauverwaltung 1922 S. 37 Gleichung (20) u. (21) oder Gleichung (9) u. (10) auf S. 897 der Sitzungsberichte von 1921 in der Abhandlung über den Einfluß des Vorzustandes usw.

Ein anderes, für tafelmäßige Rechnung gleichfalls geeignetes Verfahren besteht darin, daß man zunächst die Werte

$$\frac{\text{arc } 1^\circ}{\sin \alpha} \quad \text{und} \quad \frac{\text{arc } 1^\circ}{\text{tang } \alpha}$$

für alle α zwischen 0 und $^1/_2\pi$ berechnet und daraus die zu gleichen Absolutwerten von $\sin \alpha$ und $\text{tang } \alpha$ in den verschiedenen Kreisvierteln gehörigen

$$\frac{\alpha}{\sin \alpha} = n \frac{\text{arc } 1^\circ}{\sin \alpha} \quad \text{und} \quad \frac{\alpha}{\text{tang } \alpha} = n \frac{\text{arc } 1^\circ}{\text{tang } \alpha}$$

ableitet. Da jetzt die n die Zahlen von 1 bis 360 sind, so gestaltet sich der Vorgang bei Anwendung der Rechenmaschine sehr einfach. Beispielsweise ist

$$\frac{\text{arc } 6^\circ}{\sin 6^\circ}; \qquad \frac{\text{arc } 174^\circ}{\sin 174^\circ}; \qquad \frac{\text{arc } 186^\circ}{\sin 186^\circ}; \qquad \frac{\text{arc } 354^\circ}{\sin 354^\circ};$$

$$= 6 \frac{\text{arc } 1^\circ}{\sin 6^\circ}; \qquad 174 \frac{\text{arc } 1^\circ}{\sin 6^\circ}; \qquad -186 \frac{\text{arc } 1^\circ}{\sin 6^\circ}; \qquad -354 \frac{\text{arc } 1^\circ}{\sin 6^\circ}.$$

Durch Hinzufügen von -1 folgen hieraus die Werte von (s).

II. Die bisher beschriebenen Verfahren bieten gegenüber der unmittelbaren Ausrechnung jedes einzelnen Wertes von (s) und (t) nach Gleichung (3) den Vorteil einer Ersparung von Rechenarbeit, benutzen aber die gebräuchlichen Tafeln der Sinus und Tangenten gleichfalls. Ein von diesem Hilfsmittel unabhängiger Weg kann aus verschiedenen Gründen erwünscht sein. So z. B. wenn für theoretische Betrachtungen eine über die Bedürfnisse der Anwendung hinausgehende Genauigkeit verlangt oder nach Gesetzmäßigkeiten geforscht wird, die sich aus den fertigen Tafelwerten nicht erkennen lassen. Wollte man aber auf die Potenzreihen zurückgreifen, aus denen diese hergeleitet sind, so entstände die Frage, ob nicht besser solche Reihen gleich für die (s) und (t) selber zu entwickeln sein würden. Die folgende Untersuchung lehrt, daß diese Größen sowohl wie auch ihre Summen und Unterschiede in der Tat durch nach Potenzen von α fortschreitende Reihen dargestellt werden können.

Bekanntlich ist

$$\frac{1}{\sin x} = \frac{1}{x} + \frac{2(2^1 - 1) B_1}{1 \cdot 2} x + \frac{2(2^3 - 1) B_3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} x^3 + \cdots\cdots;$$

$$\frac{1}{\text{tang } x} = \frac{1}{x} - \frac{2^2 B_1}{1 \cdot 2} x + \frac{2^4 B_3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} x^3 - \cdots\cdots,$$

worin die B die BERNOULLIschen Zahlen[1]. Es folgt unmittelbar:

---

[1] Es wird den Gebrauch dieser Abhandlung erleichtern, wenn wir die BERNOULLIschen Zahlen hier anführen: $B_1 = 1:6$; $B_3 = 1:30$; $B_5 = 1:42$; $B_7 = 1:30$; $B_9 = 5:66$; $B_{11} = 691:2730$; $B_{13} = 7:6$; $B_{15} = 3617:510$; $B_{17} = 43\,867:798$ usw. Damit ergeben sich die Beiwerte der Potenzen von α der letzten Reihe Gleichung (10): 1 : 6; 1 : 360; 1 : 15120; 1 : 604800; 1 : 23950080; 691 : 653837184000; 1 : 37362124800 usw.

$$(9)\quad \begin{cases} (s) = 2\,(2-1)\,\dfrac{B_1}{2!}\,\alpha^2 + 2\,(2^3-1)\,\dfrac{B_3}{4!}\,\alpha^4 + 2\,(2^5-1)\,\dfrac{B_5}{6!}\,\alpha^6 + \cdots \\[2ex] (t) = 2\cdot 2\,\cdot\,\dfrac{B_1}{2!}\,\alpha^2 + 2\cdot 2^3\,\cdot\,\dfrac{B_3}{4!}\,\alpha^4 + 2\cdot 2^5\,\cdot\,\dfrac{B_5}{6!}\,\alpha^6 + \cdots \end{cases}$$

$$(10)\quad \begin{cases} (t)+(s) = 2\,(2^2-1)\,\dfrac{B_1}{2!}\,\alpha^2 + 2\,(2^4-1)\,\dfrac{B_3}{4!}\,\alpha^4 + 2\,(2^6-1)\,\dfrac{B_5}{6!}\,\alpha^6 + \cdots \\[2ex] (t)-(s) = 2\,\cdot\,\dfrac{B_1}{2!}\,\alpha^2 + 2\,\cdot\,\dfrac{B_3}{4!}\,\alpha^4 + 2\,\cdot\,\dfrac{B_5}{6!}\,\alpha^6 + \cdots \end{cases}$$

Die Glieder mit gleichen Potenzen von α der einzelnen Reihen stehen in sehr einfacher Beziehung zueinander und können am bequemsten aus denen der letzten Reihe abgeleitet werden; sie sind ganze Vielfache von diesen und verhalten sich für das Glied mit der $m$ten Potenz von α in der Reihe

$$(t)-(s)\;;\quad (s)\quad;\quad (t)\quad;\quad (t)+(s)$$

wie

$$1 \quad:\quad 2^{m-1}-1 \;:\; 2^{m-1} \;:\; 2^m-1\,.$$

Die Grenzbedingung für die Konvergenz der Reihen lautet

$$-\pi < \alpha < +\pi\,.$$

Sie konvergieren für kleine Werte von α sehr rasch (besser als die Reihen für die Sinus und Tangenten), wie schon die in Anmerkung 1 der vorigen Seite aufgeführten Beiwerte der Potenzen von α der Reihe $(t)-(s)$ erkennen lassen. Wir setzen als Beispiel die Glieder der Reihen (s) und (t) für $\alpha = 1°$ hierher:

0.0000 5076 9569 97	0.0001 0153 9139 93
0.0000 0000 1804 28	0.0000 0000 2062 04
0.0000 0000 0000 06	0.0000 0000 0000 06
$s(1°)$ = 0.0000 5077 1374 · · ;	$t(1°)$ = 0.0001 0154 1202 · · .

Es genügen also schon zwei Glieder, um die (s) und (t) für 1° auf etwa 8 benannte Stellen genau zu erhalten; für Bruchteile eines Grades wird die Genauigkeit noch größer. Da nun aber aus den für so kleine Winkel geltenden die zu den großen Winkeln in der Nähe von π und 2π gehörigen Werte mit Hilfe der Gleichungen (5) bis (8) leicht ganz scharf berechnet werden können, so ist ersichtlich, daß die vorgeführte Rechnungsweise gerade den für die Anwendung wichtigsten Teil des Bedarfes sehr gut deckt.

Es möge noch darauf hingewiesen werden, daß es sich auch bei Auswertung der Reihen (9) und (10) empfiehlt, α nicht in Bogen-, sondern in Gradmaß auszudrücken, wie dies vorher schon für die anderen Rechnungsarten angeraten wurde. Man bestimmt danach die Glieder der einzelnen Reihen zunächst für arc 1° und ermittelt ihren Wert für kleinere oder größere Winkel durch Multiplikation mit den zugehörigen Potenzen der Gradzahl des betreffenden Winkels. Am Schluß dieser Abhandlung ist als Probe ein Auszug aus einer größeren Tafel beigefügt, die zum Teil nach diesem Verfahren berechnet wurde.

Setzt man in der Reihe für $t(\alpha)$ an Stelle von α als Veränderliche $^1/_2\alpha$, so ergibt der Vergleich mit der Reihe für $t(\alpha)-s(\alpha)$ die Beziehung

$$\frac{t(\alpha)-s(\alpha)}{2}=t(^1/_2\alpha), \tag{11}$$

die sich auch auf goniometrischem Wege aus den Gleichungen (3) ableiten läßt und u. a. zu Rechenproben dienen kann. Auf ähnliche Weise findet man die weitere Beziehung

$$\frac{t(\alpha)+s(\alpha)}{2}={}^1/_2\alpha\ \mathrm{tang}\ {}^1/_2\alpha, \tag{12}$$

die ihrerseits dadurch zu bestätigen ist, daß man in der bekannten Reihe

$$\mathrm{tang}\ x=\frac{2^2(2^2-1)B_1}{1\cdot 2}x+\frac{2^4(2^4-1)B_3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}x^3+\cdots$$

$x={}^1/_2\alpha$ setzt und dann mit $^1/_2\alpha$ multipliziert. Es erscheint so die Hälfte der ersten Reihe von (10)[1].

III. Die gute Konvergenz der Reihen (9) und (10) legt den Gedanken nahe, sie zur Ableitung einer Näherungsformel zu benutzen. Wir streichen kurzweg alle Glieder mit Ausnahme der ersten und erhalten so die folgenden Gleichungen, in denen n die Gradzahl bedeutet:

$$s(n)=2\frac{B_1}{2!}(\mathrm{arc}\ 1^\circ)^2n^2;$$

$$t(n)=4\frac{B_1}{2!}(\mathrm{arc}\ 1^\circ)^2n^2=2s(n);$$

$$t(n)+s(n)=6\frac{B_1}{2!}(\mathrm{arc}\ 1^\circ)^2n^2=3s(n);$$

$$t(n)-s(n)=2\frac{B_1}{2!}(\mathrm{arc}\ 1^\circ)^2n^2=\ s(n).$$

Die Ausrechnung der Beiwerte kann auf die erste Reihe beschränkt werden. Man findet

$$\mathbf{s(n)={}^1/_2t(n)={}^1/_3[t(n)+s(n)]=t(n)-s(n)=0.0000\ 5076\ 9570\ n^2}. \tag{13}$$

Um den Grad der Näherung zu prüfen, berechnen wir hieraus die Werte für $n=3^\circ$ und stellen sie den genauen, aus der Tafel am Schluß zu ersehenden Werten gegenüber.

	Näherungswerte:		Genaue Werte:
$s(3)$	$=0.0004\ 5693$;	14;	0.0004 5707;
$t(3)$	$=0.0009\ 1385$;	17;	0.0009 1402;
$t(3)+s(3)$	$=0.0013\ 7079$;	30;	0.0013 7109;
$t(3)-s(3)$	$=0.0004\ 5693$;	2;	0.0004 5695.

[1] Die Gleichungen (11) und (12) sind in meinen früheren Arbeiten öfter angewendet worden. Vergl. Sitzungsberichte 1921 S. 895 Anmerkung 1. Nur in einfachen Fällen wird durch den Übergang zu $^1/_2\alpha$ ein Vorteil erreicht, besonders wenn Tafeln der Werte $(t)+(s)$ und $(t)-(s)$ nicht zur Verfügung stehen.

Die dazwischenstehenden Zahlen geben in Einheiten der letzten Dezimale an, um wieviel die Näherungswerte zu klein sind. Der größte Fehler beträgt 1 : 3000 des richtigen Wertes. In Anbetracht der Kleinheit des für die Probe gewählten Winkels fällt das günstige Ergebnis nicht sehr ins Gewicht. Ganz anders stellt sich aber die Sache, wenn man die durch (13) bestimmten Werte dazu benutzt, um aus den Gleichungen (5) bis (8) die Werte für große, in der Nähe von π oder 2π liegende Winkel zu berechnen. Nachstehend ein Beispiel dafür, in dem wiederum $n = 3°$ angenommen wird. Es handelt sich also um die Berechnung von (s), (t), $(t)+(s)$ und $(t)-(s)$ für die Winkel 177°, 183° und 357°, wobei n für 177° und 357° negativ einzuführen ist. Es folgt

		Näherungswerte:	Genaue Werte:
aus Gleichung (5):			
$s(177) =$	$59 \cdot 0.0004\,5693 + 58 =$	58.02696;	58.02697;
$s(183) = -$	$61 \cdot 0.0004\,5693 - 62 = -$	62.02787;	$-\ 62.02788$;
$t(177) = -$	$59 \cdot 0.0009\,1385 + 60 =$	59.94608;	59.94607;
$t(183) =$	$61 \cdot 0.0009\,1385 - 60 = -$	59.94425;	$-\ 59.94424$;
aus Gleichung (6):			
$s(357) = -$	$119 \cdot 0.0004\,5693 - 120 = -$	120.05438;	-120.05439;
$t(357) = -$	$119 \cdot 0.0009\,1385 + 120 =$	119.89125;	119.89123;
aus Gleichung (7):			
$t(177)+s(177) = -$	$59 \cdot 0.0004\,5693 + 118 =$	117.97304;	117.97304;
$t(183)+s(183) =$	$61 \cdot 0.0004\,5693 - 122 = -$	121.97213;	-121.97213;
$t(177)-s(177) = -$	$59 \cdot 0.0013\,7079 + 2 =$	1.91912;	1.91911;
$t(183)-s(183) =$	$61 \cdot 0.0013\,7079 + 2 =$	2.08362;	2.08364;
aus Gleichung (8):			
$t(357)+s(357) = -$	$119 \cdot 0.0013\,7079 = -$	0.16312;	$-\ 0.16316$;
$t(357)-s(357) = -$	$119 \cdot 0.0004\,5693 + 240 =$	239.94562;	239.94562.

Der Vergleich mit den aus der Zahlentafel entnommenen genauen Werten zeigt, daß die einfache Näherungsformel (13) zusammen mit den Gleichungen (5) bis (8) überraschend genaue Ergebnisse liefert. Innerhalb des Bereiches von 3° über und unter 180° und 360° ist die Genauigkeit noch größer. Daß sie aber auch weit außerhalb dieser Grenzen noch ausreicht, kann man leicht feststellen, indem man die Rechnung beispielsweise mit $n = 10°$ wiederholt. So findet sich

	näherungsweise:	genau:
$s(170) =$	$17 \cdot 0.005077 + 16 = 16.0863$;	16.0866;
$t(170) = -$	$17 \cdot 0.010154 + 18 = 17.8274$;	17.8270 usw.

Gerade in den Bereichen um π und 2π ändern sich unsere Werte besonders stark mit α; hier dürfte deshalb das Näherungsverfahren eine nützliche Anwendung finden. Daß man übrigens die Summen und Unterschiede der (s) und (t) dabei einfacher aus diesen Werten ableiten kann, braucht wohl kaum hervorgehoben zu werden. Ihre unabhängige Berechnung soll auch nur als Probe dienen.

IV. Das beifolgende Bild zeigt den Verlauf der hiernach in der einen oder anderen Weise berechneten Werte von (s), (t), $(t)+(s)$ und $(t)-(s)$ im Bereiche von $\alpha = 0$ bis $\alpha = 2\pi$. Außerdem enthält es aber auch noch die Kurven $\mathbf{1:(t)}$ und $\mathbf{(t):(u)}$, die der Vollständigkeit wegen mit aufgenommen sind, obgleich sie einen Gegenstand betreffen, dessen eingehendere Erörterung ich mir vorbehalten muß. Einstweilen möge die folgende kurze Andeutung genügen.

Den allgemeinsten Fall der Knickung erhält man mit der Annahme, daß der Stab an beiden Enden verschieden elastisch eingespannt sei. Werden die entsprechenden Spannziffern — d. h. die Quotienten aus den Einspannungsmomenten und den von ihnen erzeugten Verdrehungen der Stabenden — mit $\boldsymbol{m}_1$ und $\boldsymbol{m}_2$ bezeichnet, so lautet die Knickbedingung

$$1 + (t)\frac{m_1 + m_2}{aS} + [(t)^2 - (s)^2]\frac{m_1 m_2}{a^2 S^2} = 0\,, \tag{14}$$

wie ich in der Abhandlung über die Knickfestigkeit von Stäben mit elastischer Einspannung nachgewiesen habe[1]. Ist die Einspannung des einen Endes eines gegebenen Stabes bekannt, so läßt sich hieraus berechnen, wie das andere Ende eingespannt werden muß, damit sich der Stab gerade an der Knickgrenze befindet. Setzt man zur Abkürzung

$$\left\{\begin{aligned} \frac{m_1}{aS} &= \mu_1\,; \\ \frac{m_2}{aS} &= \mu_2\,; \end{aligned}\right. \qquad (t)^2 - (s)^2 = [(t)+(s)]\cdot[(t)-(s)] = \mathbf{(u)}\,, \tag{15}$$

so nimmt (14) die einfachere Form

$$1 + (t)\,(\mu_1 + \mu_2) + (u)\,\mu_1\mu_2 = 0 \tag{16}$$

an, aus der schließlich

$$\mu_2 = -\frac{1 + (t)\,\mu_1}{(t) + (u)\,\mu_1} \tag{17}$$

folgt. Indem wir die allgemeine Behandlung dieser Gleichung auf später verschieben, beschränken wir uns hier darauf, zwei bemerkenswerte aus ihr folgende Grenzfälle hervorzuheben. Ist nämlich die Spannziffer des einen Stabendes 1 Null, dieses also frei drehbar, so ergibt (17) mit $\mu_1 = 0$ die Spannziffer des anderen Endes zu

$$\left\{\begin{aligned} \mu_2 &= \frac{m_2}{aS} = -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{(t)}} \\ \text{oder}\qquad m_2 &= -\frac{1}{(t)}\,aS = -\frac{1}{t}\,. \end{aligned}\right. \tag{18}$$

[2]

[1] Vergl. Sitzungsberichte 1921 S. 778, Gleichung (6). Diese geht bei Anwendung der jetzt gewählten Bezeichnungen mit Rücksicht auf Gleichung (11) u. (12) in die oben gegebene Form (14) über. Siehe auch Sitzungsberichte 1921 S. 896, Gleichung (5) und Zentralbl. d. Bauverwaltung 1922 S. 36, Gleichung (11).

[2] Vergl. Zentralbl. d. Bauverwaltung 1922 S. 393, Gleichung (30). Dort ist auch der Begriff der Spannziffer auf S. 390 eingehend erörtert.

Ist dagegen der Stab am Ende 1 starr eingespannt, so ist $\mu_1 = \infty$ zu setzen, womit aus (17)

$$(19) \begin{cases} \mu_2 = \frac{m_2}{aS} = -\frac{(t)}{(u)} \\ \text{oder} \quad m_2 = -\frac{(t)}{(u)} aS = -\frac{t}{u} \end{cases}$$

folgt.

Dies erklärt es, warum die Größen $1 : (t)$ und $(t) : (u)$ in das Kurvenbild aufgenommen sind.

Unter den sogenannten vier Eulerschen Knickfällen befindet sich auch einer, der für die Anwendung nur selten in Betracht kommt, nämlich der Stab mit einem starr eingespannten und einem frei drehbaren (in der Achse geführten) Ende. Die Bedingung, die erfüllt sein muß, damit dieser Fall eintritt, folgt leicht aus (18) sowohl wie aus (19). Sie lautet bekanntlich

$$(20) \qquad (t) = 0 \text{ oder } \alpha = \operatorname{tang} \alpha = 4.493408 \cdots$$

Ein Blick auf das Kurvenbild lehrt, daß der geringen praktischen Bedeutung dieses Ergebnisses eine erhebliche theoretische gegenübersteht. Die Gleichung $(t) = 0$ legt nämlich einen wichtigen Verzweigungspunkt der Kurven im Gebiet zwischen $\alpha = \pi$ und $\alpha = 2\pi$ fest, der zu den Gleichungen

$$(21) \qquad \frac{d(s)}{d\alpha} = \frac{t(\alpha)}{\sin \alpha} \text{ und } \frac{d(t)}{d\alpha} = \frac{s(2\alpha)}{\operatorname{tang} \alpha}$$

in Beziehung steht.

Das Bild soll in erster Linie eine Übersicht geben. Da es aber nach Maßstab aufgetragen ist, können die darin enthaltenen Werte auch zu überschläglichen Berechnungen dienen. Eine weitergehenden Anforderungen genügende umfangreiche Zahlentafel soll im Druck erscheinen, sobald es die Zeitverhältnisse gestatten.

Die Größen (s), (t), $(t)+(s)$, $(t)-(s)$, $(t):(u)$ und $1:(t)$ für $\alpha = 0$ bis $\alpha = 2\pi$.

α	$(s) = \frac{\alpha}{\sin\alpha} - 1$	$(t) = 1 - \frac{\alpha}{\mathrm{tang}\,\alpha}$	$(t) + (s)$	$(t) - (s)$	α
1°	0.0000 5077	0.0001 0154	0.0001 5231	0.0000 5077	0.01745
2	0.0002 0311	0.0004 0619	0.0006 0930	0.0002 0308	0.03491
3	0.0004 5707	0.0009 1402	0.0013 7109	0.0004 5695	0.05236
4	0.0008 1278	0.0016 2515	0.0024 3793	0.0008 1238	0.06981
5	0.0012 7037	0.0025 3977	0.0038 1014	0.0012 6940	0.08727
6	0.0018 3005	0.0036 5808	0.0054 8813	0.0018 2804	0.10472
7	0.0024 9205	0.0049 8038	0.0074 7242	0.0024 8833	0.12217
8	0.0032 5666	0.0065 0697	0.0097 6362	0.0032 5031	0.13963
9	0.0041 2420	0.0082 3823	0.0123 6244	0.0041 1403	0.15708
10	0.0050 9506	0.0101 7459	0.0152 6965	0.0050 7954	0.17453
...	....	....	....	....	......
170	16.0866 1599	17.8270 3190	33.9136 4788	1.7404 1591	2.96706
171	18.0783 5988	19.8434 7361	37.9218 3348	1.7651 1373	2.98451
172	20.5700 1815	22.3601 0021	42.9301 1836	1.7900 8207	3.00197
173	23.7758 7490	25.5911 9928	49.3670 7418	1.8153 2439	3.01942
174	28.0530 7132	29.8939 1556	57.9469 8688	1.8408 4424	3.03687
175	34.0444 6287	35.9111 0811	69.9555 7099	1.8666 4524	3.05433
176	43.0357 6211	44.9284 9321	87.9642 5532	1.8927 3110	3.07178
177	58.0269 6727	59.9460 7286	117.9730 4013	1.9191 0559	3.08923
178	88.0180 7654	89.9638 4913	177.9819 2567	1.9457 7260	3.10669
179	178.0090 8808	179.9818 2412	357.9909 1220	1.9727 3605	3.12414
180	∞	∞	∞	2.0000 0000	3.14159
181	−182.0091 8962	−179.9816 2104	−361.9908 1066	2.0275 6858	3.15905
182	− 92.0184 8275	− 89.9630 3675	−181.9815 1950	2.0554 4600	3.17650
183	− 62.0278 8141	− 59.9442 4482	−121.9721 2623	2.0836 3659	3.19395
184	− 47.0373 8766	− 44.9252 4290	− 91.9626 3056	2.1121 4476	3.21141
185	− 38.0470 0361	− 35.9060 2858	− 73.9530 3219	2.1409 7503	3.22886
186	− 32.0567 3141	− 29.8865 9939	− 61.9433 3080	2.1701 3202	3.24631
187	− 27.7808 5899	− 25.5812 3853	− 53.3620 9752	2.1996 2046	3.26377
188	− 24.5765 3146	− 22.3470 8628	− 46.9236 1774	2.2294 4518	3.28122
189	− 22.0866 0828	− 19.8269 9714	− 41.9136 0543	2.2596 1114	3.29867
190	− 20.0968 0610	− 17.8066 8271	− 37.9034 8881	2.2901 2339	3.31613
...	....	....	....	....	......
350	− 36.1783 2703	35.6438 8920	− 0.5344 3783	71.8222 1623	6.10865
351	− 40.1608 4395	39.6787 0898	− 0.4821 3497	79.8395 5294	6.12611
352	− 45.1432 9295	44.7136 9346	− 0.4295 9949	89.8569 8642	6.14356
353	− 51.5542 4184	51.1774 1819	− 0.3768 2365	102.7316 6003	6.16101
354	− 60.1079 7269	59.7841 7303	− 0.3237 9966	119.8921 4532	6.17847
355	− 72.0901 9612	71.8196 7646	− 0.2705 1966	143.9098 7257	6.19592
356	− 90.0723 3700	89.8553 6126	− 0.2169 7574	179.9276 9826	6.21337
357	−120.0543 9161	119.8912 3170	− 0.1631 5991	239.9456 2331	6.23083
358	−180.0363 5618	179.9272 9207	− 0.1090 6411	359.9636 4825	6.24828
359	−360.0182 2692	359.9635 4671	− 0.0546 8021	719.9817 7363	6.26573
360	− ∞	∞	0	∞	6.28319

Über die Zwischenrippenmuskeln.

Von R. FICK.

(Vorgetragen am 1. Februar 1923 [s. oben S. 20].)

Herr CHR. VAN GELDEREN in Amsterdam hatte die Freundlichkeit, mir seine Abhandlung aus der niederländischen Zeitschrift für Heilkunde[1] zu senden, in der er sich mehrfach gegen meine Darstellung der Atemwirkung der Zwischenrippenmuskeln[2] wendet. Die Abhandlung ist mir eine nicht unwillkommene Gelegenheit, nochmals auf die fast seit zwei Jahrtausenden, nämlich schon von Galen, behandelte Frage zurückzukommen.

Vorerst seine allgemeinen Einwände!

VAN GELDEREN sucht meine Bemerkung, daß die Natur gewiß nicht das kostbare, viel Sauerstoff beanspruchende Muskelgewebe in den Zwischenrippenräumen nur als Widerstandshaut gegen den Luftdruck angebracht haben werde, da dieser Zweck ebensogut oder besser durch Bindegewebe erreicht werden könne, durch den Hinweis auf das Vorkommen von Eingeweidebrüchen in der »Weißen Bauchlinie« zu entkräften. Er sagt, das Bindegewebe der »Weißen Linie« sei geradezu ein »schwacher Punkt« und ein Lieblingssitz der Brüche. Er übersieht dabei erstens, daß die Brüche dort gar nicht so besonders häufig sind, und zweitens, daß Brüche der »Weißen Linie« wohl fast immer nur bei übertriebener Verbreiterung, d. h. übertriebener Auseinanderzerrung ihrer Bindegewebsbündel, bei der sie sehr wesentlich verdünnt wird, wie nach Schwangerschaften oder Bauchwassersucht usw., entstehen.

Er weist ferner auf die großen Blutgefäße hin, in denen, wie er sagt, trotz mangelnder Zusammenziehung, massenhaft Muskelgewebe enthalten sei. Demgegenüber ist aber doch mit voller Sicherheit anzunehmen, daß alle Blutgefäße, in deren Wand noch Muskelfasern vorkommen, sich auch noch ab und zu etwas zusammenziehen. Die Anfangsstücke der größten Schlagadern, die sich wirklich nicht selbsttätig zusammenziehen, haben aber auch bekanntlich keine Muskelfasern, sondern eine rein bindegewebig elastische Wand, ähnlich die steifen Blutleiter des Schädelraumes, bei denen sogar die elastischen

[1] CHR. VAN GELDEREN, Over de funktie der mm. Intercostales. Nederland. Tijdschr. voor Geneeskunde 65. Jahrg., 1921, 1. Heft Nr. 17.

[2] Vgl. R. FICK, Über die Atemmuskeln, Arch. f. Anat. u. Physiol. Ergzgsbd. 1897. Derselbe, Anat. Anz. Bd. 14. — Einiges über die Rippenbewegung, Anat. Verhdlg. Würzburg 1907. — Handbuch der Anat. u. Mechanik der Gelenke unter Berücksichtigung der bewegenden Muskeln, Bd. III. Jena, Gust. Fischer, S. 139—204.

Fasern gegenüber den leimgebenden nur sehr spärlich entwickelt sind. Man darf daher in der Tat von vornherein annehmen, daß die Tätigkeit der Zwischenrippenmuskeln, wie aller Muskeln, in erster Linie in ihrer Zusammenziehung und der dadurch bewirkten Rippenbewegung besteht.

Ein weiterer Stein des Anstoßes ist Hrn. VAN GELDEREN der schon von A. v. HALLER gegen HAMBERGER vorgebrachte Umstand, daß das »HAMBERGERsche Schema« für den Brustkorb nicht zutreffe, was nur insofern richtig ist, als es nur den Verhältnissen der seitlichen Teile der Brustwand genau entspricht. Hr. VAN GELDEREN führt zwar an, daß ich diesen Einwand ausdrücklich widerlegt und angegeben habe, daß man sich an meinem Rippenmodell in einfachster Weise davon überzeugen kann, daß die Folgerungen HAMBERGERS aus seinem Schema auch für die anderen Teile des Rippenkorbes zutreffen. VAN GELDEREN meint aber, in meinem Modell stünden die Achsen genau quer (»frontal«), und deshalb wäre das Modell nicht beweiskräftig. Leider kennt er wahrscheinlich mein Modell nicht aus eigener Anschauung. Aber auch die Abbildungen des Modells in der betr. Abhandlung und in meinem Handbuch lassen die Schrägstellung der Achsen bei der abgebildeten Stellung des Modells, namentlich am unteren Rippenpaar, deutlich erkennen, vor allem an der Abbildung 80 auf S. 157, wo die Ansicht des Modells von vorn wiedergegeben ist; die Bilder 1, 2 und 3 sind

Bild 1.
Rippenmodell R. FICKS in gehobener Stellung.

Bild 2.
Modell mit Fäden, die den Zwischenrippenmuskeln entsprechen in Einatmungsstellung.

Bild 3.
Dasselbe in Ausatmungsstellung.

Abdrucke jener Bilder. Selbstverständlich kann man die Verhältnisse aber weit besser als an den Bildern am Modell selbst sichtbar machen, an dem man ja die Rippenachsen nach Belieben quer (»frontal«), schräg oder aber fast »sagittal« stellen kann. Tatsächlich verkürzen sich eben, wie es HAMBERGER behauptete, die »Äußeren Zwischenrippenmuskeln« an allen Stellen der Brustwand bei der Hebung, die »Inneren« aber bei der Senkung, sowohl an den Stellen der Rippen, wo die Rippenspangen senkrecht zu ihrer Drehungsachse verlaufen, als auch an den Stellen, wo das nicht der Fall ist. Übrigens braucht man zu dem Nachweis gar nicht ein künstliches Modell, sondern kann sich an einem wirklichen Brustkorb von der Tatsache über-

zeugen. Schon v. EBNERS[1] und EXNER-WEIDENFELDS[2] genaue Untersuchungen bewiesen übrigens diesen Sachverhalt vollkommen einwandfrei. Der erstere stellte die Verkürzung der »Äußeren« und der Zwischenknorpelmuskeln bei der Rippenhebung, die Verkürzung der »Inneren« aber bei der Rippensenkung fest. Die letzteren fertigten Klammen an, die etwas kürzer waren als die Zwischenrippenmuskeln. Wurden nun die Klammern in der Richtung der »Äußeren« an den Rippen befestigt, gelangte der Brustkorb in die Einatmungsstellung. Wurden die Klammern in der Richtung der »Inneren« befestigt, kam der Brustkorb in Ausatmungsstellung.

VAN GELDEREN glaubt gegen die Einatmungswirkung der »Äußeren Zwischenrippenmuskeln« aber noch einen neuen Einwand machen zu müssen. Er meint, die jeweils vom unteren Rand einer Rippe entspringenden »Äußeren« müßten auf diese ihre »Ursprungsrippe« (wenn ich so sagen soll), senkend wirken. Er kommt dadurch zu der Anschauung, daß sich die Hauptstrecken der »Äußeren« in den übereinanderliegenden Zwischenrippenräumen gegenseitig das Gleichgewicht hielten. Das entspricht aber durchaus nicht den tatsächlichen Verhältnissen. VAN GELDEREN übersieht nämlich dabei, daß die »Äußeren Zwischenrippenmuskeln« keineswegs eine wahre Rippe herabziehen können, trotzdem sie an deren unterem Rand ansetzen, denn das verhindert die Verbindung der Rippenpaare mit dem Brustbein. Diese Verbindung stellt ja eben, wie schon frühzeitig erkannt wurde, im wesentlichen eine zwangläufige »Parallelführung« dar, so daß sich die »Äußeren« bei einer Herabziehung der Rippen verlängern müssen, also sich nicht verkürzen, nicht tätig sein können. Auch ein junger Prager Student der Medizin, Hr. FLUSSER gelangte seinerzeit zu vollkommenen Fehlschlüssen, weil er nicht bedacht, daß die wahren und auch die oberen falschen Rippen zu einer mehr oder weniger zwangläufigen »parallel geführten« Hebungs-Senkungsvorrichtung verbunden sind; zur Senkung dieser Vorrichtung ziehen sich alle »Inneren«, zu deren Hebung alle »Äußeren Zwischrippenmuskeln« zusammen. Auf S. 191 ff. im II. Band meiner Gelenklehre habe ich diese Fehlschlüsse ausführlich besprochen. Übrigens hat sich auch Hr. FLUSSER seinerzeit durch den in GADS physiologischer Anstalt mit Hrn. Kollegen KAHN wiederholten Tierversuch (vgl. III. Bd. S. 193 Anm. 1) von der Richtigkeit meiner Darstellung überzeugt.

VAN GELDEREN kommt auch auf den von mir selbst erwähnten Punkt zu sprechen, daß an der Grenze zwischen den »Inneren Zwischenrippenmuskeln« und den Zwischenknorpelmuskeln trotz der gegensätzlichen Wirkung auf die Atmung in der Regel keine Lücke ist. Ich habe seinerzeit zum Verständnis dieser Tatsache darauf hingewiesen, daß die beiden Muskeln zwar bei der Atmung entgegengesetzt, bei der Rumpfdrehung aber gleichsinnig wirken.

[1] V. v. EBNER, Versuche an d. Leiche über d. Wirkg. d. Zwischenrippenmuskeln u. d. Rippenheber. HIS, Arch. f. Anat. u. Entw. 1880.

[2] WEIDENFELD, J., Versuche über d. respirator. Funktion d. Intercostalmuskeln I u. II. Sitzber. Kais. Akad. d. Wiss. Wien 1892 u. 1894.

Van Gelderen meint, an der Grenze zwischen beiden Muskeln, an der übrigens tatsächlich manchmal, als Abart, eine Lücke vorkommt, müßten diejenigen Bündel, die sich weder bei Ausatmung noch bei Einatmung verkürzen können, sondern nur bei Rumpfdrehung, wenn nicht ganz fehlen, so doch wenigstens deutlich dünner sein als die »Inneren« oder die Zwischenknorpelmuskeln. Aber auch da liegt ein Trugschluß vor. Die Dicke der Muskelbündel hängt ja bekanntlich nur von den Ansprüchen an die Kraft ab (vgl. R. Fick, Abh. d. Preuß. Akad. der Wiss. 1922, Über die Gewichts- u. Querschnittsverhältn. d. Hundemuskeln), nicht von der Häufigkeit der Beanspruchung. Die »Grenzfasern« werden aber in der Tat die gleiche Kraftleistung bei der Rumpfdrehung zu vollbringen haben wie die Nachbarbündel, und diese Kraftbeanspruchung kann sogar größer sein als die bei der Atembewegung. Daher brauchen diejenigen Bündel, die außer den Rumpfdrehungen auch noch die Atembewegungen ausführen, durchaus nicht dicker zu sein als die ersteren. Überdies ist die Beurteilung der Dicke der wenigen vorhandenen Grenz- oder Übergangsbündel nur eine sehr unsichere.

Den größten Wert legt aber Chr. Van Gelderen auf zweierlei von ihm gefundene Abarten der Zwischenrippenmuskeln. Bei der einen handelte es sich um eine »Fensterbildung« in einem Rippenknorpel bei zwei Kindern von 3 und 4 Jahren, die mit Muskelgewebe, und zwar von der Richtung der Zwischenknorpelmuskeln ausgefüllt waren; bei der anderen um ein Fenster in einem Rippenknochen, etwa in der Brustwarzenlinie eines 86jährigen Mannes. Im Fenster waren Muskel- und aber auch viel Sehnenfasern. Wie die Muskelfasern verliefen, gibt Van Gelderen nicht an, jedenfalls waren nicht beide Muskelschichten deutlich ausgebildet, sonst würde er es wohl berichtet haben. Diese Abarten waren es übrigens, die Van Gelderen den Ausgangspunkt für seinen Kampf gegen die Atemwirkung der Zwischenrippenmuskeln gaben. Merkwürdigerweise führt Van Gelderen, obwohl er meine Darstellung der Wirkung der Zwischenrippenmuskeln, wie wir sahen, offenbar verfolgt hat, nicht an, daß auch ich schon diese Abarten beobachtet, ausdrücklich erwähnt und ihre vermutliche Wirkungsweise besprochen habe. Die Muskelfasern in den Knorpelfenstern können nämlich vielleicht auch bei starken Rumpfdrehungen und Biegungen durch Verschiebung und Biegung der Knorpel noch geringe Änderungen ihrer Faserlänge erleiden. Die Muskeln in Fenstern der Rippenknochen können aber, wie ich hervorhob, offenbar nur dadurch sich verkürzen und verlängern, daß sie im erschlafften Zustand durch den äußeren oder inneren Überdruck nach innen oder nach außen vorgebuchtet, vorgewölbt, also gedehnt werden und anderseits bei Nervenerregung sich möglichst geradlinig, d. h. in einer Ebene ausspannen[1]. Im letzteren Zustand bieten sie dem inneren oder äußeren Überdruck natürlich einen größeren Widerstand als im erschlafften Zustand.

[1] Vgl. auch die eben erschienene ausführliche Arbeit von Frl. Elisabeth Cords, Über funktionslose Muskeln. In Ztschr. f. Anat. u. Entw. Bd. 65 S. 254ff. Springer 1922.

In dieser Widerstandleistung gegen den Überdruck aber den Zweck aller Zwischenrippenmuskeln überhaupt sehen zu wollen, wie es schon eine ganze Reihe von Gelehrten getan haben und es jetzt wieder Van Gelderen vertritt, halte ich schon von vornherein für unzulässig, da es äußerst unwahrscheinlich ist, daß irgendwo im Körper Muskelgewebe von der Natur nicht als Bewegungs- sondern nur als Widerstandsgewebe ausgebildet worden ist. Nach wie vor muß ich, wie ich bereits oben wiederholte, das straffe Bindegewebe dafür für weit zweckmäßiger halten.

Noch ein anderer Umstand scheint mir in der Frage wesentlich: Wie denken sich die Anhänger der Ansicht, daß die Zwischenrippenmuskeln nur gewissermaßen »fleischige Bänder« seien, die Art der Tätigkeit der beiderlei Muskeln? Auch sie müssen doch zugeben, daß die äußere Schicht bei der Rippenhebung ohne Nervenerregung erschlaffen würde und daher nur wenig Widerstand leisten könnte. Um besser Widerstand leisten zu können, müßten sie also bei der Einatmung erregt werden und sich zusammenziehen. Umgekehrt werden die »Inneren« bei der Rippensenkung ohne Erregung ganz schlaff; sie müssen also bei der Ausatmung erregt werden und sich zusammenziehen. Auch die Vertreter der »Muskelband«lehre müssen daher einräumen, daß die »Äußeren« bei der Einatmung, die »Inneren« bei der Ausatmung in Tätigkeit geraten. Eine Zusammenziehung der »Äußeren« bringt aber nach Weidenfelds Versuch (s. oben) unweigerlich eine Hebung, die Zusammenziehung der »Inneren« eine Senkung der Rippen hervor. Das zeigt auch in überzeugendster Weise der bekannte, von A. Fick in die Physiologie eingeführte Versuch, bei dem man in das »Hambergersche Schema« Froschmuskeln in der Richtung der beiden Zwischenknochenmuskeln einspannt und abwechselnd reizt.

Auch die Vertreter der »Muskelbandlehre« werden angesichts dieser Tatsachen gestehen müssen, daß die Zwischenrippenmuskeln also abwechselnd bei der Atmung tätig sind, daß also im Grunde Hamberger recht hat. Sie könnten höchstens noch behaupten, daß der »Hauptzweck« ihrer Tätigkeit aber doch der Widerstand gegen das Eingedrückt- und Vorgewölbtwerden der Zwischenrippenräume wäre, nicht die mit ihrer Tätigkeit untrennbar verknüpfte Rippenerhebung und Rippensenkung. Ich glaube aber nicht, daß sie mit dieser Anschauung noch viele Anhänger finden werden, sondern glaube im Gegenteil, daß durch diesen Hinweis auch die letzten Zweifler bekehrt werden müßten.

Van Gelderen ist infolge seiner Ablehnung der äußeren Zwischenrippenmuskeln als Einatmer gezwungen, die »Treppenmuskeln« (mihi, mm. Scaleni N. A.) dafür verantwortlich zu machen. Er glaubt dabei, meinen rechnerischen Überschlägen über die Leistungen dieser beiderlei Muskeln Fehler nachweisen zu können, doch beruhen seine Einwände offenbar auf ungenauem Verfolgen meiner Angaben. Van Gelderen verwechselt dabei »künstliche Einatmung« und »Höchstleistung«. Er meint, ich vergliche bei der Zwischenrippenmuskelleistung fälschlicherweise die Verkürzung bei »künstlicher Atmung«, bei den Treppenmuskeln aber nicht die Verkürzung bei der künstlichen Atmung, sondern die, wie er meint, nur halb so große Verkürzung bei natürlicher Einatmung. Davon ist aber gar

keine Rede. Ich führte an, daß die Verkürzung der »Äußeren« bei künstlicher Einatmung nach den Versuchen von Ebners 0.2 cm betrage, die Verkürzung der Treppenmuskeln aber nicht etwa bei künstlicher Einatmung 2 cm beträgt, sondern höchstenfalls (»in maximo«) 2 cm, d. h. dann, wenn nicht nur die Rippen möglichst hochgehoben werden, sondern auch die Wirbelsäule entsprechend gebeugt, geneigt und gedreht werde! Bei der Rippenerhebung allein betrage die Verkürzung aber nur etwa 1 cm. Also kommen natürlich für den Vergleich beider Muskeln bei der Atmungsleistung nur 0.2 cm für die Äußeren und 1 cm für die Treppenmuskeln in Betracht; ja bei den »Äußeren« ist die Zahl 0.2 cm sogar wohl noch zu klein genommen, weil die von V. von Ebner durch »künstliche« Einatmung (Lungenblähung) an der Leiche bewirkte Verkürzung der »Äußeren« sehr wahrscheinlich, ja wir dürfen wohl sagen, sicher kleiner war als bei der natürlichen Einatmung. Meine Vergleichsrechnung ist daher umgekehrt, wie Van Gelderen meint, für die »Äußeren« noch zu ungünstig. (Auch darin ist Van Gelderen ein Fehler unterlaufen, daß er sagt, daß das Produkt aus der Verkürzung und dem Querschnitt das Arbeitsmaß ergäbe; in Wahrheit muß der Querschnitt natürlich noch mit der Krafteinheit, also ungefähr mit 10 kg vervielfacht werden. Daß bei der Querschnittbestimmung das Sehnengewebe ausgeschaltet wird, mag nebenbei bemerkt werden.) Die Verhältnisse liegen also folgendermaßen: Die »Äußeren« haben eine Atemverkürzung von mindestens 0.2 cm (wie bemerkt, ist diese Zahl für die natürliche Atmung wohl sogar zu klein); ihr Querschnitt ist aber (für beide Seiten) etwa 194 cm^2, d. i. soviel wie der Querschnitt der großen und mittleren Gesäßmuskeln beider Seiten zusammen. Die Treppenmuskeln aber haben eine Atemverkürzung von etwa 1.0 cm, also etwa das Fünffache der »Äußeren«; ihr Querschnitt ist aber nur etwa 6.92, also rund 7 cm^2. Die »Äußeren« würden also die gleiche Kraftleistung wie die Treppenmuskeln aufweisen, wenn sie (ihre fünffach geringere Verkürzungsgröße wettmachend) den fünffachen Querschnitt hätten, also $5 \times 6.92 = 34.6$ cm^2, rund 35 cm^2 Querschnitt besäßen. Statt dessen haben sie aber, wie bemerkt, nicht weniger wie 194 cm^2. Die Arbeitsmöglichkeit der Treppenmuskeln bei der Einatmung ist also auch bei für sie günstiger Berechnung weit kleiner als $^1/_5$ der »Äußeren«. Überdies habe ich darauf hingewiesen, daß man bei gewöhnlicher Einatmung keine Zusammenziehung der Treppenmuskeln feststellen kann, sondern nur bei heftiger, tiefer, besonders bei »aufseufzender« Einatmung.

Auf die Frage der Ausatmung in meiner Ausführung, daß offenbar auch eine aktive, nichtelastische Ausatmung geschehen kann ohne Zuhilfenahme der Bauchmuskeln, wofür gerade eben die »Inneren Zwischenrippenmuskeln« wie gemacht erscheinen, geht Van Gelderen übrigens nicht ein.

Um alle Zweifel zu zerstreuen, machte ich zweimal mit Unterstützung der physiologischen Herren Kollegen (1897 in C. Ludwigs physiologischer Anstalt in Leipzig mit M. v. Frey und 1909 in der physiologischen Anstalt von J. Gad der deutschen Universität in Prag mit Dr. Kahn) Versuche an Hunden, aus denen hervorgeht, daß beim Hund die Zwischenrippenmuskeln die Ein- und Ausatmung tatsächlich ausführen können. Das Wesentliche dieser Ver-

suche bestand darin, daß bei einem Hund, soweit möglich, alle sonstigen Ein- und Ausatmungsmuskeln durch Lähmung oder Durchschneidung ausgeschaltet wurden, so daß für die Atmung im wesentlichen nur noch die Zwischenrippenmuskeln in Betracht kamen. Die letzteren blieben bei diesen Versuchen absichtlich ganz unbehelligt, während bei den Versuchen Hallers u. a. die Äußeren Zwischenrippenmuskeln zum Teil weggenommen wurden, um die Wirkung der Inneren beobachten zu können. Beide Male ergab unser Versuch in einwandfreier Weise, daß die Ein- und Ausatmung in kräftiger Weise vollzogen wurde. Auch Bergendal und Bergmann in Stockholm sahen bei ähnlichen Versuchen den gleichen Erfolg. Van Gelderen wendet gegen den Versuch ein, daß noch der »Viereckige Lendenmuskel« und der gemeinsame Rückenstrecker erhalten gewesen wären, und ersterer die Ausatmung, letzterer, z. B. durch die Wirbelsäulenstreckung, die Einatmung hätte beeinflussen können. Ich kann Hrn. Van Gelderen nur anempfehlen, den Versuch einmal selbst auszuführen, dann wird er sich, wie jeder, der ihn mit angesehen hat, von der Richtigkeit meiner Darstellung überzeugen, daß die Ein- und Ausatmung in diesem Fall, wie in dem obenerwähnten Hambergerschen mit Froschmuskeln bespannten Schema, lediglich durch die Zwischenrippenmuskeln erfolgt. Von einer Wirbelsäulenstreckung oder Ausatmungswirkung des Viereckigen Lendenmuskels ist nichts zu sehen. Übrigens habe ich ausdrücklich angegeben, daß ich bei der Wiederholung des Versuches zum Schlusse auch die Zwischenrippenmuskeln nacheinander durchschnitt. Dabei wurde auch der Viereckige Lendenmuskel seiner Einwirkungsmöglichkeit auf die oberen Rippen völlig beraubt, da die 12. Rippe nur durch die Zwischenrippenmuskeln mit der 11. verbunden ist. Überdies wurde der Rumpfstrecker genau beobachtet und keinerlei Tätigkeit an ihm festgestellt.

Van Gelderen läßt sich übrigens auch nicht die letzte Zuflucht, die angesichts der erdrückenden Beweisfülle den hartnäckigsten Zweiflern an der Atemwirkung der Zwischenrippenmuskeln noch übrigbleibt, entgehen, indem er, wie z. B. merkwürdigerweise auch H. Strasser, der sonst der Mechanik in der Anatomie warm das Wort redet, sagt, durch die Versuche werde nur bewiesen, daß die Zwischenrippenmuskeln die Atembewegungen beim Hunde ausführen könnten, nicht aber, daß sie die gewöhnlichen Atembewegungen beim Hund oder gar beim Menschen ausführten.

Dieser Einwand muß aber doch eigentlich jedem mechanisch überlegenden, unbefangenen Beurteiler der Frage fast als nicht ernstgemeint, als gekünstelte Rechthaberei anmuten. Denn jedem mechanisch gebildeten Mediziner, der das Schema Hambergers und das Zutreffen seiner Folgerungen auf den ganzen Brustkorb kennt, erscheint es eben von vornherein selbstverständlich, als eine selbstverständliche Folge der nun einmal tatsächlich vorhandenen mechanischen Einrichtungen des Brustkorbes, daß die äußeren Zwischenrippenmuskeln und die Zwischenknorpelmuskeln die von der Natur gegebenen Einatmer, die inneren die Ausatmer sind. Früher konnte ein solcher, der Mechanik kundiger Mediziner an der Richtigkeit dieser »Selbstverständlichkeit« durch die unzweckmäßigen Versuche A. v. Hallers und anderer Gelehrten, bei denen die Ausatmungswirkung der »Inneren« nicht

zutage trat (da die Zwischenrippennerven der Verletzung ausgesetzt waren), vielleicht etwas stutzig werden; sowie er nun aber hört oder sieht, daß die beiden Zwischenrippenmuskeln beim Hund tatsächlich selbsttätig eine kräftige Ein- und Ausatmung allein bewirken können, wird er sagen, daß dadurch eben die von vornherein sich aufdrängende »Selbstverständlichkeit« wieder in ihr Recht gesetzt wird.

Ich darf wohl die Erwartung hegen, daß die von anderen und mir früher und neuerdings angeführten Tatsachen und Schlüsse so eindeutig und zwingend sind, daß sich auch die, freilich wohl überhaupt nur noch sehr spärlichen Gegner der »Atemwirkung der Zwischenrippenmuskeln« von ihrer Richtigkeit überzeugen werden.

Berlin, Anatomische Anstalt der Universität. Jänner 1923.

Ausgegeben am 17. April.

SITZUNGSBERICHTE
DER PREUSSISCHEN
AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.
1923

X. Gesamtsitzung. 22. März.

Vorsitzender Sekretar: Hr. Roethe.

1. Hr. Petersen sprach über Die Entstehung der Eckermannschen Gespräche und ihre Glaubwürdigkeit. (Ersch. später.)

Die mit Heranziehung der Tagebücher und Briefe Goethes, der Gesprächaufzeichnungen anderer, der Briefe Eckermanns und der Papiere seines Nachlasses unternommene Kritik läßt einen durch Eckermanns Lebensverhältnisse bedingten periodischen Wechsel zwischen treuer Wiedergabe und Nachlässigkeit erkennen. Unmittelbare Aufzeichnungen wurden ausgearbeitet im Juni 1823, Winter 1824/25, Anfang 1827, Frühjahr 1829, Februar und März 1830, Anfang 1831. Perioden lückenhafter Aufzeichnung liegen namentlich in den Jahren 1824, 1825, 1828 und der zweiten Hälfte 1829. Diese Lücken wurden zum Teil nachträglich durch unzuverlässig rekonstruierte Gespräche ausgefüllt. Die Form der Gespräche läßt 6 verschiedene Typen erkennen: 1. unmittelbare Tagebuchaufzeichnungen in Rohform, 2. redigierte Gespräche, die Goethe zur Prüfung vorgelegt wurden, 3. zusammenhanglose wörtliche Aufzeichnungen, 4. Zusammenfassung von Aufzeichnungen verschiedenartigen Ursprunges, 5. Rekonstruktion mit fremden Hilfsmitteln, 6. Rekonstruktion nach dem Gedächtnis. Das Material der Gespräche läßt sich nach diesen Gesichtspunkten aufteilen und die Zuverlässigkeit der Goethe in den Mund gelegten Äußerungen danach im einzelnen bewerten.

2. Hr. Sachau legte vor seine Abhandlung »Ein Verzeichnis muhammedanischer Dynastien.« (Abh.)

Die historische Wissenschaft der islamischen Welt pflegt die Darstellung der Geschichte des Islams in Asien, Afrika und Europa zu ordnen nach den Dynastien, die jeweilig regiert haben. Die Zahl dieser Dynastien beträgt einige Hunderte. Die bedeutendsten derselben wie die Omajjaden und Abbasiden sind längst in besonders übersichtlichen Darstellungen behandelt worden. Hieran schließt sich die vorliegende Abhandlung, in der auch die weniger hervorragenden Dynastien in der Länge und Breite des Islams übersichtlich in chronologischer und geographischer Hinsicht sowie in ihrem geschichtlichen Zusammenhange aufgeführt und behandelt werden.

3. Hr. Engler überreichte das 82. und 83. Heft des Werkes »Das Pflanzenreich«: IV. 280. *Compositae-Hieracium*, Abt. II. Sect. XL. *Pilosellina* — Sect. XLVII. *Praealtina*, von K. H. Zahn (Leipzig 1923) und IV. 50. *Orchidaceae-Monandrae-Pseudomonopodiales*, von Fr. Kränzlin (Leipzig 1923).

4. Das korrespondierende Mitglied, Hr. Griffith, übersandte seine »Oxford excavations in Nubia« (Sonderabdruck).

Das korrespondierende Mitglied der philosophisch-historischen Klasse, Hr. Basil Latyschew in Petersburg, ist am 2. Mai 1921, das korrespondierende Mitglied der physikalisch-mathematischen Klasse, Hr. Johannes Diderik van der Waals in Amsterdam, am 8. März 1923 verstorben.

Ausgegeben am 17. April.

SITZUNGSBERICHTE

DER PREUSSISCHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

1923

XI. Sitzung der physikalisch-mathematischen Klasse. 5. April.

Vorsitzender Sekretar: i. V. Hr. Planck.

*Hr. v. Laue trägt über eine Untersuchung von W. Radt vor: Die Bremsung bewegter Ladungen beim Überfliegen leitender Körper.

Aus den Maxwellschen Gleichungen wird das elektromagnetische Feld ermittelt, welches eine bewegte Ladung hervorruft, wenn sie über eine leitende Oberfläche dahinfliegt. Die Kraft, die sich dabei ergibt, ist zu gering, um bei den Versuchen mit Kathoden- oder anderen korpuskularen Strahlen bemerkt zu werden.

Ausgegeben am 17. April.

Berlin, gedruckt in der Reichsdruckerei.

1923 **XII. XIII. XIV**

SITZUNGSBERICHTE

DER PREUSSISCHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

Physikalisch-mathematische Klasse

BERLIN 1923

VERLAG DER AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

IN KOMMISSION BEI WALTER DE GRUYTER U. CO.

Aus dem Reglement für die Redaktion der akademischen Druckschriften

Aus § 1.

Die Akademie gibt gemäß § 41, 1 der Statuten zwei fortlaufende Veröffentlichungen heraus: »Sitzungsberichte der Preußischen Akademie der Wissenschaften« und »Abhandlungen der Preußischen Akademie der Wissenschaften«.

Aus § 2.

Jede zur Aufnahme in die Sitzungsberichte oder die Abhandlungen bestimmte Mitteilung muß in einer akademischen Sitzung vorgelegt werden, wobei in der Regel das druckfertige Manuskript zugleich einzuliefern ist. Nichtmitglieder haben hierzu die Vermittelung eines ihrem Fache angehörenden ordentlichen Mitgliedes zu benutzen.

§ 3.

Der Umfang einer aufzunehmenden Mitteilung soll in der Regel in den Sitzungsberichten bei Mitgliedern 32, bei Nichtmitgliedern 8 Seiten in der gewöhnlichen Schrift der Sitzungsberichte, in den Abhandlungen 12 Druckbogen von je 8 Seiten in der gewöhnlichen Schrift der Abhandlungen nicht übersteigen.

Überschreitung dieser Grenzen ist nur mit Zustimmung der Gesamtakademie oder der betreffenden Klasse statthaft und ist bei Vorlage der Mitteilung ausdrücklich zu beantragen. Läßt der Umfang eines Manuskripts vermuten, daß diese Zustimmung erforderlich sein werde, so hat das vorlegende Mitglied es vor dem Einreichen von sachkundiger Seite auf seinen mutmaßlichen Umfang im Druck abschätzen zu lassen.

§ 4.

Sollen einer Mitteilung Abbildungen im Text oder auf besonderen Tafeln beigegeben werden, so sind die Vorlagen dafür (Zeichnungen, photographische Originalaufnahmen usw.) gleichzeitig mit dem Manuskript, jedoch auf getrennten Blättern, einzureichen.

Die Kosten der Herstellung der Vorlagen haben in der Regel die Verfasser zu tragen. Sind diese Kosten aber auf einen erheblichen Betrag zu veranschlagen, so kann die Akademie dazu eine Bewilligung beschließen. Ein darauf gerichteter Antrag ist vor der Herstellung der betreffenden Vorlagen mit dem schriftlichen Kostenanschlage eines Sachverständigen an den vorsitzenden Sekretar zu richten, dann zunächst im Sekretariat vorzuberaten und weiter in der Gesamtakademie zu verhandeln.

Die Kosten der Vervielfältigung übernimmt die Akademie. Über die voraussichtliche Höhe dieser Kosten ist — wenn es sich nicht um wenige einfache Textfiguren handelt — der Kostenanschlag eines Sachverständigen beizufügen. Überschreitet dieser Anschlag für die erforderliche Auflage 5000 Mark, so ist Vorberatung durch das Sekretariat geboten.

Aus § 5.

Nach der Vorlegung und Einreichung des **vollständigen druckfertigen** Manuskripts an den zuständigen Sekretar oder an den Archivar wird über Aufnahme der Mitteilung in die akademischen Schriften, und zwar, wenn eines der anwesenden Mitglieder es verlangt, verdeckt abgestimmt.

Mitteilungen von Verfassern, welche nicht Mitglieder der Akademie sind, sollen der Regel nach nur in die Sitzungsberichte aufgenommen werden. Beschließt eine Klasse die Aufnahme der Mitteilung eines Nichtmitgliedes in die Abhandlungen, so bedarf dieser Beschluß der Bestätigung durch die Gesamtakademie.

Aus § 6.

Die an die Druckerei abzuliefernden Manuskripte müssen, wenn es sich nicht bloß um glatten Text handelt, ausreichende Anweisungen für die Anordnung des Satzes und die Wahl der Schriften enthalten. Bei Einsendungen Fremder sind diese Anweisungen von dem vorlegenden Mitgliede vor Einreichung des Manuskripts vorzunehmen. Dasselbe hat sich zu vergewissern, daß der Verfasser seine Mitteilung als vollkommen druckreif ansieht.

Die erste Korrektur ihrer Mitteilungen besorgen die Verfasser. Fremde haben diese erste Korrektur an das vorlegende Mitglied einzusenden. Die Korrektur soll nach Möglichkeit nicht über die Berichtigung von Druckfehlern und leichten Schreibversehen hinausgehen. Umfängliche Korrekturen Fremder bedürfen der Genehmigung des redigierenden Sekretars vor der Einsendung an die Druckerei, und die Verfasser sind zur Tragung der entstehenden Mehrkosten verpflichtet. Übersteigen die Kosten der Korrektur einen gewissen Prozentsatz der Satzkosten, so fallen die Mehrkosten den Verfassern selbst ganz oder teilweise zur Last.

Aus § 8.

Von allen in die Sitzungsberichte oder Abhandlungen aufgenommenen wissenschaftlichen Mitteilungen, Reden, Adressen oder Berichten werden für die Verfasser, von wissenschaftlichen Mitteilungen, wenn deren Umfang im Druck 4 Seiten übersteigt, auch für den Buchhandel Sonderabdrucke hergestellt, die alsbald nach Erscheinen ausgegeben werden.

Von Gedächtnisreden werden ebenfalls Sonderabdrucke für den Buchhandel hergestellt, indes nur dann, wenn die Verfasser sich ausdrücklich damit einverstanden erklären.

§ 9.

Von den Sonderabdrucken aus den Sitzungsberichten erhält ein Verfasser, welcher Mitglied der Akademie ist, zu unentgeltlicher Verteilung ohne weiteres 50 Freiexemplare; er ist indes berechtigt, zu gleichem Zwecke auf Kosten der Akademie weitere Exemplare bis zur Zahl von noch 100 und auf seine Kosten noch weitere bis zur Zahl von 200 (im ganzen also 350) abziehen zu lassen, sofern er dies rechtzeitig dem redigierenden Sekretar angezeigt hat; wünscht er auf seine Kosten noch mehr Abdrucke zur Verteilung zu erhalten, so bedarf es dazu der Genehmigung der Gesamtakademie oder der betreffenden Klasse. — Nichtmitglieder erhalten 50 Freiexemplare und dürfen nach rechtzeitiger Anzeige bei dem redigierenden Sekretar weitere 200 Exemplare auf ihre Kosten abziehen lassen.

Von den Sonderabdrucken aus den Abhandlungen erhält ein Verfasser, welcher Mitglied der Akademie ist, zu unentgeltlicher Verteilung ohne weiteres 30 Freiexemplare; er ist indes berechtigt, zu gleichem Zwecke auf Kosten der Akademie weitere Exemplare bis zur Zahl von noch 100 und auf seine Kosten noch weitere bis zur Zahl von 100 (im ganzen also 230) abziehen zu lassen, sofern er dies rechtzeitig dem redigierenden Sekretar angezeigt hat; wünscht er auf seine Kosten noch mehr Abdrucke zur Verteilung zu erhalten, so bedarf es dazu der Genehmigung der Gesamtakademie oder der betreffenden Klasse. — Nichtmitglieder erhalten 30 Freiexemplare und dürfen nach rechtzeitiger Anzeige bei dem redigierenden Sekretar weitere 100 Exemplare auf ihre Kosten abziehen lassen.

(Fortsetzung auf S. 3 des Umschlags.)

SITZUNGSBERICHTE
DER PREUSSISCHEN
AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.
1923

XII. Gesamtsitzung. 12. April.

Vorsitzender Sekretar: Hr. Roethe.

1. Hr. Einstein legte eine weitere Mitteilung 'Zur allgemeinen Relativitätstheorie' vor.

Beweislose Zusammenfassung der mathematischen Grundrelationen, auf denen die neue, nur auf die Theorie des affinen Zusammenhanges gegründete Theorie der Gravitation und Elektrizität beruht.

2. Hr. Burdach überreichte seinen Aufsatz »Faust und die Sorge« (Sonderabdruck aus der Deutschen Vierteljahrsschrift Bd. I), Hr. Ed. Meyer den Abdruck seiner Rede »Fünfundzwanzig Jahre Deutsche Orient-Gesellschaft« (1923), Hr. Johnsen seinen Nachruf »Theodor Liebisch« (Sonderabdruck aus der Zeitschrift für Krystallographie LVII, 1923).

3. Vorgelegt wird: »Beiträge zur Flora von Papuasien IX«, herausgegeben von C. Lauterbach (Leipzig 1923).

Die Akademie hat durch ihre physikalisch-mathematische Klasse dem Hrn. Dr. Georg Struve in Neubabelsberg 9000 Mark bewilligt zur Fortführung seiner Beobachtungen der Saturntrabanten.

Bemerkung zu meiner Arbeit »Zur allgemeinen Relativitätstheorie«[1].

Von A. Einstein.

Im folgenden soll das formal Wesentliche der in der zitierten Arbeit aufgestellten Theorie noch einmal übersichtlich zusammengestellt werden, bereichert um eine neue Hamiltonsche Ausdrucksform der Theorie, welche die Beziehung zu der allgemeinen Relativitätstheorie in ihrer ursprünglichen Gestalt besonders klar hervortreten läßt.

Es wird ein affiner Zusammenhang in dem Raum-Zeit-Kontinuum gemäß der Formel

$$\delta A^{\mu} = -\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} A^{\alpha} dx_{\beta} \tag{1}$$

zugrunde gelegt, welcher nur durch die Symmetriebedingung

$$\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} = \Gamma^{\mu}_{\beta\alpha}$$

a priori eingeschränkt ist. Aus ihm folgt die Existenz des Riemann-Tensors zweiten Ranges

$$r_{kl} = -\frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{kl}}{\partial x_{\alpha}} + \Gamma^{\alpha}_{k\beta}\Gamma^{\beta}_{l\alpha} + \frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{k\alpha}}{\partial x_l} - \Gamma^{\alpha}_{kl}\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta} \tag{2}$$

sowie der Umstand, daß die Determinante $r = |r_{kl}|$ den Charakter des Quadrates einer skularen Dichte hat. Hieraus folgt die Invarianz des Fundamentalgesetzes der Theorie

$$\delta\left\{\int \sqrt{-r}\, d\tau\right\} = 0\,. \tag{3}$$

Hierbei sind die r_{kl} durch die Γ ausgedrückt zu denken, und es ist nach den Größen Γ zu variieren. Man erhält so 40 Gleichungen, welche sich nach den Größen Γ auflösen lassen. Dies liefert

$$\Gamma^{\alpha}_{kl} = \frac{1}{2} s^{\alpha\beta}\left(\frac{\partial s_{k\beta}}{\partial x_l} + \frac{\partial s_{l\beta}}{\partial x_k} - \frac{\partial s_{kl}}{\partial x_{\beta}}\right) - \frac{1}{2} s_{kl} i^{\alpha} + \frac{1}{6}\delta^{\alpha}_{k} i_l + \frac{1}{6}\delta^{\alpha}_{l} i_k\,. \tag{4}$$

Die Größen s und i hängen dabei mit den Größen r wie folgt zusammen: Es seien r^{kl} die normierten Unterdeterminanten zu den r_{kl}, ferner sei $\mathfrak{r}^{kl}$ die zugehörige Tensordichte

$$\mathfrak{r}^{kl} = r^{kl}\sqrt{-r}\,, \tag{5}$$

[1] Sitzungsber. 1923, S. 32.

$\mathfrak{r}^{kl}$ werde in den symmetrischen und antisymmetrischen Bestandteil zerlegt gemäß der Formel

$$\mathfrak{r}^{kl} = \mathfrak{s}^{kl} + \mathfrak{f}^{kl}. \tag{6}$$

Die Größen s leiten sich aus den Größen $\mathfrak{s}$ gemäß den Relationen ab:

$$s_{\alpha\lambda} s^{\beta\lambda} = \delta_\alpha^\beta \tag{7}$$

$$s = |s_{kl}| \tag{8}$$

$$\mathfrak{s}^{kl} = s^{kl}\sqrt{-s}\,, \tag{9}$$

die Größen i aus den Größen $\mathfrak{s}$ und $\mathfrak{f}$ gemäß den Relationen

$$\mathfrak{i}^k = \frac{\partial \mathfrak{f}^{k\alpha}}{\partial x_\alpha} \tag{10}$$

$$\mathfrak{i}^k = i^k\sqrt{-s} \tag{11}$$

$$i_k = s_{k\alpha} i^\alpha\,. \tag{12}$$

Durch Einsetzen von (4) in (2) erhält man die Feldgleichungen

$$r_{kl} = R_{kl} + \frac{1}{6}\left[\left(\frac{\partial i_k}{\partial x_l} - \frac{\partial i_l}{\partial x_k}\right) + i_k i_l\right], \tag{13}$$

welche — in ihren symmetrischen und antisymmetrischen Bestandteil zerlegt — die Feldgleichungen der Gravitation und des Elektromagnetismus ergeben. R_{kl} bedeutet den Riemannschen Krümmungstensor, gebildet aus den s_{kl} als metrischem Fundamentaltensor.

Die Gleichungen (13) lassen sich in die Form des Hamiltonschen Prinzips bringen

$$\delta\left\{\int\left[-2\sqrt{-r} + \mathfrak{R} - \frac{1}{6}\mathfrak{s}^{\alpha\beta} i_\alpha i_\beta\right] d\tau\right\} = 0\,, \tag{14}$$

wobei $\mathfrak{R}$ die skalare Dichte der zum Fundamentaltensor s_{ik} gehörigen Riemann-Krümmung ist und die Variation nach den $\mathfrak{s}^{kl}$ und $\mathfrak{f}^{kl}$ vorzunehmen ist. Die Gleichung (14) zeigt, daß — im Gegensatz zu der in der ersten Arbeit geäußerten Ansicht — zu jeder Lösung eine zweite gehört, welche sich von der ersteren nur durch das Vorzeichen der Komponenten des elektromagnetischen Feldes unterscheidet; denn r bzw. $|\mathfrak{r}^{k\lambda}|$ ist eine gerade Funktion des antisymmetrischen Bestandteils $\mathfrak{f}^{kl}$ der $\mathfrak{r}^{kl}$ und das dritte Glied in (14) quadratisch in den Stromdichten. Die Theorie vermag also jedenfalls von der Verschiedenheit der Masse der positiven und negativen Elektronen keine Rechenschaft zu geben.

Ich habe im vorstehenden alle Beweise und Rechnungen fortgelassen, um den Bau der Theorie klar hervortreten zu lassen.

Ausgegeben am 15. Mai.

SITZUNGSBERICHTE
DER PREUSSISCHEN
AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.
1923

XIII. Sitzung der physikalisch-mathematischen Klasse. 19. April.

Vorsitzender Sekretar: i. V. Hr. Planck.

Hr. Schottky sprach Über die Gleichung $U^2\left((du)^2+(dv)^2\right)+W^2(dw)^2 = (dx)^2+(dy)^2+(dz)^2$.

Wenn die Gleichung besteht, so läßt sich stets durch eine konforme Abbildung der (u, v)-Ebene erreichen, daß

$$\frac{x}{U}, \quad \frac{y}{U}, \quad \frac{z}{U}, \quad \frac{W}{U} \quad \text{und} \quad \frac{1}{U}$$

lineare oder quadratische Funktionen von u, v werden, deren Koeffizienten nur von w abhängen.

Über die Gleichung $U^2\big((du)^2+(dv)^2\big)+W^2(dw)^2=(dx)^2+(dy)^2+(dz)^2$.

Von F. SCHOTTKY.

Stellt man die Formel auf:

$$(Udu)^2+(Vdv)^2+(Wdw)^2=(dx)^2+(dy)^2+(dz)^2,$$

in der du, dv, dw und dx, dy, dz die Differentiale dreier unabhängigen Veränderlichen u, v, w und dreier Funktionen von ihnen, x, y, z bedeuten, so hat man damit das Problem der dreifach orthogonalen Flächensysteme in Angriff genommen. Denn da die Formel für beliebige Werte, nicht nur von u, v, w, sondern auch von du, dv, dw bestehen soll, so folgt aus ihr, daß

$$\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial w}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}=0$$

sein muß; dies aber ist die Bedingung dafür, daß die Tangenten zweier von einem Punkte ausgehender Linien, auf deren einer nur u, auf deren anderer nur v veränderlich ist, aufeinander senkrecht stehen.

Hier handelt es sich, abgesehen von einigen allgemeinen vorbereitenden Sätzen, im wesentlichen nur um diejenigen Lösungen des Problems, bei denen zwei der drei Faktoren U, V, W einander gleich sind. Eine Frage ist: Wie müssen, falls wir $V=U$ annehmen, die Faktoren U und W, als Funktionen von u, v, w beschaffen sein, damit die vorausgesetzte Formel möglich wird? Eine zweite: Wie bestimmt man, wenn U und W die richtige Beschaffenheit haben, die Funktionen x, y, z?

Ein Blick auf die Formel zeigt, daß das Problem im Falle, wo $V=U$ ist, an einer Unbestimmtheit leidet. Hat man eine Lösung, so hat man unmittelbar unendlich viele, die aus einer durch konforme Abbildung einer Ebene hervorgehen. Denn indem man an die Stelle von u und v Funktionen von u und v setzt, und zwar zugeordnete harmonische, verändert sich $(du)^2+(dv)^2$ nur um einen Faktor (dessen Logarithmus gleichfalls eine harmonische Funktion von u, v ist). Dieser Faktor kann mit U^2 vereinigt werden, so daß die Form der Gleichung bestehen bleibt.

Aber von den unendlich vielen zusammengehörigen Lösungen braucht uns immer nur eine zu interessieren; wir wählen natürlich die einfachste.

§ 1.

Man könnte die Aufgabe verallgemeinern. Wir denken uns $2n$ reelle Funktionen von n reellen Veränderlichen. Dann besteht zwischen je $n+1$ derselben eine Gleichung; wir setzen voraus, daß zwischen weniger als $n+1$ keine Gleichung bestehe. Dann sind die Differentiale von je n dieser Funktionen unabhängige Größen, und die n übrigen ganz bestimmte lineare Funktionen der n ausgewählten. Man setze voraus, daß zwischen den Quadraten aller $2n$ Differentiale eine lineare Gleichung bestehe:

$$\sum_{\lambda=1}^{n} \pm (U_\lambda du_\lambda)^2 = 0,$$

die identisch befriedigt wird, wenn man durch n der Größen du_λ die übrigen linear ausdrückt; die Anzahl der positiven Vorzeichen in dieser Gleichung muß offenbar gleich der der negativen, also gleich n sein. Die Frage ist: Welche Beschaffenheit müssen die Faktoren U_λ haben? Es wäre keine Schwierigkeit, Differentialgleichungen in großer Menge aufzustellen, denen sie genügen müssen. Aber es verhält sich hier ähnlich wie bei den Thetarelationen: da man die Gleichungen nicht allgemein auflösen kann, so begnügt man sich mit Spezialfällen, und die einfachste Voraussetzung, die man machen kann, ist die, daß die Faktoren U_λ zwar nicht sämtlich, aber gruppenweise, etwa in zwei oder drei Gruppen, einander gleich seien.

In diese Kategorie gehört die Gleichung:

$$\sum_{\lambda=1}^{n} (U_\lambda du_\lambda)^2 = \sum_{\lambda=1}^{n} (dx_\lambda)^2,$$

und wir wollen hier wenigstens die Differentialgleichungen, denen die Faktoren U_λ, betrachtet als Funktionen von $u_1 \cdots u_n$, genügen müssen, aufstellen, in so einfacher Form, als es möglich ist.

Wir gehen von den Differentialen dx_λ aus, die willkürlich sind, und setzen:

$$\sum (dx_\lambda)^2 = (ds)^2,$$

$$\frac{dx_\lambda}{ds} = \alpha_\lambda,$$

$$\frac{U_\mu du_\mu}{ds} = \phi_\mu.$$

Dann ist:

$$\sum_{\mu=1}^{n} \phi_\mu^2 = \sum \alpha_\lambda^2 = 1.$$

Die α_λ sind also nicht ganz willkürlich, aber es besteht zwischen ihnen keine homogene Gleichung.

Die ϕ_μ aber sind lineare Funktionen der α_λ. Da

$$dx_\lambda = \sum_{\mu=1}^{n} \frac{\partial x_\lambda}{\partial u_\mu} du_\mu$$

ist, so bestehen die n linearen Gleichungen:

$$\alpha_\lambda = \sum_{\mu=1}^{n} c_{\lambda\mu}\,\phi_\mu\,, \qquad (\lambda = 1, 2 \cdots n)$$

wo

$$c_{\lambda\mu} = \frac{1}{U_\mu}\frac{\partial x_\lambda}{\partial u_\mu}$$

ist. Da $\sum \alpha_\lambda^2 = \sum \phi_\mu^2$ ist, so werden sie aufgelöst durch die Formeln:

$$\phi_\mu = \sum_{\lambda=1}^{n} c_{\lambda\mu}\,\alpha_\lambda\,. \qquad (\mu = 1, 2 \cdots n)$$

Es ist also:

$$\phi_\mu = \frac{1}{U_\mu}\sum_{\lambda=1}^{n}\left(\alpha_\lambda \frac{\partial x_\lambda}{\partial u_\mu}\right),$$

und wenn man das lineare Aggregat der Funktionen $x_1, x_2 \cdots x_n$:

$$\sum (\alpha_\lambda x_\lambda)$$

mit ϕ bezeichnet, so ist:

$$\phi_\mu = \frac{1}{U_\mu}\frac{\partial \phi}{\partial u_\mu}\,.$$

Es genügt demnach, bei Werten der α, die durch die Gleichung $\sum \alpha_\lambda^2 = 1$ verbunden, sonst aber ganz willkürlich sind, die Differentialgleichung erster Ordnung aufzulösen:

$$\sum \left(\frac{\partial \phi}{U_\mu\,\partial u_\mu}\right)^2 = 1\,,$$

die wir die Hauptgleichung nennen wollen. Die Annahme, daß eine Lösung dieser Hauptgleichung existiere, mit n nur durch die Formel $\sum \alpha_\lambda^2 = 1$ verbundenen Parametern, ist völlig gleichbedeutend mit der Annahme der Grundgleichung $\sum (U_\mu du_\mu)^2 = \sum (dx_\lambda)^2$.

Es handelt sich hier um Linearformen, deren Koeffizienten Funktionen der n Größen u_λ sind. Man könnte diese Formen als komplexe Größen bezeichnen und ihre Koeffizienten als Koordinaten oder Komponenten. Jedenfalls bietet die Einführung der Linearform ϕ den Vorteil, daß man nur mit einer Größe statt mit n zu rechnen hat.

Die n Größen ϕ_λ, und ebenso ihre n^2 Ableitungen $\dfrac{\partial \phi_\lambda}{\partial u_\mu}$, sind lineare Funktionen der α; die α aber lassen sich umgekehrt linear durch die ϕ_μ ausdrücken. Folglich kann man jeden dieser Differentialquotienten linear durch $\phi_1, \phi_2 \cdots \phi_n$ darstellen mit Koeffizienten, die von den Größen α unabhängig sind. Wir setzen:

$$\frac{\partial \phi_\lambda}{U_\mu\,\partial u_\mu} = \sum_{\nu=1}^{n} (\lambda, \mu, \nu)\,\phi_\nu\,.$$

Zur Bestimmung der n^3 Koeffizienten (λ, μ, ν) kann zuerst die Gleichung $\sum \phi_\lambda^2 = 1$ dienen. Wenn man sie nach u_μ differenziert, erhält man:

$$\sum_{\lambda=1}^{n} \sum_{\nu=1}^{n} (\lambda, \mu, \nu)\, \phi_\lambda \phi_\nu = 0 .$$

Und zwar muß dies identisch 0 sein, da zwischen den ϕ_λ keine homogene Gleichung besteht. Es muß also

$$(\lambda, \mu, \nu) + (\nu, \mu, \lambda) = 0 ,$$

und speziell

$$(\lambda, \mu, \lambda) = 0 , \quad (\lambda, \lambda, \lambda) = 0$$

sein.

Eine zweite Beziehung zwischen den Koeffizienten (λ, μ, ν) ergibt sich, wenn wir λ von μ verschieden annehmen, und von den beiden Gleichungen $\frac{\partial \phi}{\partial u_\lambda} = U_\lambda \phi_\lambda$, $\frac{\partial \phi}{\partial u_\mu} = U_\mu \phi_\mu$ die erste nach u_μ, die zweite nach u_λ differenzieren. Dies gibt:

$$\frac{1}{U_\lambda U_\mu} \frac{\partial^2 \phi}{\partial u_\lambda \partial u_\mu} = \frac{1}{U_\mu} \frac{\partial \phi_\lambda}{\partial u_\mu} + \frac{\phi_\lambda}{U_\lambda} \frac{1}{U_\mu} \frac{\partial U_\lambda}{\partial u_\mu} = \frac{1}{U_\lambda} \frac{\partial \phi_\mu}{\partial u_\lambda} + \frac{\phi_\mu}{U_\mu} \frac{1}{U_\lambda} \frac{\partial U_\mu}{\partial u_\lambda} .$$

Wir führen, für je zwei verschiedene Zahlen λ, μ der Reihe $1, 2 \cdots n$, ein:

$$\frac{\partial U_\lambda}{U_\mu \partial u_\mu} = U_{\lambda\mu} .$$

Wir haben dann die Gleichung:

$$\frac{1}{U_\mu} \frac{\partial \phi_\lambda}{\partial u_\mu} - \frac{1}{U_\lambda} \frac{\partial \phi_\mu}{\partial u_\lambda} + \frac{U_{\lambda\mu}}{U_\lambda} \phi_\lambda - \frac{U_{\mu\lambda}}{U_\mu} \phi_\mu = 0 .$$

Danach ist:

$$\sum_{\nu=1}^{n} \big((\lambda, \mu, \nu) - (\mu, \lambda, \nu)\big)\, \phi_\nu + \frac{U_{\lambda\mu}}{U_\lambda} \phi_\lambda - \frac{U_{\mu\lambda}}{U_\mu} \phi_\mu = 0 .$$

Da die Größen ϕ_λ linear unabhängige Funktionen der α_λ sind, so muß, wenn alle drei Zahlen λ, μ, ν voneinander verschieden sind, $(\lambda, \mu, \nu) = (\mu, \lambda, \nu)$ sein. Für $\nu = \lambda$ dagegen erhält man — da dann $(\lambda, \mu, \nu) = 0$ ist:

$$(\mu, \lambda, \lambda) = \frac{U_{\lambda\mu}}{U_\lambda} ;$$

wobei λ, μ verschiedene Zahlen sind.

Sind alle drei Zahlen λ, μ, ν untereinander verschieden, so hat man die beiden Gleichungen: $(\lambda, \mu, \nu) = -(\nu, \mu, \lambda)$ und $(\lambda, \mu, \nu) = (\mu, \lambda, \nu)$. Daraus folgt einfach, durch Vertauschung der Zahlen λ, μ, ν, daß in diesem Falle $(\lambda, \mu, \nu) = 0$ ist.

Ebenso ist $(\lambda, \mu, \lambda) = 0$. Dagegen:

$$(\lambda, \mu, \mu) = \frac{U_{\mu\lambda}}{U_\mu} ,$$

und da $(\lambda, \mu, \mu) = -(\mu, \mu, \lambda)$ ist:

$$(\mu, \mu, \lambda) = -\frac{U_{\mu\lambda}}{U_\mu},$$

$$(\lambda, \lambda, \mu) = -\frac{U_{\lambda\mu}}{U_\lambda}.$$

Wir können jetzt das System der linearen Differentialgleichungen aufstellen, denen die Größen ϕ_λ genügen. Zunächst ist, wenn λ, μ zwei verschiedene Zahlen sind:

$$\frac{\partial \phi_\lambda}{U_\mu \partial u_\mu} = (\lambda, \mu, \mu)\,\phi_\mu.$$

Denn alle anderen Koeffizienten (λ, μ, ν) sind gleich 0, auch (λ, μ, λ). Es ist also, für $\lambda \lessgtr \mu$:

$$\frac{\partial \phi_\lambda}{\partial u_\mu} = U_{\mu\lambda}\phi_\mu.$$

Dagegen ist in der Gleichung

$$\frac{\partial \phi_\lambda}{U_\lambda \partial u_\lambda} = \sum_{\nu=1}^{n} (\lambda, \lambda, \nu)\,\phi_\nu$$

zwar der Koeffizient von ϕ_λ gleich 0. Sonst aber ist

$$(\lambda, \lambda, \nu) = -\frac{U_{\lambda\nu}}{U_\lambda};$$

es ergibt sich also:

$$\frac{\partial \phi_\lambda}{\partial u_\lambda} + \sum_\nu (U_{\lambda\nu}\phi_\nu) = 0,$$

wobei die Summe sich erstreckt über alle Zahlen der Reihe $1, 2 \cdots n$ mit Ausnahme von λ.

Dieses System von n^2 linearen partiellen Differentialgleichungen kann aber nur bestehen, wenn die Größen $U_{\lambda\mu}$, und damit die U_λ, selbst bestimmten, nicht linearen Differentialgleichungen genügen.

Wir nehmen wieder λ, μ als zwei verschiedene Zahlen an und schreiben die letzte Gleichung so:

$$\frac{\partial \phi_\lambda}{\partial u_\lambda} + U_{\lambda\mu}\phi_\mu + \sum_\nu (U_{\lambda\nu}\phi_\nu) = 0,$$

wo sich jetzt die Summe nur über die von λ und μ verschiedenen Zahlen der Reihe erstreckt. Wir differenzieren dies nach u_μ. Dann hat man erstens:

$$\frac{\partial \phi_\mu}{\partial u_\mu} + U_{\mu\lambda}\phi_\lambda + \sum_\nu (U_{\mu\nu}\phi_\nu) = 0.$$

Zweitens:

$$\frac{\partial \phi_\nu}{\partial u_\mu} = U_{\mu\nu}\phi_\mu.$$

Daher folgt:

$$\frac{\partial^2 \phi_\lambda}{\partial u_\lambda \partial u_\mu} + \frac{\partial U_{\lambda\mu}}{\partial u_\mu}\phi_\mu + \sum_\nu \frac{\partial U_{\lambda\nu}}{\partial u_\mu}\phi_\nu - U_{\lambda\mu}\left\{U_{\mu\lambda}\phi_\lambda + \sum_\nu U_{\mu\nu}\phi_\nu\right\} + \phi_\mu \sum_\nu (U_{\lambda\nu} U_{\mu\nu}) = 0.$$

Oder:

$$\frac{\partial^2 \phi_\lambda}{\partial u_\lambda \partial u_\mu} - U_{\lambda\mu} U_{\mu\lambda}\phi_\lambda + \left(\frac{\partial U_{\lambda\mu}}{\partial u_\mu} + \sum_\nu U_{\lambda\nu} U_{\mu\nu}\right)\phi_\mu + \sum_\nu \left(\frac{\partial U_{\lambda\nu}}{\partial u_\mu} - U_{\lambda\mu} U_{\mu\nu}\right)\phi_\nu = 0,$$

wobei sich die Summen durchweg über die von λ, μ verschiedenen Zahlen ν der Reihe $1, 2 \cdots n$ beziehen.

Andrerseits ist:

$$\frac{\partial \phi_\lambda}{\partial u_\mu} = U_{\mu\lambda}\phi_\mu, \quad \frac{\partial \phi_\mu}{\partial u_\lambda} = U_{\lambda\mu}\phi_\lambda,$$

und daher:

$$\frac{\partial^2 \phi_\lambda}{\partial u_\lambda \partial u_\mu} = \frac{\partial U_{\mu\lambda}}{\partial u_\lambda}\phi_\mu + U_{\lambda\mu} U_{\mu\lambda}\phi_\lambda.$$

Setzt man dies ein, so ergibt sich:

$$\left(\frac{\partial U_{\mu\lambda}}{\partial u_\lambda} + \frac{\partial U_{\lambda\mu}}{\partial u_\mu} + \sum_\nu U_{\lambda\nu} U_{\mu\nu}\right)\phi_\mu + \sum_\nu \left(\frac{\partial U_{\lambda\nu}}{\partial u_\mu} - U_{\lambda\mu} U_{\mu\nu}\right)\phi_\nu = 0,$$

und hier müssen die einzelnen Koeffizienten von ϕ_μ und ϕ_ν gleich 0 sein. Es ist demnach, wenn λ, μ, ν drei verschiedene Zahlen der Reihe bedeuten:

$$\frac{\partial U_{\lambda\mu}}{\partial u_\nu} = U_{\lambda\nu} U_{\nu\mu}$$

und, wenn λ und μ verschieden sind:

$$\frac{\partial U_{\lambda\mu}}{\partial u_\mu} + \frac{\partial U_{\mu\lambda}}{\partial u_\lambda} + \sum_\nu (U_{\lambda\nu} U_{\mu\nu}) = 0.$$

Die Summe erstreckt sich in der letzten Gleichung über die von λ und μ verschiedenen Zahlen ν der Reihe $1 \cdots n$.

Führen wir für $U_{\lambda\mu}$ und ϕ_λ die Ausdrücke ein:

$$U_{\lambda\mu} = \frac{\partial U_\lambda}{U_\mu \partial u_\mu}, \quad \phi_\lambda = \frac{\partial \phi}{U_\lambda \partial u_\lambda},$$

so haben wir für die Größen U_λ die beiden Differentialgleichungen:

$$\frac{\partial \left(\frac{\partial U_\lambda}{U_\mu \partial u_\mu}\right)}{\partial u_\nu} = \frac{1}{U_\mu U_\nu}\frac{\partial U_\lambda}{\partial u_\nu}\frac{\partial U_\nu}{\partial u_\mu},$$

$$\frac{\partial \left(\frac{\partial U_\lambda}{U_\mu \partial u_\mu}\right)}{\partial u_\mu} + \frac{\partial \left(\frac{\partial U_\mu}{U_\lambda \partial u_\lambda}\right)}{\partial u_\lambda} + \sum_\nu \left(\frac{1}{U_\nu^2}\frac{\partial U_\lambda}{\partial u_\nu}\frac{\partial U_\mu}{\partial u_\nu}\right) = 0$$

(wobei $\nu = \lambda$ und $\nu = \mu$ auszulassen ist).

Für ϕ haben wir die beiden linearen:

$$\frac{\partial}{\partial u_\mu}\left(\frac{\partial\phi}{U_\lambda\,\partial u_\lambda}\right)=\frac{1}{U_\lambda U_\mu}\frac{\partial U_\mu}{\partial u_\lambda}\frac{\partial\phi}{\partial u_\mu}, \qquad (\lambda \gtrless \mu)$$

$$\frac{\partial\left(\frac{1}{U_\lambda}\frac{\partial\phi}{\partial u_\lambda}\right)}{\partial u_\lambda}+\sum_\nu\left(\frac{1}{U_\nu^2}\frac{\partial U_\lambda}{\partial u_\nu}\frac{\partial\phi}{\partial u_\nu}\right)=0.$$

(Hier ist $\nu=\lambda$ auszulassen.)

Dazu tritt die Hauptgleichung, die nicht linear ist:

$$\sum_{\lambda=1}^{n}\frac{1}{U_\lambda^2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial u_\lambda}\right)^2=1.$$

Die fünf Gleichungen stellen aber ein ganzes System dar; denn man hat zu berücksichtigen, daß die Zahlen λ, μ untereinander und mit den $n-2$ übrigen vertauscht werden können.

§ 2.

Sucht man diejenige Lösung, bei der alle Faktoren U_λ einander gleich sind, so werden natürlich die Gleichungen sehr einfach, namentlich dann, wenn man den reziproken Wert der U_λ einführt:

$$U_\lambda=\frac{1}{N}. \qquad (\lambda=1,2\cdots n)$$

Ich kann mich hier ziemlich kurz fassen, denn ich kann mir nicht denken, daß das Problem der Formel

$$\sum_{\lambda=1}^{n}(du_\lambda)^2=N^2\sum_{\lambda=1}^{n}(dx_\lambda)^2$$

nicht schon behandelt ist; meine eigenen literarischen Kenntnisse auf dem weiten Felde der Geometrie sind nicht sehr ausgedehnt.

Hier handelt es sich nur um Gleichungen für N und ϕ. Es sind folgende:

$$\frac{\partial^2\log N}{\partial u_\mu\,\partial u_\nu}+\frac{\partial\log N}{\partial u_\mu}\frac{\partial\log N}{\partial u_\nu}=0, \qquad (\lambda \lessgtr \mu \lessgtr \nu)$$

$$\frac{\partial^2\log N}{\partial u_\lambda^2}+\frac{\partial^2\log N}{\partial u_\mu^2}=\sum_{\nu\text{ exkl. }\lambda,\mu}\left(\frac{\partial\log N}{\partial u_\nu}\right)^2, \qquad (\lambda \lessgtr \mu)$$

$$\frac{\partial\left(N\frac{\partial\phi}{\partial u_\lambda}\right)}{du_\mu}+\frac{\partial N}{\partial u_\lambda}\frac{\partial\phi}{\partial u_\mu}=0, \qquad (\lambda \lessgtr \mu)$$

$$\frac{\partial\left(N\frac{\partial\phi}{\partial u_\lambda}\right)}{\partial u_\lambda}=\sum_{\nu\text{ exkl. }\lambda}\left(\frac{\partial N}{\partial u_\nu}\frac{\partial\phi}{\partial u_\nu}\right).$$

Sie haben noch nicht die einfachste Form. Einfacher ist es, zu schreiben:

$$\frac{\partial^2 N}{du_\mu du_\nu} = 0, \qquad (\mu \lesseqgtr \nu)$$

$$N\left(\frac{\partial^2 N}{\partial u_\lambda^2} + \frac{\partial^2 N}{\partial u_\mu^2}\right) = \sum_{\nu=1}^{n}\left(\frac{\partial N}{\partial u_\nu}\right)^2, \qquad (\lambda \lesseqgtr \mu)$$

$$\frac{\partial^2 (N\phi)}{\partial u_\lambda \partial u_\mu} = 0, \qquad (\lambda \lesseqgtr \mu)$$

$$\frac{\partial^2 (N\phi)}{\partial u_\lambda^2} - \phi\frac{\partial^2 N}{\partial u_\lambda^2} = \sum_{\nu=1}^{n}\left(\frac{\partial N}{\partial u_\nu}\frac{\partial \phi}{\partial u_\nu}\right).$$

Die Gleichungen werden erfüllt, wenn N eine Konstante ist; $N\phi$, und damit ϕ, muß alsdann eine lineare Funktion von $u_1, u_2 \cdots u_n$ sein.

Ist N nicht konstant, so muß N notwendig die Form haben:

$$N = k\sum_{\nu=1}^{n}(u_\nu - a_\nu)^2,$$

wo k und $a_1 \cdots a_n$ konstante Werte bedeuten. $N\phi$ aber muß sich darstellen lassen in der Form

$$N\phi = N\phi_0 + \sum_{\nu=1}^{n} p_\nu (u_\nu - a_\nu),$$

wobei ϕ_0 und $p_1, p_2 \cdots p_n$ lineare Funktionen der Größen α mit konstanten Koeffizienten bedeuten.

Die Hauptgleichung geht aber dann über in:

$$\sum_{\nu=1}^{n} p_\nu^2 = 1.$$

Nehmen wir $n = 3$ an, wo es sich um den gewöhnlichen Raum handelt. Wir können dann den Körper (x_1, x_2, x_3) so drehen, daß die Größen p_ν mit den α_ν zusammenfallen, und so verschieben, daß $\phi_0 = 0$ wird. Die Transformation wird dann dargestellt durch:

$$Nx_\lambda = (u_\lambda - a_\lambda), \qquad (\lambda = 1, 2, 3)$$

und das bleibt auch richtig, wenn N eine Konstante ist.

Wir beschränken jetzt die Zahl n auf den Wert 3 und führen statt der x_λ ein: x, y, z; statt der u_λ und U_λ: u, v, w und U, V, W; statt $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$: α, β, γ, so daß ϕ die Linearform bedeutet

$$\phi = \alpha x + \beta y + \gamma z,$$

in der

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$$

angenommen wird, sonst aber α, β, γ willkürlich sind.

Zuerst stellen wir die Forderung auf: es soll

$$U = V = 1$$

sein, also die Formel bestehen:

$$(Wdw)^2=(dx)^2+(dy)^2+(dz)^2-(du)^2-(dv)^2.$$

Die Hauptgleichung ist dann:

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial\phi}{\partial v}\right)^2+\frac{1}{W^2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial w}\right)^2=1\,.$$

Die übrigen sagen nur aus, daß alle zweiten Ableitungen nach u und v, von ϕ sowohl wie von W, gleich 0 sein müssen, daß also W und ϕ in bezug auf u und v lineare Funktionen sind.

Wir setzen dann noch

$$\phi=\phi_0+pu+qv$$

$$\phi_0=\alpha\xi+\beta\eta+\gamma\zeta$$

$$\frac{1}{W}\frac{\partial\phi}{\partial w}=r.$$

ϕ_0, p und q sind dann Linearformen in α, β, γ, deren Koeffizienten nur von w abhängen. Von r gilt dasselbe, da nach der Hauptgleichung

$$p^2+q^2+r^2=1$$

ist.

Den Ausdruck für W bringen wir auf die Form:

$$W=\big(1-\varkappa\,(u\cos\vartheta+v\sin\vartheta)\big)\,\frac{ds}{dw}\,,$$

wobei $\varkappa$, ϑ und s Funktionen von w allein sind, $\varkappa$ positiv. — Es ist:

$$\frac{\partial\phi}{\partial w}=\frac{d\phi_0}{dw}+u\frac{dp}{dw}+v\frac{dq}{dw}\,.$$

Dies soll, bei beliebigen Werten von u, v, mit rW identisch sein. Es muß demnach:

$$\frac{d\phi_0}{ds}=r,\quad \frac{dp}{ds}=-\varkappa r\cos\vartheta,\quad \frac{dq}{ds}=-\varkappa r\sin\vartheta$$

sein. Die Gleichungen lassen sich geometrisch deuten. Unter dem »Punkt ϕ_0« verstehen wir den, dessen Koordinaten ξ, η, ζ sind; da ξ, η, ζ Funktionen von w sind, ist er auf eine Raumkurve beschränkt, die vollständig willkürlich bleibt. Unter den »Strecken p, q, r« verstehen wir die, deren Komponenten die Koeffizienten der Linearformen p, q, r sind; als ihren Anfangspunkt nehmen wir den »Punkt ϕ_0« an. Da, auch bei ganz willkürlichen Werten von α, β, γ, $p^2+q^2+r^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$ ist, so haben alle drei Strecken die Länge 1 und sind senkrecht gegeneinander gerichtet. Es ist $r=\frac{d\phi_0}{ds}$; daher sind die Komponenten von r:

$$\frac{d\xi}{ds},\quad\frac{d\eta}{ds},\quad\frac{d\zeta}{ds};$$

da r die Länge 1 hat, ist

$$\left(\frac{d\xi}{ds}\right)^2+\left(\frac{d\eta}{ds}\right)^2+\left(\frac{d\zeta}{ds}\right)^2=1;$$

es ist also s der Bogen der Kurve und r die Tangente. Weil ferner

$$p\frac{dp}{ds}+q\frac{dq}{ds}+r\frac{dr}{ds}=0$$

ist, so ist:

$$\frac{dr}{ds}=\varkappa\,(p\cos\vartheta+q\sin\vartheta)\,.$$

Wir setzen:

$$p\cos\vartheta+q\sin\vartheta=P$$
$$-p\sin\vartheta+q\cos\vartheta=Q\,.$$

Es sind dann P und Q ebenfalls zwei aufeinander und auf r senkrechte Strecken von der Länge 1; den Differentialquotienten des Winkels ϑ, den die eine mit p, die andere mit q einschließt, bezeichnen wir mit λ:

$$\lambda=\frac{d\vartheta}{ds}\,.$$

Dann ist

$$\frac{d\phi_0}{ds}=r\,,$$

$$\frac{dr}{ds}=\varkappa P\,,$$

$$\frac{dP}{ds}=\lambda Q-\varkappa r\,,$$

$$\frac{dQ}{ds}=-\lambda P\,.$$

Daraus geht hervor, daß $\varkappa$ die Krümmung, λ die Windung, P die Hauptnormale, Q die Binormale der Kurve ist, auf die der Punkt ϕ_0 beschränkt ist.

Die Linearform ϕ, mit ihren Koeffizienten x, y, z, ist jetzt geometrisch definiert.

Die Gleichung

$$\phi-\phi_0=pu+qv\,,$$

in der

$$\phi-\phi_0=\alpha(x-\xi)+\beta(y-\eta)+\gamma(z-\zeta)$$

ist, besteht bei ganz willkürlichen Werten von α, β, γ. Wir können dafür auch die Komponenten von r setzen, also der Tangente: $\frac{d\xi}{ds}, \frac{d\eta}{ds}, \frac{d\zeta}{ds}$. Dann werden p und $q=0$, da die Tangente auf den Strecken p und q senkrecht steht. Wir bekommen zwischen x, y, z und w die Gleichung:

$$(x-\xi)\frac{d\xi}{ds}+(y-\eta)\frac{d\eta}{ds}+(z-\zeta)\frac{d\zeta}{ds}=0\,.$$

Die Flächen $w=$ Konst. sind demnach Ebenen, die Normalebenen einer Raumkurve. Die Flächen $u=$ Konst., und ebenso: $v=$ Konst., sind Regelflächen; sie schneiden die Ebenen $w=$ Konst. in ihren geraden Linien. Zu den Kurven, auf denen u und v konstant sind, gehört auch die des Punktes ϕ_0; sie haben alle dieselben Normalebenen.

§ 3.

Wir nehmen nicht mehr $U=V=1$ an, sondern nur: $V=U$. Es frägt sich: Wie sind zuerst U und W, dann x, y, z zu bestimmen, damit die Gleichung

$$U^2\left((du)^2+(dv)^2\right)+W^2(dw)^2=(dx)^2+(dy)^2+(dz)^2$$

erfüllt ist? Die Voraussetzungen sind hier symmetrisch in bezug auf u und v; in jeder Formel, die wir aufstellen, dürfen wir u mit v vertauschen.

Die Formeln, auf die wir uns stützen, sind am Schluß von § 1 zusammengestellt. Sie lauten, wenn die Zahl n gleich 3 ist:

$$\frac{\partial U_{\lambda\nu}}{\partial u_\mu}=U_{\lambda\mu}U_{\mu\nu}, \tag{1}$$

$$\frac{\partial U_{\mu\lambda}}{\partial u_\lambda}+\frac{\partial U_{\lambda\mu}}{\partial u_\mu}+U_{\lambda\nu}U_{\mu\nu}=0, \tag{2}$$

$$\frac{\partial \phi_\mu}{\partial u_\lambda}=U_{\lambda\mu}\phi_\lambda, \tag{3}$$

$$\frac{\partial \phi_\lambda}{\partial u_\lambda}+U_{\lambda\mu}\phi_\mu+U_{\lambda\nu}\phi_\nu. \tag{4}$$

Dabei sind u_λ, u_μ, u_ν die Variabeln u, v, w in irgendwelcher Reihenfolge.

Die erste dieser Gleichungen ist:

$$\frac{\partial}{\partial u_\mu}\left(\frac{\partial U_\lambda}{U_\nu\,\partial u_\nu}\right)=\frac{1}{U_\mu U_\nu}\frac{\partial U_\lambda}{\partial u_\mu}\frac{\partial U_\mu}{\partial u_\nu}.$$

Verstehen wir unter u_λ die Variable w, unter u_μ, u_ν also die beiden andern: $u_\mu=u$, $u_\nu=v$, so ist U_λ die Funktion W, U_μ und U_ν sind U. Wir erhalten:

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{U}\frac{\partial W}{\partial v}\right)=\frac{1}{U^2}\frac{\partial W}{\partial u}\frac{\partial U}{\partial v}.$$

Setzen wir:

$$\frac{1}{U}=N,$$

so geht die Gleichung über in:

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(N\frac{\partial W}{\partial v}\right)+\frac{\partial N}{\partial v}\frac{\partial W}{\partial u}=0,$$

wofür man schreiben kann:

$$\frac{\partial^2(NW)}{\partial u\,\partial v}-W\frac{\partial^2 N}{\partial u\,\partial v}=0.$$

Wir setzen ferner $NW = M$, so daß

$$U = \frac{1}{N}, \quad W = \frac{M}{N}$$

ist. Dann besteht zwischen M und N die Beziehung:

$$N \frac{\partial^2 M}{\partial u \partial v} - M \frac{\partial^2 N}{\partial u \partial v} = 0.$$

Wenn wir aber unter u_λ die Größe u, unter u_μ: v und unter u_ν die Größe w verstehen, so ist $U_\nu = W$; es entsteht:

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{W}\frac{\partial U}{\partial w}\right) = \frac{1}{UW}\frac{\partial U}{\partial v}\frac{\partial U}{\partial w}.$$

Diese Gleichung läßt sich integrieren. Es folgt aus ihr, daß der Quotient

$$\frac{1}{UW}\frac{\partial U}{\partial w}$$

von v, somit auch von u, unabhängig ist. Wir führen auch hier, statt U und W, die Größen M, N ein. Wir bekommen dann die Gleichung:

$$\frac{\partial N}{\partial w} = K \cdot M,$$

die, zusammen mit der vorigen:

$$N \frac{\partial^2 M}{\partial u \partial v} - M \frac{\partial^2 N}{\partial u \partial v} = 0,$$

die Gleichung (1) ersetzt. K bedeutet einen Faktor, der nur von der dritten Variabeln w abhängt, wenn er nicht ganz konstant ist.

Ebenso behandeln wir Formel (2), also die Gleichung:

$$\frac{\partial}{\partial u_\lambda}\left(\frac{1}{U_\lambda}\frac{\partial U_\mu}{\partial u_\lambda}\right) + \frac{\partial}{\partial u_\mu}\left(\frac{1}{U_\mu}\frac{\partial U_\lambda}{\partial u_\mu}\right) + \frac{1}{U_\nu^2}\frac{\partial U_\lambda}{\partial u_\nu}\frac{\partial U_\mu}{\partial u_\nu} = 0.$$

Ist $u_\lambda = u$, $u_\mu = v$, so ergibt sich:

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{U}\frac{\partial U}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{U}\frac{\partial U}{\partial v}\right) + \frac{1}{W^2}\left(\frac{\partial U}{\partial w}\right)^2 = 0;$$

also bei Einführung der Größen M, N:

$$\frac{\partial^2 \log N}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \log N}{\partial v^2} = \frac{1}{N^2 M^2}\left(\frac{\partial N}{\partial w}\right)^2,$$

und da $\frac{\partial N}{\partial w} = KM$ ist:

$$\frac{\partial^2 \log N}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \log N}{\partial v^2} = \frac{K^2}{N^2}.$$

Dafür kann man auch schreiben:

$$N\left(\frac{\partial^2 N}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 N}{\partial v^2}\right) = K^2 + \left(\frac{\partial N}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial N}{\partial v}\right)^2.$$

Verstehen wir aber unter u_λ die Größe w, unter u_μ, u_ν die Variabeln u, v, so entsteht folgende Formel:

$$\frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{1}{W}\frac{\partial U}{\partial w}\right)+\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{U}\frac{\partial W}{\partial u}\right)+\frac{1}{U^2}\frac{\partial W}{\partial v}\frac{\partial U}{\partial v}=0.$$

Ehe wir weiter schließen, machen wir zwei Bemerkungen.

Erstens. In dem früher behandelten Fall war $U=V=1$, also ist dann auch $N=1$ und $M=W$. Die letzte Gleichung zeigt, daß dann

$$\frac{\partial^2 W}{\partial u^2}=0$$

sein muß; die beiden andern, $\frac{\partial N}{\partial w}=KM$ und $N\frac{\partial^2 M}{\partial u\,\partial v}-M\frac{\partial^2 N}{\partial u\,\partial v}=0$, daß $\frac{\partial^2 M}{\partial u\,\partial v}=0$, also $K=0$ und

$$\frac{\partial^2 W}{\partial u\,\partial v}=0$$

sein muß; alle zweiten Ableitungen von W nach u und v verschwinden; es ist demnach, wie behauptet wurde, W eine lineare Funktion von u und v.

Zweitens. Der Faktor K ist von u und v unabhängig. An sich ist nicht ausgeschlossen, daß K einfach den konstanten Wert 0 hat. Aber dann ist $\frac{\partial N}{\partial w}=0$, also N nur von u und v abhängig; außerdem

$$\frac{\partial^2 \log N}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 \log N}{\partial v^2}=0,$$

also $\log N$ eine harmonische Funktion von u und v. Es sei ϑ die zu $\log(U)=-\log(N)$ zugeordnete harmonische Funktion. Dann sind auch $p=U\cos\vartheta$, $q=U\sin\vartheta$ zugeordnete harmonische Funktionen, daher

$$p\,du+q\,dv=d\xi,\ -q\,du+p\,dv=d\eta$$

vollständige Differentiale. Da nun

$$U^2\left((du)^2+(dv)^2\right)=(d\xi)^2+(d\eta)^2$$

ist, so geht die Gleichung $U^2\left((du)^2+(dv)^2\right)+W^2(dw)^2=(dx)^2+(dy)^2+(dz)^2$ über in:

$$(d\xi)^2+(d\eta)^2+W^2(dw)^2=(dx)^2+(dy)^2+(dz)^2.$$

Wir haben also den vorigen Fall: $U=V=1$; nur daß an die Stelle der Größen u, v, durch konforme Abbildung ihrer Ebene, ξ, η getreten sind. — Aus diesem Grunde schließen wir im folgenden die Lösung, die in der Annahme $K=0$ liegt, aus. —

Wir kehren zu der zuletzt aufgestellten Formel zurück. Wir vertauschen in ihr u und v. Das erste Glied des Ausdrucks auf der linken Seite bleibt

dabei ungeändert; also auch die Summe der beiden andern. Wir erhalten, indem wir $\frac{1}{U} = N$ setzen:

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(N\frac{\partial W}{\partial u}\right) - \frac{\partial N}{\partial v}\frac{\partial W}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial v}\left(N\frac{\partial W}{\partial v}\right) - \frac{\partial N}{\partial u}\frac{\partial W}{\partial u}.$$

Dies gibt aber

$$\left(\frac{\partial^2 (NW)}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 (NW)}{\partial v^2}\right) = W\left(\frac{\partial^2 N}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 N}{\partial v^2}\right).$$

Gleichung (2) wird demnach ersetzt durch die beiden:

$$\frac{\partial^2 \log N}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \log N}{\partial v^2} = \frac{K^2}{N^2},$$

$$N\left(\frac{\partial^2 M}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 M}{\partial v^2}\right) - M\left(\frac{\partial^2 N}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 N}{\partial v^2}\right) = 0. —$$

Wir gehen zur Gleichung (3) über, die mit

$$\frac{\partial}{\partial u_\lambda}\left(\frac{1}{U_\mu}\frac{\partial \phi}{\partial u_\mu}\right) = \frac{1}{U_\lambda U_\mu}\frac{\partial U_\lambda}{\partial u_\mu}\frac{\partial \phi}{\partial u_\lambda}$$

identisch ist. Setzen wir zunächst für u_λ, u_μ die Variabeln u, v ein, so ergibt sich:

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{U}\frac{\partial \phi}{\partial v}\right) = \frac{1}{U^2}\frac{\partial U}{\partial v}\frac{\partial \phi}{\partial u}$$

also:

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(N\frac{\partial \phi}{\partial v}\right) + \frac{\partial N}{\partial v}\frac{\partial \phi}{\partial u} = 0.$$

Dafür kann man schreiben:

$$\frac{\partial^2 (N\phi)}{\partial u\,\partial v} = \phi\frac{\partial^2 N}{\partial u\,\partial v}.$$

Nehmen wir aber: $u_\lambda = u$, $u_\mu = w$, so entsteht:

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{W}\frac{\partial \phi}{\partial w}\right) = \frac{1}{UW}\frac{\partial U}{\partial w}\frac{\partial \phi}{\partial u}.$$

Da

$$W = \frac{M}{N},$$

$$\frac{1}{U}\frac{\partial U}{\partial w} = -\frac{1}{N}\frac{\partial N}{\partial w} = -\frac{KM}{N}$$

ist, so hat man

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{N}{M}\frac{\partial \phi}{\partial w}\right) + K\frac{\partial \phi}{\partial u} = 0.$$

Dies läßt sich wieder integrieren, da K nur von der dritten Variabeln w abhängt. Der Ausdruck

$$\frac{N}{KM}\frac{\partial\phi}{\partial w}+\phi=\psi$$

muß eine von u, und ebenso von v, unabhängige Größe sein, eine Linearform in α, β, γ, deren Koeffizienten nur von w abhängen. Wir setzen:

$$\psi=\alpha X+\beta Y+\gamma Z.$$

Neben ψ führen wir durch die Gleichung

$$\phi=\psi-\frac{\omega}{N}$$

eine andere Linearform ω ein, deren Koeffizienten von allen drei Veränderlichen u, v, w abhängen.

Wir haben jetzt:

$$N\frac{\partial\phi}{\partial w}=KM\cdot\frac{\omega}{N}$$

und da $KM=\frac{\partial N}{\partial w}$ ist:

$$N\frac{\partial\phi}{\partial w}=\frac{\omega}{N}\frac{\partial N}{\partial w}=(\psi-\phi)\frac{\partial N}{\partial w}.$$

Wenn man die Gleichung $\omega=N(\psi-\phi)$ differenziert, so folgt:

$$\frac{\partial\omega}{\partial w}=(\psi-\phi)\frac{\partial N}{\partial w}+N\left(\frac{d\psi}{dw}-\frac{\partial\phi}{\partial w}\right).$$

Also ist:

$$\frac{\partial\omega}{\partial w}=N\frac{d\psi}{dw}:$$

die Ableitung der Form ω nach w ist durch die Funktion N teilbar, und der Quotient, $\frac{d\psi}{dw}$, von u, v unabhängig.

Aus der vorhin aufgestellten Gleichung

$$\frac{\partial^2 N\phi}{\partial u\,\partial v}=\phi\frac{\partial^2 N}{\partial u\,\partial v}$$

ergibt sich ohne weiteres:

$$\frac{\partial^2 N(\phi-\psi)}{\partial u\,\partial v}=(\phi-\psi)\frac{\partial^2 N}{\partial u\,\partial v},$$

da ψ von u und v unabhängig ist. Es ist aber $N(\phi-\psi)=-\omega$; folglich:

$$N\frac{\partial^2\omega}{\partial u\,\partial v}-\omega\frac{\partial^2 N}{\partial u\,\partial v}=0.$$

Gleichung 3 des Systems hat also zu dem Resultat geführt:

Die Linearform ϕ ist durch zwei andere, ψ und ω, auszudrücken:

$$\phi = \psi - \frac{\omega}{N}.$$

Die Koeffizienten von $\psi = \alpha X + \beta Y + \gamma Z$ sind Funktionen von w allein, die gar keiner Beschränkung unterliegen, X, Y, Z also die Koordinaten des Punktes einer willkürlichen Raumkurve. Die Form ω hat die Eigenschaft, daß ihre Ableitung nach w durch N teilbar ist:

$$\frac{\partial \omega}{\partial w} = N \frac{d\psi}{dw};$$

es besteht außerdem die Gleichung:

$$\frac{\partial \phi}{\partial w} = \frac{\omega}{N^2} \frac{\partial N}{\partial w}.$$

Es ist ferner:

$$N \frac{\partial^2 \omega}{\partial u \partial v} - \omega \frac{\partial^2 N}{\partial u \partial v} = 0.$$

Es bleibt noch die vierte Formel übrig, also die Gleichung:

$$\frac{\partial}{\partial u_\lambda}\left(\frac{1}{U_\lambda} \frac{\partial \phi}{\partial u_\lambda}\right) + \frac{1}{U_\mu^2} \frac{\partial U_\lambda}{\partial u_\mu} \frac{\partial \phi}{\partial u_\mu} + \frac{1}{U_\nu^2} \frac{\partial U_\lambda}{\partial u_\nu} \frac{\partial \phi}{\partial u_\nu} = 0.$$

Hier nehmen wir $u_\lambda = u$ an, $u_\mu = v$, $u_\nu = w$. Sie liefert dann:

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{U} \frac{\partial \phi}{\partial u}\right) + \frac{1}{U^2} \frac{\partial U}{\partial v} \frac{\partial \phi}{\partial v} + \frac{1}{W^2} \frac{\partial U}{\partial w} \frac{\partial \phi}{\partial w} = 0.$$

Also, wenn man $U = \frac{1}{N}$ setzt, $W = \frac{M}{N}$:

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(N \frac{\partial \phi}{\partial u}\right) - \frac{\partial N}{\partial v} \frac{\partial \phi}{\partial v} - \frac{1}{M^2} \frac{\partial N}{\partial w} \frac{\partial \phi}{\partial w} = 0.$$

Im letzten Gliede ist zu setzen:

$$\frac{\partial \phi}{\partial w} = \frac{\omega}{N^2} \frac{\partial N}{\partial w}, \quad \frac{\partial N}{\partial w} = KM.$$

Dadurch ergibt sich:

$$-\frac{\partial}{\partial u}\left(N \frac{\partial \phi}{\partial u}\right) + \frac{\partial N}{\partial v} \frac{\partial \phi}{\partial v} + \frac{K^2}{N^2} \omega = 0.$$

Da $\phi = \psi - \frac{\omega}{N}$ ist, so ist

$$N \frac{\partial \phi}{\partial u} = -\frac{\partial \omega}{\partial u} + \frac{\omega}{N} \frac{\partial N}{\partial u},$$

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(N \frac{\partial \phi}{\partial u}\right) = -\frac{\partial^2 \omega}{\partial u^2} + \frac{1}{N} \frac{\partial N}{\partial u} \frac{\partial \omega}{\partial u} + \omega \frac{\partial^2 \log N}{\partial u^2},$$

$$\frac{\partial N}{\partial v} \frac{\partial \phi}{\partial v} = \frac{1}{N} \frac{\partial N}{\partial v}\left(-\frac{\partial \omega}{\partial v} + \frac{\omega}{N} \frac{\partial N}{\partial v}\right).$$

Man bekommt demnach für ω:

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial u^2}-\frac{1}{N}\left(\frac{\partial N}{\partial u}\frac{\partial\omega}{\partial u}+\frac{\partial N}{\partial v}\frac{\partial\omega}{\partial v}\right)+H\omega=0,$$

wo:

$$H=\frac{K^2}{N^2}-\frac{\partial^2\log N}{\partial u^2}+\frac{1}{N^2}\left(\frac{\partial N}{\partial v}\right)^2$$

gesetzt ist. Dieses H ist, nach der für N aufgestellten Differentialgleichung, gleich:

$$\frac{1}{N}\frac{\partial^2 N}{\partial v^2}.$$

Folglich ergibt sich:

$$N\frac{\partial^2\omega}{\partial u^2}+\omega\frac{\partial^2 N}{\partial v^2}=\frac{\partial N}{\partial u}\frac{\partial\omega}{\partial u}+\frac{\partial N}{\partial v}\frac{\partial\omega}{\partial v}.$$

Das stellt zwei Gleichungen dar, da man u mit v vertauschen kann. Ihre Subtraktion liefert:

$$N\left(\frac{\partial^2\omega}{\partial u^2}-\frac{\partial^2\omega}{\partial v^2}\right)-\omega\left(\frac{\partial^2 N}{\partial u^2}-\frac{\partial^2 N}{\partial v^2}\right)=0;$$

die Addition gibt eine andere Formel:

$$N\left(\frac{\partial^2\omega}{\partial u^2}+\frac{\partial^2\omega}{\partial v^2}\right)+\omega\left(\frac{\partial^2 N}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 N}{\partial v^2}\right)=2\left(\frac{\partial N}{\partial u}\frac{\partial\omega}{\partial u}+\frac{\partial N}{\partial v}\frac{\partial\omega}{\partial v}\right),$$

von der wir sofort Gebrauch machen werden. Es bleibt noch eine Lücke auszufüllen. Auch die Hauptgleichung, die bei Einführung der Größen N und M die Form hat:

$$N^2\left\{\left(\frac{\partial\phi}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial\phi}{\partial v}\right)^2\right\}+\frac{N^2}{M^2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial w}\right)^2=1$$

muß in eine Differentialgleichung für ω übergeführt werden. Da

$$\phi=\psi-\frac{\omega}{N},\quad \frac{N}{M}\frac{\partial\phi}{\partial w}=\frac{K}{N}\omega$$

ist, so hat man:

$$\left(\frac{\partial\omega}{\partial u}-\frac{\omega}{N}\frac{\partial N}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial\omega}{\partial v}-\frac{\omega}{N}\frac{\partial N}{\partial v}\right)^2+\frac{K^2}{N^2}\omega^2=1.$$

Da nun

$$2\left(\frac{\partial N}{\partial u}\frac{\partial\omega}{\partial u}+\frac{\partial N}{\partial v}\frac{\partial\omega}{\partial v}\right)=N\left(\frac{\partial^2\omega}{\partial u^2}+\frac{\partial^2\omega}{\partial v^2}\right)+\omega\left(\frac{\partial^2 N}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 N}{\partial v^2}\right)$$

ist, ferner

$$K^2+\left(\frac{\partial N}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial N}{\partial v}\right)^2=N\left(\frac{\partial^2 N}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 N}{\partial v^2}\right),$$

so folgt:

$$\left(\frac{\partial \omega}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial \omega}{\partial v}\right)^2 - \omega\left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial v^2}\right) = 1,$$

anders geschrieben:

$$\frac{\partial^2 \log \omega}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \log \omega}{\partial v^2} + \frac{1}{\omega^2} = 0.$$

§ 4.

Von dem ursprünglichen Gleichungssystem sind wir zu einem ganz andern gekommen, das aber nichts anderes aussagt, als das erste. Die Faktoren U, W in der Grundgleichung $U^2\left((du)^2 + (dv)^2\right) + W^2(dw)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2$ sind durch zwei andere M und N ersetzt, die mit U und V in der Beziehung stehen:

$$U = \frac{1}{N},\ W = \frac{M}{N},$$

so daß die Grundgleichung jetzt lautet:

$$(du)^2 + (dv)^2 + M^2(dw)^2 = N^2\left((dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2\right).$$

Ein erstes Resultat war: es ist:

$$\frac{\partial N}{\partial w} = KM,$$

wo der Faktor K eine willkürliche Funktion von w allein ist. Wenn also N bekannt ist, so ist damit M zugleich gegeben.

Die Linearform $\phi = \alpha x + \beta y + \gamma z$ ist, vermöge der Gleichung

$$\phi = \psi - \frac{\omega}{N} = \psi - U\omega,$$

durch zwei andere ausgedrückt, $\psi = \alpha X + \beta Y + \gamma Z$ und ω. Die Koeffizienten X, Y, Z von ψ sind willkürliche Funktionen von w allein. ω aber ist mit ψ verknüpft durch die Gleichung

$$\frac{\partial \omega}{\partial w} = N\frac{d\psi}{dw}.$$

N genügt der Differentialgleichung:

$$\frac{\partial^2 \log N}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \log N}{\partial v^2} = \frac{K^2}{N^2},$$

oder:

$$N\left(\frac{\partial^2 N}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 N}{\partial v^2}\right) = K^2 + \left(\frac{\partial N}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial N}{\partial v}\right)^2;$$

ω der sehr ähnlichen:

$$\frac{\partial^2 \log \omega}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \log \omega}{\partial v^2} + \frac{1}{\omega^2} = 0.$$

Außerdem ist:

$$N\frac{\partial^2 M}{\partial u\,\partial v}=M\frac{\partial^2 N}{\partial u\,\partial v},$$

$$N\left(\frac{\partial^2 M}{\partial u^2}-\frac{\partial^2 M}{\partial v^2}\right)=M\left(\frac{\partial^2 N}{\partial u^2}-\frac{\partial^2 N}{\partial v^2}\right),$$

und ebenso:

$$N\frac{\partial^2 \omega}{\partial u\,\partial v}=\omega\frac{\partial^2 N}{\partial u\,\partial v}$$

$$N\left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial u^2}-\frac{\partial^2 \omega}{\partial v^2}\right)=\omega\left(\frac{\partial^2 N}{\partial u^2}-\frac{\partial^2 N}{\partial v^2}\right).$$

Endlich ist:

$$N\left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 \omega}{\partial v^2}\right)+\omega\left(\frac{\partial^2 N}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 N}{\partial v^2}\right)=2\left(\frac{\partial N}{\partial u}\frac{\partial \omega}{\partial u}+\frac{\partial N}{\partial v}\frac{\partial \omega}{\partial v}\right).$$

Auch diese Gleichung bleibt richtig, wenn man N mit ω vertauscht.

Es läßt sich nun noch eine starke Vereinfachung erzielen. Durch eine Transformation, bei der w ganz ungeändert bleibt, eine konforme Abbildung der Ebene (u, v), kann man erreichen, daß N, und damit auch M und ω, den einfachen Differentialgleichungen genügen:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial u\,\partial v}=0,\quad \frac{\partial^2 F}{\partial u^2}=\frac{\partial^2 F}{\partial v^2}.$$

Um dies zu erkennen, führen wir, vorübergehend und nur für die Differentiation, statt der reellen Koordinaten u, v die konjugiert-komplexen ein:

$$u+iv=s,\; u-iv=t.$$

Wir haben dann die Gleichungen:

$$+\frac{\partial^2 \log N}{\partial s\,\partial t}=\frac{K^2}{N^2},$$

$$N\frac{\partial^2 M}{\partial s^2}=M\frac{\partial^2 N}{\partial s^2},$$

$$N\frac{\partial^2 M}{\partial t^2}=M\frac{\partial^2 N}{\partial t^2},$$

von denen die dritte die konjugierte der zweiten ist und aus ihr durch Vertauschung von i mit $-i$ hervorgeht.

Wir setzen nun:

$$\frac{\partial^2 N}{\partial s^2}=P\cdot N.$$

Dann ist auch

$$\frac{\partial^2 M}{\partial s^2}=P\cdot M.$$

Da aber $\frac{\partial N}{\partial w} = KM$ ist, so folgt aus der ersten Gleichung, wenn man sie nach w differenziert:

$$K\frac{\partial^2 M}{\partial s^2} = KPM + N\frac{\partial P}{\partial w};$$

also:

$$\frac{\partial P}{\partial w} = 0.$$

P ist demnach von w unabhängig.

Die Differentialgleichung für N läßt sich so schreiben:

$$4\left(N\frac{\partial^2 N}{\partial s\,\partial t} - \frac{\partial N}{\partial s}\frac{\partial N}{\partial t}\right) = K^2.$$

Differenziert man dies nach s, so folgt:

$$N\frac{\partial^3 N}{\partial s^2\,\partial t} - \frac{\partial^2 N}{\partial s^2}\frac{\partial N}{\partial t} = 0.$$

Das gibt:

$$N\frac{\partial (PN)}{\partial t} = PN\frac{\partial N}{\partial t},$$

also:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = 0.$$

Hiernach ist P eine bloße Funktion der komplexen Größe s. Wir stellen zwei andere analytische Funktionen von s allein auf, f und F, die der linearen Differentialgleichung genügen:

$$\frac{d^2 y}{ds^2} = P\cdot y;$$

wir wählen sie so, daß

$$F\frac{df}{ds} - f\frac{dF}{ds} = 1$$

ist. Da N, als Funktion von s betrachtet, ebenfalls der Gleichung $\frac{d^2 y}{ds^2} = Py$ genügt, so muß sich N linear und homogen durch f und F ausdrücken lassen. Aber auch linear und homogen durch die zu f und F konjugierten Größen g und G, die Funktionen von t sind. Demnach ist N eine bilineare Form der beiden Paare f, F und g, G, mit Koeffizienten, die nur von w abhängen.

Wir setzen:

$$\frac{f}{F} = \sigma, \quad \frac{g}{G} = \tau,$$

$$FG = |F|^2 = R.$$

Ferner:

$$N = R\cdot N_1$$

$$\sigma = u_1 + iv_1\,; \quad \tau = u_1 - iv_1\,.$$

Dann ist N_1 linear in σ, τ, $\sigma\tau$, also in u_1, v_1 und $u_1^2+v_1^2$; diese reelle Größe N_1 ist also eine Funktion von u_1, v_1, w, die den Gleichungen genügt:

$$\frac{\partial^2 N_1}{\partial u_1 \partial v_1}=0,\quad \frac{\partial^2 N_1}{\partial u_1^2}=\frac{\partial^2 N_1}{\partial v_1^2}.$$

Es ist ferner:

$$F^2\frac{d\sigma}{ds}=1$$

und entsprechend:

$$G^2\frac{d\tau}{dt}=1;$$

daher:

$$R^2\frac{(du_1)^2+(dv_1)^2}{(du)^2+(dv)^2}=1$$

und folglich:

$$\frac{(du)^2+(dv)^2}{N^2}=\frac{(du_1)^2+(dv_1)^2}{N_1^2}.$$

Wenn wir statt u, v die Größen u_1, v_1 als unabhängige Veränderliche einführen, so wird damit eine Vereinfachung erreicht. Sie besteht darin, daß an die Stelle des Faktors N ein anderer N_1 tritt, für den die Gleichungen bestehen:

$$\frac{\partial^2 N_1}{\partial u_1 \partial v_1}=0,\quad \frac{\partial^2 N_1}{\partial u_1^2}=\frac{\partial^2 N_1}{\partial v_1^2}.$$

§ 5.

Die Transformation setzt sich demnach aus zweien zusammen. Die eine ist eine bloße konforme Abbildung — nicht des Raumes, aber der (u, v)-Ebene —, bei der die Variable w ungeändert bleibt. Bei der andern treten zu den Gleichungen des Systems noch die beiden hinzu:

$$\frac{\partial^2 N}{\partial u \partial v}=0,\quad \frac{\partial^2 N}{\partial u^2}=\frac{\partial^2 N}{\partial v^2},$$

denen auch M und ω genügen müssen, wegen der Gleichungen

$$M\frac{\partial^2 N}{\partial u \partial v}=N\frac{\partial^2 M}{\partial u \partial v},\ \text{usw.}$$

Dies sagt aus, daß bei der reduzierten Transformation M, N und ω sich linear durch u, v und u^2+v^2 darstellen lassen, mit Koeffizienten, die nur von w abhängen. Der Koeffizient von u^2+v^2 in N kann nicht 0 sein, da die Gleichung besteht:

$$N\left(\frac{\partial^2 N}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 N}{\partial v^2}\right)=K^2+\left(\frac{\partial N}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial N}{\partial v}\right)^2$$

Man kann demnach den Ausdruck von N auf die Form bringen:

$$N = \frac{K}{2c}\{(u-a)^2 + (v-b)^2 + C\},$$

wo a, b, c und C ebenso wie K bloße Funktionen von w sind. Da dann

$$\frac{\partial N}{\partial u} = \frac{K}{c}(u-a), \quad \frac{\partial N}{\partial v} = \frac{K}{c}(v-b), \quad \frac{\partial^2 N}{\partial u^2} = \frac{\partial^2 N}{\partial v^2} = \frac{K}{c}$$

ist, so geht die soeben angegebene Differentialgleichung für N über in

$$\frac{2K}{c} N = K^2 + \frac{K^2}{c^2}\{(u-a)^2 + (v-b)^2\}.$$

Es ist also:

$$N = \frac{K}{2c}\{(u-a)^2 + (v-b)^2 + c^2\}.$$

Statt N führen wir eine Größe t ein, die sich von N nur um den Faktor K unterscheidet. Sie ist gegeben durch die Gleichung:

$$(u-a)^2 + (v-b)^2 + c^2 = 2ct,$$

der man auch die Form geben kann:

$$(u-a)^2 + (v-b)^2 + (t-c)^2 = t^2.$$

Wenn man nach w differenziert, ergibt sich

$$c\frac{\partial t}{\partial w} = -\left\{(u-a)\frac{da}{\partial w} + (v-b)\frac{db}{\partial w} + (t-c)\frac{dc}{\partial w}\right\}.$$

Da $N = Kt$ ist, und $\frac{\partial N}{\partial w} = KM$, so ist

$$M = \frac{\partial t}{\partial w} + \frac{t}{K}\frac{dK}{dw}.$$

Damit ist M dargestellt als lineare Funktion von u, v, t.

ω drücken wir ebenfalls linear durch u, v, t aus:

$$\omega = pu + qv + rt + r'.$$

Aber ω soll den beiden Differentialgleichungen genügen

$$N\left(\frac{\partial \omega}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial v^2}\right) + \omega\left(\frac{\partial^2 N}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 N}{\partial v^2}\right) = 2\left(\frac{\partial N}{\partial u}\frac{\partial \omega}{\partial u} + \frac{\partial N}{\partial v}\frac{\partial \omega}{\partial v}\right),$$

$$\omega\left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial v^2}\right) - \left(\frac{\partial \omega}{\partial u}\right)^2 - \left(\frac{\partial \omega}{\partial v}\right)^2 + 1 = 0.$$

In der ersten können wir, da $N=Kt$ ist, N durch t ersetzen. Es ist aber:

$$c\frac{\partial t}{\partial u}=u-a,\quad c\frac{\partial t}{\partial v}=v-b,\quad c\frac{\partial^2 t}{\partial u^2}=c\frac{\partial^2 t}{\partial v^2}=1;$$

$$\frac{\partial w}{\partial u}=p+r\frac{\partial t}{\partial u}=p+\frac{r}{c}(u-a),$$

$$\frac{\partial w}{\partial v}=q+\frac{r}{c}(v-b),$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}=\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}=\frac{r}{c}.$$

Die beiden Gleichungen liefern demnach:

$$t\cdot\frac{2r}{c}+\frac{2w}{c}=\frac{2(u-a)}{c}\left(p+\frac{r}{c}(u-a)\right)+\frac{2(v-b)}{c}\left(q+\frac{r}{c}(v-b)\right),$$

$$w\cdot\frac{2r}{c}-\left(p+\frac{r}{c}(u-a)\right)^2-\left(q+\frac{r}{c}(v-b)\right)^2+1=0.$$

oder, vereinfacht:

$$w=p(u-a)+q(v-b)+\frac{r}{c}\{(u-a)^2+(v-b)^2-ct\},$$

$$w\cdot\frac{2r}{c}-p^2-q^2-\frac{2r}{c}\{p(u-a)+q(v-b)\}-\frac{r^2}{c^2}\{(u-a)^2+(v-b)^2\}+1=0.$$

Da nun $(u-a)^2+(v-b)^2=2ct-c^2$ ist, so wird die erste Gleichung:

$$w=p(u-a)+q(v-b)+r(t-c);$$

die zweite:

$$\frac{2r}{c}\cdot r(t-c)-p^2-q^2-\frac{r^2}{c}(2t-c)+1=0.$$

Dies gibt:

$$p^2+q^2+r^2=1.$$

Die »Strecken p, q, r« haben also die Länge 1 und stehen aufeinander senkrecht.

Wir differenzieren jetzt den Ausdruck $w=p(u-a)+q(v-b)+r(t-c)$. Setzen wir für den Augenblick

$$(u-a)\frac{dp}{dw}+(v-b)\frac{dq}{dw}+(t-c)\frac{dr}{dw}=F,$$

$$p\frac{da}{dw}+q\frac{db}{dw}+r\frac{dc}{dw}=G,$$

$$(u-a)\frac{da}{dw}+(v-b)\frac{db}{dw}+(t-c)\frac{dc}{dw}=H.$$

so ist:

$$\frac{\partial t}{\partial w} = -\frac{H}{c};$$

also:

$$\frac{\partial \omega}{\partial w} = F - \frac{r}{c} H - G.$$

Es soll aber $\frac{\partial \omega}{\partial w}$ durch $N = Kt$ teilbar sein:

$$\frac{\partial \omega}{\partial w} = Kt \frac{d\psi}{dw}.$$

Folglich muß

$$F = G + Kt \frac{d\psi}{dw} + \frac{r}{c} H$$

sein. Aber zwischen u, v und t besteht keine lineare Gleichung mit nur von w abhängigen Koeffizienten; es muß daher:

$$dp = \frac{r}{c} da,$$

$$dq = \frac{r}{c} db,$$

$$dr = \frac{r}{c} dc + K d\psi,$$

$$p\,da + q\,db + c\,dr = 0$$

sein; dies ist im Einklang mit der Formel $p^2 + q^2 + r^2 = 1$.

Es ist

$$\phi = \psi - \frac{p(u-a) + q(v-b) + r(t-c)}{Kt},$$

also wenn wir $\psi = \alpha X + \beta Y + \gamma Z$ setzen:

$$Kt\{\alpha(X-x) + \beta(Y-y) + \gamma(Z-z) = p(u-a) + q(v-b) + r(t-c).$$

Da $p^2 + q^2 + r^2 = 1$ ist, so sagt die Gleichung aus, daß

$$\frac{u-a}{Kt}, \quad \frac{v-b}{Kt}, \quad \frac{t-c}{Kt}$$

Komponenten derselben Strecke sind, wie $X-\xi$, $Y-\eta$, $Z-\zeta$, nur in einem anderen Koordinatensytem. Es ist aber:

$$(u-a)^2 + (v-b)^2 + (t-c)^2 = t^2;$$

folglich, wenn wir den reziproken Wert von K mit m bezeichnen:

$$(X-x)^2 + (Y-y)^2 + (Z-z)^2 = m^2.$$

Das heißt: Der Punkt x, y, z ist bei konstantem Werte von w beschränkt auf eine Kugel mit dem Mittelpunkt X, Y, Z und dem Radius $m=\frac{1}{K}$.

Wir fassen aber nicht die Kurve des Punktes ψ oder (X, Y, Z) als Grundkurve auf, sondern setzen:

$$\psi-\frac{r}{K}=\phi_0=\alpha\xi+\beta\eta+\gamma\zeta.$$

Dann ist:

$$Kd\psi=dr-\frac{r}{K}dK+Kd\phi_0;$$

die Gleichung $dr=\frac{r}{c}dc+Kd\psi$ geht daher über in:

$$d\phi_0=-\frac{r}{c}d\left(\frac{c}{K}\right). \text{ —}$$

Ist das Verhältnis $\frac{c}{K}$, also das Produkt cm, konstant, so ist $d\phi_0=0$, also der Punkt $\phi_0=(\xi, \eta, \zeta)$, ein fester. Es ist aber:

$$r=K(\psi-\phi_0)=K\{\alpha(X-\xi)+\beta(Y-\eta)+Z-\zeta)\},$$

und da r eine Strecke von der Länge 1 ist, so ist:

$$(X-\xi)^2+(Y-\eta)^2+(Z-\zeta)^2=\frac{1}{K^2}=m^2.$$

Die Kugel, auf die bei konstantem w der Punkt xyz beschränkt ist, hat also die Gleichung:

$$(x-X)^2+(y-Y)^2+(z-Z)^2=(X-\xi)^2+(Y-\eta)^2+(Z-\zeta)^2.$$

Das heißt: Alle diese Kugeln gehen durch einen und denselben Punkt. Durch Transformation der reziproken Radien kann man daher bewirken, daß die Schar der Kugeln in eine Schar von Ebenen übergeht; und so ist es mir wahrscheinlich, daß der Spezialfall $\frac{c}{K}=\text{Const.}$ sich auf den zurückführen läßt, wo $U=V=1$ ist. —

Ist $\frac{c}{K}$ nicht konstant, so setzen wir:

$$-\frac{1}{c}d\left(\frac{c}{K}\right)=ds.$$

Wir haben dann:

$$\frac{d\phi_0}{ds}=r;$$

da die Strecke r die Länge 1 hat, so ist s der Bogen der Raumkurve ϕ_0, r selbst die Tangente. Es ist außerdem:

$$\frac{dp}{ds} = \frac{r}{c}\frac{da}{ds}$$

$$\frac{dq}{ds} = \frac{r}{c}\frac{db}{ds}$$

$$\frac{dr}{ds} = -\frac{p}{c}\frac{da}{ds} - \frac{q}{c}\frac{db}{ds}.$$

Wir setzen:

$$-\frac{1}{c}\frac{da}{ds} = \varkappa \cos \vartheta, \quad -\frac{1}{c}\frac{db}{ds} = \varkappa \sin \vartheta,$$

$$\frac{d\vartheta}{ds} = \lambda;$$

ferner:

$$p \cos \vartheta + q \sin \vartheta = P,$$

$$-p \sin \vartheta + q \cos \vartheta = Q.$$

Wir haben dann, neben $\frac{d\phi_0}{ds} = r$, die Gleichungen

$$\frac{dr}{ds} = \varkappa P$$

$$\frac{dP}{ds} = \lambda Q - \varkappa r$$

$$\frac{dQ}{ds} = -\lambda P,$$

aus denen hervorgeht, daß $\varkappa$ die Krümmung, λ die Windung der Raumkurve ϕ_0 ist.

Der Mittelpunkt $\psi = (X, Y, Z)$ der Kugel ist durch die Gleichung gegeben:

$$\psi = \phi_0 + \frac{r}{K} = \phi_0 + mr.$$

Da $r = \alpha\frac{d\xi}{ds} + \beta\frac{d\eta}{ds} + \gamma\frac{d\zeta}{ds}$ ist, so ist

$$X = \xi + m\frac{d\xi}{ds}$$

$$Y = \eta + m\frac{d\eta}{ds}$$

$$Z = \zeta + m\frac{d\zeta}{ds}$$

und die Gleichung der Kugel läßt sich so schreiben:

$$(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2 = 2\,m\left\{(x-\xi)\frac{d\xi}{ds}+(y-\eta)\frac{d\eta}{ds}+(z-\zeta)\frac{dz}{ds}\right\}=0\,.$$

An die Stelle der Normalebene des Spezialfalles, wo $U=V=1$ war, treten demnach Kugeln, die im Kurvenpunkt ξ, η, ζ die Normalebene berühren; man sieht, daß, wenn man $m=\infty$ setzt, d. h. $K=0$, die Kugeln in Ebenen übergehen.

Die Gleichung der Kugelschar, und im Spezialfall $U=V=1$ die der Ebenenschar, ist eine Beziehung zwischen x, y, z, w; die Veränderlichen u, v kommen in ihr nicht vor. Daraus folgt, daß diese Gleichungen ganz ungeändert bleiben, wenn man mit u, v irgendeine Transformation vornimmt, ohne w zu ändern. Wir kommen zu dem Resultat:

Soll die Gleichung $U^2((du)^2+(dv)^2)+W^2(dw)^2=(dx)^2+(dy)^2+(dz)^2$ bestehen, so sind die Flächen des Körpers (x, y, z), auf denen w konstant bleibt, entweder Kugeln oder Ebenen.

Ausgegeben am 15. Mai.

SITZUNGSBERICHTE
DER PREUSSISCHEN
AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.
1923

XIV. Gesamtsitzung. 26. April.

Vorsitzender Sekretar: Hr. Roethe.

1. Hr. Burdach sprach über: Zwei- und mehrgliedrige synonymische Ausdrücke der deutschen Prosa.

Die Verbindung sinnähnlicher Worte als stilistische Manier in der Prosa Luthers und vieler Schriftsteller des 14.—18. Jahrhunderts ist nicht volkstümliches Erbgut und ebensowenig wie die gleiche Erscheinung in der mittelalterlichen Predigt und die mehrgliedrigen Tautologien der mittelhochdeutschen Kunstdichter ein unbewußtes Element erregter Rede. Vielmehr stammt alles dies aus dem Schulbetrieb der mittelalterlichen lateinischen Rhetorik. Diese hat sich in Theorie und Praxis des lateinischen und landessprachlichen Kanzleistils ('ars dictandi') seit dem 11. Jahrhundert am vollsten ausgeprägt, die gesamte mittelalterliche Poesie aller Länder beeinflußt und geht zurück auf frühantike, altsophistische Rhetorik (Gorgias), die mit bewußter Kunst uralte Stilform und Rhythmik einer primitiven poetischen Prosa literarisch gestaltet. Dabei wirkte entscheidend mit das altrömische Lehrbuch an Herennius, das die asianische und rhodische Kunst der in Kola und Kommata gegliederten Periode, der Rede-Figuren ('colores'), des wechselnden Satzrhythmus wie der festen Klauseln und des symmetrischen Satzparallelismus dem Mittelalter und der Renaissance zu verschiedenartiger Anwendung übermittelte und zur mittelalterlichen Reimprosa, zu den Gebilden der Hrotsvitha und des frühmittelhochdeutschen Denkmals 'Himmel und Hölle' wie zur humanistischen Rhythmik Petrarcas und des Ackermanns aus Böhmen den Weg wies.

2. Hr. Roethe legte vor eine Mitteilung des Mitgliedes der Deutschen Kommission Hrn. Prof. Dr. Ferdinand Wrede in Marburg: »Zu den Merseburger Zaubersprüchen.«

Die Sprüche werden mit Hilfe der modernen Dialektgeographie lokalisiert. Sie zeigen eine auffallend konsequente Lautgebung und gehören einem Dialektgebiet an, das ahd. *pf-*, *uo*, *ē* st. *ei* vereinigte. Ein solches liegt in Ostfranken. Seine Umgrenzung wird beschrieben und eine Enklave im bayerischen Bezirksamt Kissingen herausgehoben, die noch heute, dem zweimaligen *suister* 'Schwester' entsprechend, mdal. *šwistar* aufweist. — Im zweiten Spruch sind Phol und Balder zwei verschiedene Personen, wie Sinthgunth und Sunna, Frija und Volla. *Birenkid* bedeutet nicht 'verrenkt', sondern 'eingerenkt'. Damit verändert sich die Situation in der kleinen Götterszene.

3. Hr. von Wilamowitz-Moellendorff überreichte den Nachruf auf Hermann Diels von Prof. Dr. Ernst Nachmanson (Sonderabdruck aus Ord och Bild, 32. Jahrgang, Stockholm 1922).

4. Hr. Wilhelm Tschorn in Charlottenburg hat der Akademie ein Kapital von 1500000 Mark zur Förderung ihrer wissenschaftlichen Arbeiten überwiesen. Die Akademie hat für diese Stiftung ein Statut aufgestellt, das nachstehend abgedruckt ist.

Wilhelm-Tschorn-Stiftung.

Statut vom 23. März 1923.

Hr. Wilhelm Tschorn in Charlottenburg hat am 17. Januar 1923 bei der Preußischen Akademie der Wissenschaften eine Stiftung errichtet, die seinen Namen führt. Nachdem die Akademie mit Zustimmung der preußischen Regierung die Stiftung angenommen hat, ist folgendes Statut festgesetzt und vom Ministerium für Wissenschaft, Kunst und Volksbildung genehmigt worden.

§ 1.

Die Stiftung besteht aus einem Kapital von 1500000 Mark.

Die eingezahlte Summe wird unter dem Namen Wilhelm-Tschorn-Stiftung bis auf weiteres bei der Preußischen Staatsbank hinterlegt, kann aber auch auf Beschluß der Akademie in Wertpapieren angelegt werden und wird alsdann verwaltet nach den Bestimmungen, welche in den Statuten der Akademie für deren Vermögensverwaltung getroffen sind.

Etwaige weitere Zuwendungen wachsen dem Stiftungskapital zu und werden nach denselben Grundsätzen behandelt.

§ 2.

Die Stiftung ist bestimmt zur Förderung der wissenschaftlichen Arbeiten der Akademie. Ob nur die Zinsen des Kapitals oder dieses selbst teilweise oder in seiner vollen Substanz verwendet werden sollen, steht der Akademie frei zu bestimmen.

§ 3.

Die Stiftung wird verwaltet durch das Sekretariat der Akademie; doch ist zur Verwendung der Gelder die Zustimmung der Akademie erforderlich, die in einer Gesamtsitzung zu erfolgen hat, zu welcher besonders einzuladen ist.

§ 4.

Anträge auf Bewilligungen aus der Stiftung sind an das Sekretariat der Akademie zu richten.

§ 5.

Änderungen dieses Statuts bedürfen der Zustimmung des Ministeriums für Wissenschaft, Kunst und Volksbildung.

Ausgegeben am 15. Mai.

1923 XV—XVIII

SITZUNGSBERICHTE

DER PREUSSISCHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

Physikalisch-mathematische Klasse

BERLIN 1923

VERLAG DER AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

IN KOMMISSION BEI WALTER DE GRUYTER U. CO.

Aus dem Reglement für die Redaktion der akademischen Druckschriften

Aus § 1.

Die Akademie gibt gemäß § 41, 1 der Statuten zwei fortlaufende Veröffentlichungen heraus: »Sitzungsberichte der Preußischen Akademie der Wissenschaften« und »Abhandlungen der Preußischen Akademie der Wissenschaften«.

Aus § 2.

Jede zur Aufnahme in die Sitzungsberichte oder die Abhandlungen bestimmte Mitteilung muß in einer akademischen Sitzung vorgelegt werden, wobei in der Regel das druckfertige Manuskript zugleich einzuliefern ist. Nichtmitglieder haben hierzu die Vermittelung eines ihrem Fache angehörenden ordentlichen Mitgliedes zu benutzen.

§ 3.

Der Umfang einer aufzunehmenden Mitteilung soll in der Regel in den Sitzungsberichten bei Mitgliedern 32, bei Nichtmitgliedern 8 Seiten in der gewöhnlichen Schrift der Sitzungsberichte, in den Abhandlungen 12 Druckbogen von je 8 Seiten in der gewöhnlichen Schrift der Abhandlungen nicht übersteigen.

Überschreitung dieser Grenzen ist nur mit Zustimmung der Gesamtakademie oder der betreffenden Klasse statthaft und ist bei Vorlage der Mitteilung ausdrücklich zu beantragen. Läßt der Umfang eines Manuskripts vermuten, daß diese Zustimmung erforderlich sein werde, so hat das vorlegende Mitglied es vor dem Einreichen von sachkundiger Seite auf seinen mutmaßlichen Umfang im Druck abschätzen zu lassen.

§ 4.

Sollen einer Mitteilung Abbildungen im Text oder auf besonderen Tafeln beigegeben werden, so sind die Vorlagen dafür (Zeichnungen, photographische Originalaufnahmen usw.) gleichzeitig mit dem Manuskript, jedoch auf getrennten Blättern, einzureichen.

Die Kosten der Herstellung der Vorlagen haben in der Regel die Verfasser zu tragen. Sind diese Kosten aber auf einen erheblichen Betrag zu veranschlagen, so kann die Akademie dazu eine Bewilligung beschließen. Ein darauf gerichteter Antrag ist vor der Herstellung der betreffenden Vorlagen mit dem schriftlichen Kostenanschlage eines Sachverständigen an den vorsitzenden Sekretar zu richten, dann zunächst im Sekretariat vorzuberaten und weiter in der Gesamtakademie zu verhandeln.

Die Kosten der Vervielfältigung übernimmt die Akademie. Über die voraussichtliche Höhe dieser Kosten ist — wenn es sich nicht um wenige einfache Textfiguren handelt — der Kostenanschlag eines Sachverständigen beizufügen. Überschreitet dieser Anschlag für die erforderliche Auflage 5000 Mark, so ist Vorberatung durch das Sekretariat geboten.

Aus § 5.

Nach der Vorlegung und Einreichung des **vollständigen druckfertigen** Manuskripts an den zuständigen Sekretar oder an den Archivar wird über Aufnahme der Mitteilung in die akademischen Schriften, und zwar, wenn eines der anwesenden Mitglieder es verlangt, verdeckt abgestimmt.

Mitteilungen von Verfassern, welche nicht Mitglieder der Akademie sind, sollen der Regel nach nur in die Sitzungsberichte aufgenommen werden. Beschließt eine Klasse die Aufnahme der Mitteilung eines Nichtmitgliedes in die Abhandlungen, so bedarf dieser Beschluß der Bestätigung durch die Gesamtakademie.

Aus § 6.

Die an die Druckerei abzuliefernden Manuskripte müssen, wenn es sich nicht bloß um glatten Text handelt, ausreichende Anweisungen für die Anordnung des Satzes und die Wahl der Schriften enthalten. Bei Einsendungen Fremder sind diese Anweisungen von dem vorlegenden Mitgliede vor Einreichung des Manuskripts vorzunehmen. Dasselbe hat sich zu vergewissern, daß der Verfasser seine Mitteilung als vollkommen druckreif ansieht.

Die erste Korrektur ihrer Mitteilungen besorgen die Verfasser. Fremde haben diese erste Korrektur an das vorlegende Mitglied einzusenden. Die Korrektur soll nach Möglichkeit nicht über die Berichtigung von Druckfehlern und leichten Schreibversehen hinausgehen. Umfängliche Korrekturen Fremder bedürfen der Genehmigung des redigierenden Sekretars vor der Einsendung an die Druckerei, und die Verfasser sind zur Tragung der entstehenden Mehrkosten verpflichtet. Übersteigen die Kosten der Korrektur einen gewissen Prozentsatz der Satzkosten, so fallen die Mehrkosten den Verfassern selbst ganz oder teilweise zur Last.

Aus § 8.

Von allen in die Sitzungsberichte oder Abhandlungen aufgenommenen wissenschaftlichen Mitteilungen, Reden, Adressen oder Berichten werden für die Verfasser, von wissenschaftlichen Mitteilungen, wenn deren Umfang im Druck 4 Seiten übersteigt, auch für den Buchhandel Sonderabdrucke hergestellt, die alsbald nach Erscheinen ausgegeben werden.

Von Gedächtnisreden werden ebenfalls Sonderabdrucke für den Buchhandel hergestellt, indes nur dann, wenn die Verfasser sich ausdrücklich damit einverstanden erklären.

§ 9.

Von den Sonderabdrucken aus den Sitzungsberichten erhält ein Verfasser, welcher Mitglied der Akademie ist, zu unentgeltlicher Verteilung ohne weiteres 50 Freiexemplare; er ist indes berechtigt, zu gleichem Zwecke auf Kosten der Akademie weitere Exemplare bis zur Zahl von noch 100 und auf seine Kosten noch weitere bis zur Zahl von 200 (im ganzen also 350) abziehen zu lassen, sofern er dies rechtzeitig dem redigierenden Sekretar angezeigt hat; wünscht er auf seine Kosten noch mehr Abdrucke zur Verteilung zu erhalten, so bedarf es dazu der Genehmigung der Gesamtakademie oder der betreffenden Klasse. — Nichtmitglieder erhalten 50 Freiexemplare und dürfen nach rechtzeitiger Anzeige bei dem redigierenden Sekretar weitere 200 Exemplare auf ihre Kosten abziehen lassen.

Von den Sonderabdrucken aus den Abhandlungen erhält ein Verfasser, welcher Mitglied der Akademie ist, zu unentgeltlicher Verteilung ohne weiteres 30 Freiexemplare; er ist indes, berechtigt, zu gleichem Zwecke auf Kosten der Akademie weitere Exemplare bis zur Zahl von noch 100 und auf seine Kosten noch weitere bis zur Zahl von 100 (im ganzen also 230) abziehen zu lassen, sofern er dies rechtzeitig dem redigierenden Sekretar angezeigt hat; wünscht er auf seine Kosten noch mehr Abdrucke zur Verteilung zu erhalten, so bedarf es dazu der Genehmigung der Gesamtakademie oder der betreffenden Klasse. — Nichtmitglieder erhalten 30 Freiexemplare und dürfen nach rechtzeitiger Anzeige bei dem redigierenden Sekretar weitere 100 Exemplare auf ihre Kosten abziehen lassen.

(Fortsetzung auf S. 3 des Umschlags.)

SITZUNGSBERICHTE
DER PREUSSISCHEN
AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.
1923

XV. Sitzung der physikalisch-mathematischen Klasse. 3. Mai.

Vorsitzender Sekretar: Hr. Planck.

1. Hr. Nernst las über die Theorie photochemischer Vorgänge und legte eine von Hrn. Noddack und ihm verfaßte Arbeit über diesen Gegenstand vor.

Das sogenannte »photochemische Äquivalentgesetz« läßt sich mit allen bisher gefundenen experimentellen Konsequenzen lediglich auf die allgemein anerkannte Tatsache zurückführen, daß ein »gefärbtes Molekül« das Licht quantenmäßig absorbiert. Reagiert das so entstandene energiereiche Molekül einfach nach dem Gesetze der konstanten und multiplen Proportionen, so stößt man auf die Beziehungen, die aus dem Äquivalentgesetze folgen. In den seltensten Fällen trifft dies aber zu. Ist die absorbierte Energie sehr groß, so läßt sich (mindestens annähernd) die photochemische Ausbeute thermochemisch abschätzen, ganz im Gegensatz zum Äquivalentgesetz.

2. Hr. Nernst legte eine Arbeit von J. Eggert und W. Noddack »Photochemische Ausbeute bei Trockenplatten« vor.

Es wird im Anschluß an eine frühere Arbeit das photochemische Äquivalentgesetz an photographischen Bromsilberplatten für die Wellenlängen 436, 405 und 363 geprüft und unter Berücksichtigung der wahren Bromsilberabsorption, die man aus der Gesamtabsorption der Platte, vermindert um die Gelatineabsorption, erhält, exakt bestätigt.

3. Hr. G. Müller überreichte den 2. Band der I. Abteilung der »Geschichte des Fixsternhimmels« (Karlsruhe 1923).

4. Vorgelegt wurde das »Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik« Band 46, Jahrgang 1916—1918, Heft 1 (Berlin und Leipzig 1923).

Zur Theorie photochemischer Vorgänge.

Von W. Nernst und W. Noddack.

(Mitteilung aus der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt.)

Bekanntlich ist in neuerer Zeit viel über das sogenannte »photochemische Äquivalentgesetz« gearbeitet und geschrieben worden. Da vielfach das bisherige Beobachtungsmaterial auf diesem Gebiete unserer Meinung nach nicht genügend berücksichtigt wird, auch in theoretischer Beziehung Unklarheit herrscht, so möchten wir im folgenden den Sinn jenes Gesetzes näher erläutern, was auf Grund unseres heutigen Wissens uns möglich erscheint.

1. Über das ursprüngliche Phänomen, das jedem photochemischen Prozeß zugrunde liegt, braucht eine Unklarheit kaum länger zu herrschen; es ist dieses die experimentell wohl sichergestellte Tatsache, daß primär eine Molekülart bei der Belichtung ein Energiequantum $h\nu$ vorübergehend aufzunehmen imstande ist. Und wir möchten gleich hinzufügen, daß auf dieser experimentellen Tatsache alle weiteren Vorgänge beruhen und daß man weitere allgemeine Schlüsse bei dem heutigen Stande unseres Wissens zu ziehen nicht imstande ist.

Aus bekannten thermodynamischen Prinzipien wissen wir nämlich, daß eine energiereiche Modifikation, wie sie ein mit einem, äußerst selten wohl mit mehreren Energiequanten beladenes Molekül darstellt, chemischer Reaktionen fähig ist, die dem Molekül im ursprünglichen Zustande nicht zukamen. Die photochemischen Prozesse dürften sämtlich auf diese durch den Absorptionsvorgang des absorbierenden Moleküls gesteigerte Reaktionsfähigkeit zurückzuführen sein. Die Stoffe, die mit den beladenen Molekülen reagieren, bezeichnet man passend als »Akzeptoren«.

2. Die Thermodynamik, wie sie durch den neuen Wärmesatz ergänzt ist, läßt aber nur voraussehen, welche chemischen Prozesse (»Dunkelreaktionen«) für die energiereichere Modifikation m ö g l i c h sind; welche Prozesse sich aber w i r k l i c h abspielen, ist Sache der Reaktionsgeschwindigkeit. Da hierüber die Thermodynamik bekanntlich nichts lehrt, so muß festgestellt werden, daß alle thermodynamischen Betrachtungen, soweit sie über den ursprünglichen Vorgang der Aufnahme eines Energiequantums hinausgehen, völlig belanglos sind. Tatsache ist ja auch, daß diese allgemeinen Betrachtungen einen Einfluß auf die Entwicklung der Photochemie nicht ausgeübt haben; inwieweit sie auch rein theoretisch als verfehlt anzusehen sind, brauchen wir daher hier nicht weiter zu erörtern.

Selbstverständlich kann die Thermodynamik in speziellen Fällen uns fördern und hat uns auch, wie insbesondere die bekannten Untersuchungen

von Warburg[1] zeigen, sehr gefördert, wenn es sich darum handelt, eine experimentell bestimmte chemische Ausbeute zu erläutern. Nur gegen die allgemeinen thermodynamischen Betrachtungen richtet sich unsere Abwehr.

Nach dieser kurzen Einleitung verbleibt uns nur noch von unserem Standpunkte die Besprechung einer Anzahl spezieller experimenteller Ergebnisse, wobei wir allerdings, wie wir denken, von selbst zu neuen Gesichtspunkten gelangen werden, die über das, was man bisher als »photochemisches Äquivalentgesetz« bezeichnete, wesentlich hinausgehen.

3. Der einfachste photochemische Prozeß bestände offenbar darin, daß wir ein einatomiges Molekül als lichtabsorbierende Substanz im photochemischen System vor uns haben. Leider ist ein solcher Fall bisher nicht beobachtet worden, obwohl seine Untersuchung besonders interessant wäre. Man könnte z. B. daran denken, daß man Gemische von Quecksilberdampf[2] mit Cyan oder Halogenen untersucht und die photochemische Ausbeute in Abhängigkeit von der Lichtabsorption bestimmt. Hier hätte man es mit scharfen Absorptionslinien zu tun. Wenn die Akzeptoren derartig beschaffen sind, daß das mit einem Energiequantum beladene Quecksilberatom in gleicher Weise reagiert, gleichgültig, welche Spektrallinie des Quecksilberdampfes wir verwenden, so würde das sogenannte Äquivalentgesetz erfüllt sein. Je nach der Beschaffenheit der Akzeptoren kann die photochemische Ausbeute, wie die wirklich untersuchten Fälle alsbald lehren werden, viel größer oder viel kleiner sein.

Der nächst einfachste Fall besteht darin, daß ein mehratomiges Molekül chemisch eindeutig nach dem Gesetz der konstanten und multiplen Reaktionen reagiert, und zwar ohne Nebenreaktionen. Das beste hierher gehörige Beispiel dürfte Noddack[3] in Gestalt der sehr eingehend untersuchten Reaktion

$$Cl_2' + 2\,C\,Cl_3\,Br = 2\,C\,Cl_4 + Br_2 \qquad (1)$$

gefunden haben. Im Sinne dieser Reaktionsgleichung entspricht einem aktivierten Molekül ($Cl_2' = Cl_2 + h\nu$) die Bildung eines Moleküls Brom, wie die Messungen auch ergeben haben.

Trotzdem kann man über die Deutung des eigentlichen Reaktionsmechanismus zur Zeit noch verschiedener Meinung sein. Nach der von Nernst[4] zunächst vertretenen Auffassung spaltet sich der aktivierte Chlor in zwei Atome (erste Dunkelreaktion); die Atome reagieren im Sinne der chemisch einleuchtenden Gleichung, und zwar momentan:

$$2\,Cl + 2\,C\,Cl_3\,Br = 2\,C\,Cl_4 + Br_2 \qquad (2)$$

(zweite Dunkelreaktion).

Durchaus denkbar wäre aber auch, daß der Vorgang direkt im Sinne der obigen Reaktionsgleichung (1) sich abspielt, in welchem Falle wir es mit einer trimolekularen Dunkelreaktion zu tun haben. Selbstverständlich wäre es auch möglich, daß gleichzeitig auf beiden Wegen das Brom in Freiheit gesetzt wird.

---

[1] Zeitschr. f. Elektrochemie **26** 56 (1920).

[2] Einen derartigen Sensibilisierungsvorgang haben qualitativ Cario u. Franck (Zeitschr. f. Physik **11** 161 [1922]) untersucht.

[3] Zeitschr. f. Elektrochemie **27** 359 (1921).

[4] Physik. Zeitschr. **21** 602 (1920).

Ähnlich einfach zu deuten sind die von WARBURG (l. c.)

(3) $$2\,O_3 = 3\,O_2$$

(4) $$3\,O_2 = 2\,O_3$$

und die von PUSCH[1] und später von NODDACK untersuchte Reaktion:

(5) $$Br_2 + C_6H_{12} = C_6H_{11}Br + HBr\,.$$

Die von WARBURG untersuchten Reaktionen der Spaltung des Bromwasserstoffs und des Jodwasserstoffs verlaufen insofern komplizierter, als durch Dunkelreaktionen eine Verdoppelung der Ausbeute stattfindet. Hier haben wir also bereits den Fall, daß das Äquivalentgesetz in seiner einfachsten Fassung uns im Stiche läßt. Die Reaktionen

(6) $$Cl_2 + H_2 = 2\,HCl\,,$$

(7) $$3\,Cl_2 + CH_4 = CCl_4 + 2\,HCl\,,$$ [2]

(8) $$Cl_2 + CO = COCl_2$$

liefern bekanntlich sämtlich ungeheuer viel größere Ausbeuten, als der Zahl der aktivierten Moleküle entspricht. Im Falle der Chlorknallgasbildung hat sich durch Annahme einer Kettenreaktion[3] eine einfache Erklärung geben lassen, die vielleicht auch heute noch als die naheliegendste Deutung gelten kann. Denkbar wäre aber auch die Auffassung, daß die große Ausbeute so zu deuten wäre, daß im Sinne der Gleichung

(9) $$Cl_2' + H_2 = 2\,HCl'$$

wegen der ungeheuren Energieentwicklung in diesem Falle sich aktivierte HCl-Moleküle bilden, die dann weitere Chlormoleküle aktivieren. Diese Auffassung hat den Vorteil, daß sie sich zwanglos auch auf die Reaktionen (7) und (8) übertragen läßt. Sie hat den Nachteil, daß nicht ohne weiteres ersichtlich ist, warum z. B. in den Fällen (1) und (5) nicht ebenfalls eine größere Ausbeute zu beobachten ist. Eine starke Mehrausbeute hat Frl. KORNFELD[4] auch in dem Falle der Zersetzung des Wasserstoffsuperoxyds beobachtet. Hier sehen wir allerdings z. Z. keine andere Möglichkeiten, als die, daß ein mit einem Energiequantum beladenes Molekül des Wasserstoffsuperoxyds seine Energie an andere nicht aktivierte Moleküle des Wasserstoffsuperoxyds abgibt und sie so zum Zerfall bringt, oder daß bei der großen Zerfallsenergie des aktivierten Wasserstoffsuperoxyds sich aktivierte Sauerstoff- oder Wassermoleküle bilden, die ihren Energieüberschuß an andere Wasserstoffsuperoxydmoleküle abgeben und so zum Zerfall bringen. Wie dem auch sei, in experimenteller Hinsicht läßt uns hier das photochemische Äquivalentgesetz im Stich, wenigstens, wie es bisher formuliert wurde.

Sämtliche bisher betrachteten Reaktionen spielten sich in gasförmiger oder flüssiger Phase ab. Der einzige Fall, in dem die Reaktion im festen

[1] loc. cit.

[2] Die Gleichung soll nur ein Schema sein, da bei der Reaktion eine ganze Anzahl von Einzelvorgängen stattfinden.

[3] Zeitschr. f. Electrochemie **27** 359 (1921).

[4] Zeitschr. f. wissenschaftl. Photographie 21. 66. 1921.

Aggregatzustande sich abspielte, ist der von EGGERT und NODDACK[1] eingehend untersuchte Fall

$$(10)\qquad AgBr' = Ag + Br.$$

Hier stimmt der einfachste Ansatz, daß pro aktiviertes Molekül ein Silberatom frei wird, vorausgesetzt, daß ein geeigneter Akzeptor — z. B. Gelatine — das freiwerdende Brom unschädlich macht. Also auch hier zeigt sich, daß man für geeignete chemische Bedingungen sorgen muß, um eine Beziehung zwischen chemischem Umsatz und Zahl der absorbierten Quanten zu erhalten.

4. Bereits oben wurde wiederholt die Annahme eingeführt, daß die primär absorbierte Energie auf andere Moleküle übertragen wird, die dadurch reaktionsfähig werden. Daß dies tatsächlich zutreffen kann, setzen die von uns veranlaßten Untersuchungen von BONHOEFFER[2] und GRÜSS[3] über Sensibilisationen außer Zweifel. Wir betrachten hier nur den von BONHOEFFER untersuchten Fall des Zerfalls von Ozon bei Gegenwart von Chlor oder Brom. Im ersteren Falle spielt sich offenbar die Reaktion so ab, daß das vom Chlor absorbierte Energiequantum an ein Molekül Ozon übertragen wird, das hierauf beim Zusammenstoß mit einem zweiten, nicht aktivierten Ozonmolekül im Sinne der Gleichung

$$(11)\qquad O_3' + O_3 = 3\,O_2$$

reagiert. Mit anderen Worten, es spielt sich hier auf Umwegen der gleiche Vorgang ab, wie wenn man (nach WARBURG) Ozon durch kurzwelliges Licht zersetzt.

Bei Gegenwart von Brom als lichtabsorbierende Substanz werden aber nicht zwei, sondern etwa 30 Moleküle Ozon zersetzt. Hier sind wir also gezwungen, zu einer ähnlichen Deutung zu greifen, wie im Falle des Wasserstoffsuperoxyds. WARBURGS Befund, daß feuchtes Ozon sich im Lichte stärker zersetzt als trockenes, dürfte so aufzufassen sein, daß Wasserdampf hier die Rolle des Broms übernommen hat. Wie dem aber auch sei, fest steht, daß Energieübertragungen möglich sind und daß daher die chemischen Ausbeuten eigentlich mit Sicherheit wohl in keinem einzigen Falle vorausgesagt werden können.

5. Wir wenden uns nunmehr der Besprechung von Reaktionen zu, wie sie bisher unseres Wissens nicht in den Bereich der uns hier beschäftigenden Betrachtungen gezogen wurden, nämlich den Fällen, in denen das absorbierte Lichtquantum außerordentlich viel größer ist als die Wärmetönung der betreffenden chemischen Reaktion. Diese Bedingung ist z. B. erfüllt bei der Belichtung photographischer Platten durch Röntgenstrahlen. Für sichtbares Licht bildet sich, wie oben bemerkt, einfach pro Energiequant ein Silberatom; wie EGGERT und NODDACK demnächst ausführlicher berichten werden, erhält man mit Röntgenstrahlen mehrere Tausend Silberatome pro $h\nu$. Dieser Fall ist natürlich keineswegs in Parallele zu setzen mit der großen Ausbeute im Falle des Chlorknallgases, bei dem die Abweichung vom photochemischen

[1] Sitzungsber. d. Preuß. Akad. XXXIX. 631. 1921.
[2] Zeitschr. f. Physik 13. 94. 1923.
[3] Zeitschr. f. Elektrochemie **29** 144, 1923.

Äquivalentgesetz leicht durch katalytische Prozesse oder dergleichen zu deuten war[1]. Vielmehr tritt hier offenbar die Erscheinung auf, daß die Riesenenergie des absorbierten Quantums sich (möglicherweise auf Umwegen) auf zahlreiche Bromsilbermoleküle verteilt. Geschieht diese Verteilung quantitativ, so kommen wir zu dem einfachen Ansatz

$$N = \frac{Q}{h\nu} \cdot \frac{h\nu}{q} = \frac{Q}{q},$$

wobei Q die absorbierte Energie, q die atomare Dissoziationsenergie eines Moleküls bezeichnet, der etwas gänzlich anderes besagt, als das photochemische Äquivalentgesetz

$$N = \frac{Q}{h\nu}.$$

Im Anschluß hieran sei mitgeteilt, daß beim Aufprall von α-Teilchen auf photographische Platten ebenfalls eine sehr große Anzahl (gemessen wurden bisher von Noddack bis 50000) Silberatome gebildet werden. Würde sich die Energie des α-Teilchens quantitativ auf die Reaktion

$$AgBr = Ag + Br$$

verteilen, so wären etwa 200000 zu erwarten. Also auch hier kann man wohl sagen, daß zur allerersten Orientierung über die zu erwartende Ausbeute obige einfache thermochemische Überschlagsrechnung dem »Äquivalentgesetz« weit überlegen ist.

6. Zusammenfassung. Unsere bisherigen Betrachtungen können wir folgendermaßen zusammenfassen. Die Quantentheorie braucht auf Grund unserer jetzigen Kenntnisse zur Deutung photochemischer Prozesse in keiner anderen Weise hinzugezogen werden, als daß die Lichtabsorption quantenmäßig erfolgt. Welche chemischen Prozesse die Folge davon sind, darüber kann Sicheres wohl in keinem einzigen, noch so einfachen Falle vorhergesehen werden. Nur innerhalb enger Spektralbereiche kann unter gewissen einfachen Verhältnissen der in neuerer Zeit vielbenutzte Ansatz

$$N = \frac{Q}{h\nu}$$

experimentell verifiziert werden. In der Regel lagern sich Dunkelreaktionen über den Vorgang, welche die Ausbeute weitgehend verändern. In den wenigsten Fällen reicht unser chemisches Wissen aus, um hierüber von vornherein etwas auszusagen. Wie schon Warburg zeigte, muß obige Gleichung aus allgemein thermodynamischen Gründen immer mehr versagen, wenn im Gebiete längerer Wellenlängen die Quanten zu klein werden, um den chemischen Prozeß zu ermöglichen. Wie hier gezeigt wurde, wird notwendig im Falle sehr großer Energiequanten die Ausbeute viel größer als obiger Gleichung

[1] Vgl. hierzu besonders auch die schönen Versuche von Weigert (diese Br. 1922 S. 315), bei denen der Nachweis einer nach der Belichtung verlaufenden Reaktion direkt erbracht wurde.

entspricht. Bis auf weiteres kann man sich zur allerersten Orientierung in diesen Fällen der einfachen Gleichung

$$N = \frac{Q}{q}$$

bedienen.

Das sogenannte »photochemische Äquivalentgesetz« wird sich nur dann als zutreffend erweisen können, wenn erstens das absorbierte Energiequantum nicht allzusehr verschieden ist von dem Energiebetrag, den der betreffende chemische Prozeß zu seiner Einleitung bedarf und wenn zweitens nicht sekundäre Energieübertragungen nachträglich störend dazwischen kommen.

Selbstverständlich kann unter diesen Umständen das Bedenken nicht unterdrückt werden, ob es überhaupt zweckmäßig ist, von einem »photochemischen Äquivalentgesetz« zu sprechen, es sei denn, daß man ein Gesetz auf einen nur innerhalb eines engen Gebietes gültigen und nur unter gewissen Kautelen realisierbaren Grenzfall beschränken will.

Thermodynamische Betrachtungen, wie sie von Anfang an in der Literatur sich vorfinden und bei denen die Rückbildung des photochemischen Ausgangsproduktes infolge Dunkelreaktion in Rechnung gesetzt werden soll, konnten uns nicht fördern, weil erstens die Thermodynamik über die hier maßgebende Reaktionsgeschwindigkeit nichts zu lehren vermag und weil außerdem zweitens in allen uns zunächst interessierenden Fällen diese Rückbildung überhaupt keine Rolle spielen darf. Ebenso verfehlt ist die Verknüpfung der photochemischen Prozesse mit irgendeiner Strahlungsgleichung.

Unberührt von obigen Überlegungen bleibt natürlich die historische Tatsache, daß die Aufstellung des Äquivalentgesetzes außerordentlich befruchtend auf die Photochemie gewirkt hat.

Zur Prüfung des photochemischen Äquivalentgesetzes an Trockenplatten. II.

Von J. Eggert und W. Noddack.

(Mitteilung aus der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt.)

(Vorgelegt von Hrn. Nernst.)

In einer früheren Arbeit[1] haben wir gezeigt, daß das photochemische Äquivalentgesetz an der photographischen Trockenplatte der Größenordnung nach erfüllt ist. Wir setzten seitdem die Untersuchungen unter definierteren Bedingungen und mit verfeinerten Meßmethoden fort und können nunmehr unseren damaligen Befund exakt bestätigen: Belichtet man Trockenplatten monochromatisch (436, 405 und 365 $\mu\mu$), mißt einerseits die eingestrahlte Energie, andererseits die Absorption der Platte unter Berücksichtigung der Gelatineabsorption und bestimmt die Menge des durch die Photolyse gebildeten Silbers, so zeigt sich mit voller Sicherheit, daß pro $h\nu$ ein Silberatom freigemacht wird.

Durch diese Versuche dürften sich die Einwände erledigen, die Weigert[2] gegen unsere erste Arbeit erhob. In einer besonderen Veröffentlichung an anderer Stelle werden wir diesen Punkt ausführlich erörtern und gleichzeitig zu Weigerts Versuchen an Auskopieremulsionen[3] Stellung nehmen; hier sei nur bemerkt, daß unter anderem die Absorption der lichtempfindlichen Substanz weit überschätzt wurde.

1. Als Lichtquellen dienten eine Quarzquecksilberlampe, für die photometrischen Messungen zum Teil eine Nitralampe, aus der durch Filter die benutzten monochromatischen Lichtarten ausgesondert wurden (Tabelle 1).

Tabelle 1.

λ ($\mu\mu$)	Filter
615 (Nitralampe)	Spektralreine Rotfilterscheibe und Ferrosulfatlösung
546 (Hg-Lampe)	Spektralreine Grünfilterscheibe und Ferrosulfatlösung
490 (Nitralampe)	Malachitgrünscheibe und Ferrosulfatlösung
436 (Hg-Lampe)	Ammoniakalische Kupfersulfatlösung, Chininsulfatlösung und Ferrosulfatlösung
405 (Hg-Lampe)	Ammoniakalische Kupfersulfatlösung, Ferrosulfatlösung und Diamantfuchsinlösung
365 (Hg-Lampe)	Phenosafraninlösung und ammoniakalische Kupfersulfatlösung

[1] Sitzungsberichte der Preuß. Akademie XXXIX S. 631, 1921.
[2] Zeitschrift für physikalische Chemie 99. 499, 1921.
[3] Diese Zeitschrift XXXIX S. 641, 1921 sowie Schöller, Dissertation, Leipzig 1921.

Alle Filter wurden auf ihre Monochromasie im Quarzspektrographen untersucht; das Licht wurde stets durch Einschalten einer Mattscheibe diffus gemacht.

2. Die Energiemessung geschah mit Hilfe einer Rubensschen Thermosäule und eines Diesselhorstschen Spiegelgalvanometers. Die Thermosäule wurde mit der Hefnerlampe geeicht und an die Gerlachsche Messung (1 Lumensekunde = $22.6 \cdot 10^{-6}$ cal. cm^{-2} sec^{-1}) angeschlossen. Während der Belichtungen kontrollierten wir ständig die eingestrahlte Energie; in dem verwendeten Strahlungsfeld erwies sich die Energiedichte als konstant.

3. Als Plattenmaterial wurden die von der Aktien-Gesellschaft für Anilinfabrikation unter den Namen »Spezial« und »Reproduktion« in den Handel gebrachten Emulsionen verwendet[1], die in dem Format 20×20 cm maschinell auf Spiegelglas gegossen waren. Aus den für die Emulsionen benutzten Gelatinesorten stellten wir uns planparallele Platten von etwa 1 mm Dicke her und bestimmten an ihnen die Absorption; die Spezialplatte enthielt im Mittel 0.90 mg, die Reproduktionsplatte 0.42 mg Silber cm^{-2}.

4. Absorptionsmessung. Da die Schicht der photographischen Platte aus Bromsilber und Gelatine besteht, ist bei einer exakten Messung der Lichtabsorption auf die Eigenschaften beider Komponenten zu achten. So besitzt das Bromsilber, etwa in Form einer geschmolzenen planparallelen Platte untersucht, zwischen 615 und 460 $\mu\mu$ keine nennenswerte Absorption; diese setzt vielmehr erst bei etwa 460 $\mu\mu$ sehr steil ein. Gelatine dagegen zeigt eine von 615 bis 365 $\mu\mu$ erst allmählich, dann stärker ansteigende Absorption.

Hierzu kommt, daß sowohl die Bromsilberkörner als auch das vielfach verzweigte Gerüst der sie einbettenden Gelatine in disperser Form vorliegen, so daß häufige Reflexionen und Beugungen des Lichtes nach allen Richtungen auftreten, deren räumliche Verteilung und Größe von dem Dispersitätsgrad beider Medien abhängt.

Für die Messung der wahren Bromsilberabsorption der Platte ergeben sich hieraus zwei Forderungen:

a) Das von der Schicht nach vorn und hinten diffus ausstrahlende Licht muß von dem eingestrahlten in Abzug gebracht werden, um die Absorption des Systems zu bestimmen.

b) Dieser Absorptionswert ist zu vermindern um den Anteil, der auf die Gelatine entfällt. Mißt man nämlich die Absorption der Platte in den verschiedenen Spektralgebieten, so zeigt sich, daß neben der Absorption im Blau auch im Grün und Rot beträchtliche Lichtmengen in der Schicht verbleiben. Dieser Effekt kann nach unserer Ansicht nur durch die Gelatine verursacht werden, so daß der an der Platte ermittelte Blauwert der Absorption ebenfalls durch die Gegenwart der Gelatine entstellt wird.

---

[1] Für die so entgegenkommende Herstellung und Überlassung dieses wertvollen Versuchsmaterials möchten wir der genannten Gesellschaft, insbesondere Hrn. Dr. Ollendorf, erneut unseren Dank aussprechen.

Zur Messung der Gesamtabsorption (Forderung a) benutzten wir zwei Methoden, eine energetische und eine photometrische. Wir bauten uns eine Zelle in Form einer Pyramide, deren Wände innen mit Thermoelementen besetzt waren; an der Spitze befand sich eine kleine Öffnung für das eingestrahlte Licht, vor der Basis ein Rahmen zum Einstellen der Platte. Die Differenz zwischen dem Ausschlag mit und ohne Platte lieferte die Absorption. Photometrisch wurde die Absorption der Platte im Kugelphotometer gemessen; beide Methoden stimmten bis auf einige Prozente überein.

In der Tabelle 2 sind die für die Absorptionen, Durchlässigkeiten und Reflexionen nach jenen Methoden im Mittel erhaltenen Werte für Spezial- und Reproduktionsplatten in Prozenten angegeben.

Tabelle 2.

Lichtart (λ $\mu\mu$)	Spezial			Reproduktion		
	Reflex.	Durchl.	Abs.	Reflex.	Durchl.	Abs.
615	55	30	15	59	29	12
546	57	25	18	61	24	15
490	51	23	26	60	20	20
436	28	9	63	41	11	48
405	18	6	76	23	8	69
365	8	2	90	12	4	84

Die Messung der Gelatineabsorption geschah teils spektrophotometrisch, teils photographisch an den erwähnten Platten aus den zum Emulsionieren benutzten Gelatinesorten. In der Tabelle 3 finden sich in der zweiten und dritten Spalte die direkt an beiden Gelatinen gefundenen Absorptionswerte unter Berücksichtigung der im Kugelphotometer besonders bestimmten Reflexionen.

Tabelle 3.

λ ($\mu\mu$)	Absorption (in Proz.) von	
	Spezialgelatineplatte 0.88 mm	Reproduktionsgelatineplatte 1.57 mm
615	19	24
546	25	32
490	35	42
436	49	62
405	64	88
365	80	94

Um die wahre Bromsilberabsorption der photographischen Platten bei den Wellenlängen 436, 405 und 365 $\mu\mu$ aus der Tabelle 2 zu bestimmen, betrachten wir die an ihnen bei der Wellenlänge 615 gemessene Absorption als reinen Gelatineeffekt und errechnen seinen Anteil unter Annahme der Gültigkeit des Lambertschen Gesetzes für die übrigen Wellenlängen mit Hilfe

der Tabelle 3. Die Zahlen für Gelatineabsorption, Absorption der Bromsilbergelatineplatten und die wahre Bromsilberabsorption enthält Tabelle 4.

Tabelle 4.

λ ($\mu\mu$)	Spezial			Reproduktion		
	Gel. Abs.	AgBr + Gel. Abs.	AgBr Abs.	Gel. Abs.	AgBr + Gel. Abs.	AgBr Abs.
615	**15**	**15**	0	**12**	**12**	0
546	20	18	− 2	17	15	− 2
490	28	26	− 2	23	20	− 3
436	41	63	+ 22	37	48	+ 11
405	55	76	+ 21	53	69	+ 16
365	71	90	+ 19	74	84	+ 10

Der Verlauf der Gelatineabsorption und derjenige der photographischen Schicht müßte bis zum Beginn der Absorption des Bromsilbers (460 $\mu\mu$) streng genommen identisch sein. Die kleinen Abweichungen, die sich ergeben, sind wohl darauf zurückzuführen, daß Licht verschiedener Wellenlängen in den diffusen Medien verschiedenen Beugungseffekten unterliegt, und daß dadurch die Länge des Lichtweges für die einzelnen Strahlengattungen innerhalb des Systems nicht gleich groß ist.

5. Silberbestimmung. Die belichteten Platten wurden zur Entfernung des unzersetzten Bromsilbers mit Natriumthiosulfat fixiert. Vorversuche zeigten, daß die Konzentration des Thiosulfats, seine H-Ionenkonzentration und die Dauer des Fixierens die Menge des in der Gelatine verbleibenden metallischen Silbers stark ändern. Saure und neutrale Fixierbäder lösen mehr Silber, alkalische weniger. Als brauchbar wurde eine Lösung erkannt, die im Liter 50 g Natriumthiosulfat und 10 g Natriumhydroxyd enthält. Um die Einwirkung dieser Lösung auf das Silber des latenten Bildes zu studieren, wurde eine belichtete Platte in mehrere Teile geschnitten, die der Einwirkung des Fixierbades verschieden lange ausgesetzt wurden (Tabelle 5).

Tabelle 5.

Dauer des Fixierens	Silbermenge
15 Min.	0.82 mg
30 »	0.80 »
60 »	0.76 »
120 »	0.75 »
200 »	0.68 »

Die in der Schicht zurückgebliebene Silbermenge nimmt also mit der Dauer der Einwirkung sehr langsam ab, so daß bei kurzem Fixieren keine wesentlichen Silberverluste eintreten. Um das Fixieren zu beschleunigen, wurden die Platten stets mit der Schicht nach unten in das Bad gehängt. In etwa 15 bis 20 Minuten ist das Bromsilber gelöst. Die gequollene Schicht wurde dann von der Platte abgeschabt und auf der Nutsche bis zum Verschwinden des Thiosulfats gewaschen.

Wir überzeugten uns an einer Reihe von Platten, daß das erste Fixierbad tatsächlich alles Bromsilber aus der Schicht löst. Die ausgewaschene gequollene Gelatine wurde nun in Glasschalen unter Zusatz von 5 ccm 10prozentiger reiner Natronlauge unter wiederholtem Wasserzusatz eingedampft. Die Gelatine wird dabei zerstört, und das Silber flockt aus. Dieses Silber wurde abfiltriert, ausgewaschen und das Filter im Platintiegel eingeäschert, der Rückstand mit reiner Salpetersäure übergossen und zur Trockne gedampft. In den erkalteten Tiegel wurden nun 3 Tropfen reine konzentrierte Salpetersäure, 30 ccm Wasser und 1 Tropfen gesättigte Ferriammonsulfatlösung gebracht. Als Titrationsgefäß diente ein Porzellantiegel mit vertikaler Zwischenwand, dessen Hälften zu etwa gleichen Teilen mit der zu titrierenden Lösung gefüllt wurden, und der die Rolle eines einfachen Photometers spielte. Wir titrierten mit einer etwa 0.001 n Rhodanammoniumlösung, die pro ccm 0.1 mg Ag entsprach. Da ein Tropfen noch einen deutlichen Umschlag gab, war die Genauigkeitsgrenze der Titrationsmethode 0.005 mg Silber.

Um die Silberverluste bei der beschriebenen Behandlung nach dem Fixieren kennenzulernen, wurden bekannte Silbernitratmengen von 0.05 bis 3.0 mg in Gelatinelösung gebracht, mit Metol zu Silber reduziert, dann in der beschriebenen Weise die Gelatine zerstört und das Silber bestimmt. Es zeigte sich, daß die Verluste immer kleiner als 0.03 mg waren. Wir brachen deshalb unsere Versuche vorläufig bei Silbermengen von 0.05 mg ab.

6. Deutung der Versuche. In den Tabellen 6, 7 und 8 sind in Spalte 4 unter Benutzung der gemessenen wahren Bromsilberabsorption von Spezial- und Reproduktionsplatten (Tabelle 4) die Silbermengen berechnet, die der eingestrahlten Energie bei Annahme quantenhafter Absorption entsprechen. In der 5. Spalte ist das Güteverhältnis ϕ $\left(=\frac{\text{beob.}}{\text{ber.}}\right)$ angegeben.

Tabelle 6[1]. $\lambda = 436\,\mu\mu$.

Spezial (Abs. = 22 Proz.)					Reproduktion (Abs. = 11 Proz.)				
Anzahl eingestrahlter $h \cdot \nu$	mg Ag titriert	Anzahl Ag-Atome beob.	Anzahl Ag-Atome ber.	ϕ	Anzahl eingestrahlter $h \cdot \nu$	mg Ag titriert	Anzahl Ag-Atome beob.	Anzahl Ag-Atome ber.	ϕ
$1.72 \cdot 10^{16}$	0.255	$0.38 \cdot 10^{16}$	$0.38 \cdot 10^{16}$	1.00	$1.82 \cdot 10^{16}$	0.108	$0.15 \cdot 10^{16}$	$0.20 \cdot 10^{16}$	0.75
1.80	0.263	0.37	0.40	0.92	5.85	0.326	0.46	0.64	0.72
6.55	0.775	1.10	1.44	0.77	13.0	0.511	0.72	1.43	0.50
17.0	1.320	1.85	3.75	0.49					

Tabelle 7[1]. $\lambda = 405\,\mu\mu$.

Spezial (Abs. = 21 Proz.).

Anzahl eingestrahlter $h \cdot \nu$	mg Ag titriert	Anzahl Ag-Atome beob.	Anzahl Ag-Atome ber.	ϕ
$1.22 \cdot 10^{16}$	0.140	$0.196 \cdot 10^{16}$	$0.26 \cdot 10^{16}$	0.76
1.68	0.229	0.320	0.35	0.92
3.40	0.461	0.645	0.72	0.90

[1] Spalten 1—4 beziehen sich auf den Quadratzentimeter.

Tabelle 8[1]. $\lambda = 365\,\mu\mu$.

Spezial (Abs. = 19 Proz.)					Reproduktion (Abs. = 10 Proz.)				
Anzahl eingestrahlter $h \cdot \nu$	mg Ag titriert	Anzahl Ag-Atome beob.	Anzahl Ag-Atome ber.	ϕ	Anzahl eingestrahlter $h \cdot \nu$	mg Ag titriert	Anzahl Ag-Atome beob.	Anzahl Ag-Atome ber.	ϕ
$3.40 \cdot 10^{16}$	0.375	$0.53 \cdot 10^{16}$	$0.65 \cdot 10^{16}$	0.81	$2.05 \cdot 10^{16}$	0.08	$0.12 \cdot 10^{16}$	$0.21 \cdot 10^{16}$	0.56
4.63	0.428	0.60	0.88	0.68	3.40	0.14	0.20	0.34	0.59
5.30	0.505	0.71	1.05	0.67					
6.15	0.711	1.00	1.17	0.85					

Um die Zunahme der Silbermenge mit steigender Belichtung in weiten Grenzen vergleichen zu können, wurden für die in Tabelle 9 gegebenen Zahlen nicht mehr die streng monochromatischen Filter wegen ihrer zu geringen Energie benutzt, sondern nur eine Lösung von ammoniakalischem Kupfersulfat, das die Linien 436, 405 und 365 $\mu\mu$ durchließ. Als Absorption wurde ein Mittelwert genommen.

Tabelle 9[1].

Spezial (Abs. = 20 Proz.)					Reproduktion (Abs. = 10 Proz.)				
Anzahl eingestrahlter $h \cdot \nu$	mg Ag titriert	Anzahl Ag-Atome beob.	Anzahl Ag-Atome ber.	ϕ	Anzahl eingestrahlter $h \cdot \nu$	mg Ag titriert	Anzahl Ag-Atome beob.	Anzahl Ag-Atome ber.	ϕ
$0.39 \cdot 10^{16}$	0.05	$0.07 \cdot 10^{16}$	$0.08 \cdot 10^{16}$	0.88	$0.85 \cdot 10^{16}$	0.05	$0.07 \cdot 10^{16}$	$0.085 \cdot 10^{16}$	0.82
0.41	0.05	0.07	0.08	0.88	0.95	0.06	0.08	0.095	0.88
0.68	0.09	0.13	0.14	0.93	1.80	0.14	0.20	0.18	1.08
0.90	0.13	0.18	0.18	1.01	2.80	0.21	0.30	0.28	1.06
0.99	0.13	0.18	0.20	0.92	3.40	0.20	0.28	0.34	0.83
1.76	0.24	0.36	0.34	0.99	4.70	0.26	0.37	0.47	0.76
2.30	0.32	0.45	0.46	0.98	5.50	0.31	0.46	0.55	0.79
3.00	0.39	0.55	0.60	0.92	6.40	0.35	0.50	0.64	0.78
6.00	0.67	0.94	1.20	0.79	9.20	0.48	0.67	0.92	0.73
8.00	0.76	1.07	1.60	0.71	11.40	0.51	0.71	1.14	0.62
8.80	0.84	1.18	1.76	0.67	22.50	0.61	0.85	2.25	0.38
9.30	0.90	1.26	1.86	0.68	30.00	0.70	0.98	3.00	0.33
13.00	0.93	1.51	2.60	0.50					
14.00	0.99	1.39	2.80	0.50					
14.80	1.06	1.48	2.76	0.50					
16.00	1.04	1.45	3.20	0.45					
20.70	1.18	1.65	4.14	0.40					
22.50	1.23	1.72	4.50	0.38					
36.00	1.41	1.96	7.20	0.27					
43.00	1.44	2.02	8.60	0.24					
48.00	1.54	2.15	9.60	0.23					
49.50	1.51	2.13	9.90	0.22					
180.00	2.22	3.10	36.00	0.09					
250.00	2.57	3.58	50.00	0.07					
500.00	4.33	6.05	100.00	0.06					

[1] Spalten 1—4 beziehen sich auf den Quadratzentimeter.

Man sieht aus den Resultaten, daß für nicht zu starke Belichtungen das photochemische Äquivalentgesetz für beide Plattentypen bei den Wellenlängen 436, 405 und 365 $\mu\mu$ gilt. Bei großen Lichtmengen treten steigende Abweichungen auf, die sich durch Wiedervereinigung der gebildeten Silber- und Bromatome erklären, wenn die am Korn liegende und als Akzeptor wirkende Gelatine bromiert ist. Als Beweis für diese letztere Erklärung möge die Tatsache dienen, daß beim Zusatz anderer Bromakzeptoren in genügender Menge, z. B. Silbernitrat, Alkali oder Wasser die Proportionalität der Silbermenge mit der eingestrahlten Energie bis zu weit größeren Lichtmengen geht. So ergab ein Vergleich von ϕ:

Anzahl der eingestrahlten $h \cdot \nu$	ϕ	
	trockene Pl.	nasse Pl.
$14 \cdot 10^{16}$	0.50	0.89
$50 \cdot 10^{16}$	0.22	0.43

Die in den Tabellen gegebenen Messungen erstrecken sich von Lichtstärken, die zum Teil unterhalb der Solarisation liegen, bis zu sehr starker direkter Schwärzung der Platte. Versuche, auch die Masse des latenten Bildes innerhalb der für die Photographie wichtigen Lichtmenge zu bestimmen, sind in Vorbereitung.

Diese Arbeit wurde im Physikalisch-Chemischen Institut der Universität Berlin begonnen und zum Teil in der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt, zum Teil im wissenschaftlich-photochemischen Laboratorium der Aktiengesellschaft für Anilinfabrikation beendet.

Über den Zusammenhang zwischen einem Problem der Zahlentheorie und einem Satz über algebraische Funktionen.

Von I. Schur.

(Vorgetragen am 1. März 1923 [s. oben S. 52].)

Besitzt ein ganzzahliges Polynom

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n \qquad (a_0 \neq 0) \tag{1.}$$

in bezug auf die Primzahl p die Eigenschaft, daß die p Zahlen

$$f(0),\ f(1), \cdots,\ f(p-1) \tag{2.}$$

ein vollständiges Restsystem mod. p bilden, so will ich im folgenden sagen, $f(x)$ *liefere eine Permutation mod. p.* Bei gegebenem p läßt sich bekanntlich zu jeder Permutation

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & p-1 \\ \nu_0 & \nu_1 & \cdots & \nu_{p-1} \end{pmatrix}$$

ein Polynom $f(x)$ angeben, so daß $f(\varkappa) \equiv \nu_\varkappa \pmod{p}$ wird. Für $p > 2$ kann hierbei $n \leq p-2$ angenommen werden[1].

Von Interesse sind nun diejenigen Polynome mit festgegebenen ganzzahligen Koeffizienten, die für unendlich viele Primzahlen Permutationen liefern. Man kennt drei Arten von derartigen Polynomen:

1. Die linearen Funktionen

$$L(x) = ax + b$$

für alle zu a teilerfremden Primzahlen.

2. Die Potenzen

$$P(x) = x^n \tag{3.}$$

mit ungeradem Exponenten für alle Primzahlen p, die der Bedingung $(p-1, n) = 1$ genügen.

3. Bedeutet

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x)$$

[1] Vgl. Hermite, Sur les fonctions de sept lettres, Werke Bd. II S. 280.

das n-te Tschebyscheffsche Polynom und setzt man, wenn a irgendeine von Null verschiedene ganze Zahl ist,

$$(4.)\quad D_n(a, x) = \frac{(\sqrt{-4a})^n}{2^{n-1}} T_n\left(\frac{x}{\sqrt{-4a}}\right)$$
$$= x^n + nax^{n-2} + n\sum_{\nu=2}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{(n-\nu-1)(n-\nu-2)\cdots(n-2\nu+1)}{2\cdot 3\cdots \nu} a^\nu x^{n-2\nu},$$

so liefert dieses Polynom, wie Hr. L. E. Dickson[1] zuerst bewiesen hat, eine Permutation mod. p, sobald nur p^2-1 zu n teilerfremd ist. Dies führt für jedes ungerade n, das keine Potenz von 3 ist, auf unendlich viele Primzahlen p.

Im folgenden werde ich zeigen:

I. *Ist n eine ungerade Primzahl, so liefern unter den Polynomen n-ten Grades nur die Ausdrücke von der Form*

$$f(x) = \alpha(\gamma x + \delta)^n + \beta \qquad (n \geqq 3)$$

oder

$$(5.)\quad f(x) = \alpha D_n(a, \gamma x + \delta) + \beta \qquad (n > 3)$$

Permutationen für unendlich viele Primzahlen p[2].

Der Beweis wird mit Hilfe eines an und für sich interessanten Satzes über algebraische Funktionen erbracht werden:

II. *Ist $f(y)$ ein Polynom vom Primzahlgrad $n > 2$, ist der Koeffizient von y^{n-1} gleich Null, und sind unter den n Zweigen der Umkehrungsfunktion $y = \phi(x)$ von $f(y) = x$ weniger als $n-1$ linear unabhängig, so hat $f(y)$ entweder die Form*

$$f(y) = \alpha y^n + \beta \qquad (n \geqq 3)$$

oder die Form

$$f(y) = \alpha T_n(\gamma y) + \beta. \qquad (n > 3)$$

Stellt man sich die Aufgabe, auch für eine zusammengesetzte Gradzahl n alle Polynome n-ten Grades zu bestimmen, die für unendlich viele Primzahlen Permutationen liefern, so hat man folgendes zu beachten:

Versteht man unter der aus $g(x)$ und $h(x)$ zusammengesetzten Funktion den Ausdruck $g(h(x))$, so wird jedes ganzzahlige Polynom n-ten Grades, das aus linearen Funktionen und Ausdrücken (ungeraden Grades) von der Form (3) oder (4) durch Zusammensetzung entsteht, eine Lösung der Aufgabe liefern. Gibt es für die Gradzahl n keine anderen Polynome der verlangten Art, so will ich sagen, n sei eine *Dicksonsche Zahl.* Ein gerades n wäre also als Dicksonsche Zahl zu bezeichnen, wenn es überhaupt kein Polynom n-ten Grades gibt, das für unendlich viele Primzahlen Permutationen liefert. In einer späteren Arbeit werde ich den Satz beweisen: *Weiß man, daß für alle zusammengesetzten*

---

[1] Annals of Mathematics, Bd. 11 (1897), S. 65—120 und 161—183. Vgl. auch L. E. Dickson, Linear Groups, Leipzig 1901, S. 57.

[2] Daß für eine ungerade Primzahl $n > 3$ die Ausdrücke (5) die einzigen Polynomen n-ten Grades sind, die für *alle* der Bedingung $(p^2-1, n) = 1$ genügenden hinreichend großen Primzahlen p Permutationen liefern, hat schon Hr. Dickson (Ann. of Math., a. a. O. S. 89—91) bewiesen.

Teiler n' von n jede Permutationsgruppe in n' Vertauschungssymbolen, die einen Zyklus der Ordnung n' enthält und nicht zweifach transitiv ist, imprimitiv sein muß, so ist n eine Dicksonsche Zahl. Hieraus folgt auf Grund eines Satzes von Hrn. W. Burnside (Theory of Groups, Cambridge 1911, S. 343), daß jede Primzahlpotenz eine Dicksonsche Zahl ist. Dasselbe gilt, wie ich zeigen werde, auch für jedes Produkt von zwei Primzahlpotenzen.

§ 1.

Kriterien für die zu untersuchenden Polynome.

Liefert das Polynom (1.) Permutationen für unendlich viele Primzahlen, so gilt dasselbe auch für das ebenfalls ganzzahlige Polynom

$$n^n a_0^{n-1}\left[f\left(\frac{x-a_1}{na_0}\right)-f\left(\frac{-a_1}{na_0}\right)\right] = x^n + b_2 x^{n-2} + \cdots + b_{n-1}x .$$

Wir können daher von vornherein annehmen, daß in (1.)

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 0, \quad a_n = 0$$

ist[1]. Ein solches Polynom werde ich im folgenden kurz als *normiert* bezeichnen.

Die zu n teilerfremden unter den unendlich vielen Primzahlen, für die $f(x)$ Permutationen liefern soll, werden sich in gewisser Weise auf die $\phi(n)$ arithmetischen Progressionen

$$ns - r \qquad ((r, n) = 1, \quad 0 < r < n)$$

verteilen und mindestens eine unter ihnen wird unendlich viele Primzahlen der verlangten Art enthalten. Der Fall $r = n - 1$ ist hierbei auszuschließen, denn für eine Primzahl

$$p = ns - n + 1$$

wird f^{s-1} vom Grade $p - 1$ und

$$\sum_{x=0}^{p-1} [f(x)]^{s-1} \equiv -1 \pmod{p} .$$

Daher können die p Zahlen (2.) kein vollständiges Restsystem mod. p bilden.

Es möge nun $f(x)$ für unendlich viele Primzahlen der Form $ns - r$ Permutationen liefern, und es sei, wenn ν eine gegebene nicht negative ganze Zahl ist,

$$p = ns - r > n\nu + r + 2$$

eine dieser Primzahlen. Dann wird für

$$m = s + \nu$$

der Grad

$$mn = ns + n\nu = p + n\nu + r$$

von

$$[f(x)]^m = A_m x^m + A_{m+1} x^{m+1} + \cdots + A_{mn} x^{mn}$$

[1] Hieraus folgt schon, daß der Fall $n = 2$ für uns nicht in Betracht kommt.

kleiner als $2p-2$. Unter den hier auftretenden Potenzen wird daher nur x^{p-1} einen durch $p-1$ teilbaren Exponenten aufweisen. Folglich wird

$$(6.)\qquad \sum_{x=0}^{p-1} [f(x)]^m \equiv -A_{p-1} \equiv 0 \pmod{p}.$$

Nun ist aber

$$A_{p-1} = \sum \frac{m!}{\mu_0!\,\mu_1!\cdots\mu_{n-1}!} a_0^{\mu_0} a_1^{\mu_1} \cdots a_{n-1}^{\mu_{n-1}},$$

die Summe über alle nichtnegativen $\mu_\varkappa$ erstreckt, die den Bedingungen

$$(7.)\qquad \mu_0 + \mu_1 + \cdots + \mu_{n-1} = m, \quad n\mu_0 + (n-1)\mu_1 + \cdots + \mu_{n-1} = p-1$$

genügen. Hierbei wird

$$M = \frac{m!}{\mu_0!\,\mu_1!\cdots\mu_{n-1}!} = \frac{m(m-1)\cdots(\mu_0+1)}{\mu_1!\,\mu_2!\cdots\mu_{n-1}!} = \frac{m(m-1)\cdots(m-\mu_1-\cdots-\mu_{n-1}+1)}{\mu_1!\,\mu_2!\cdots\mu_{n-1}!}.$$

Beachtet man nun, daß

$$m = \nu + s = \nu + \frac{r}{n} + \frac{p}{n}$$

ist, und daß $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_{n-1}$ unterhalb p liegen, so erhält man mod. p

$$M \equiv \frac{\left(\nu+\frac{r}{n}\right)\left(\nu+\frac{r}{n}-1\right)\cdots\left(\nu+\frac{r}{n}-\mu_1-\cdots-\mu_{n-1}+1\right)}{\mu_1!\,\mu_2!\cdots\mu_{n-1}!}.$$

Bezeichnet man den rechtsstehenden Ausdruck mit $B_{\mu_1,\mu_2,\cdots\mu_{n-1}}$, so wird also (wegen $a_0 = 1$)

$$(8.)\qquad A_{p-1} \equiv \sum B_{\mu_1,\mu_2,\cdots\mu_{n-1}} a_1^{\mu_1} a_2^{\mu_2} \cdots a_{n-1}^{\mu_{n-1}} \pmod{p}.$$

Die Summationsindizes $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_{n-1}$ unterliegen hierbei wegen (7.) nur der Bedingung

$$\mu_1 + 2\mu_2 + \cdots + (n-1)\mu_{n-1} = nm - p + 1 = n\nu + r + 1.$$

Die in (8.) rechts stehende Summe erscheint nun als eine von p nicht mehr abhängende rationale Zahl S, deren Zähler wegen (6.) durch p teilbar sein muß. Da wir noch über unendlich viele Primzahlen p verfügen, so muß $S = 0$ sein.

Die Summe S hat eine einfache Bedeutung: sie ist, wie man leicht erkennt, nichts anderes, als der Koeffizient von $t^{n\nu+r+1}$ in der Entwicklung von

$$(9.)\qquad [1 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_{n-1} t^{n-1}]^{\nu+\frac{r}{n}}$$

nach Potenzen von t. Wir erhalten also den Satz:

III. *Soll das normierte Polynom*

$$(10.)\qquad f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x \qquad (a_1 = 0)$$

für unendlich viele Primzahlen von der Form $ns - r$ Permutationen liefern, so muß für $\nu = 0, 1, 2, \cdots$ der Koeffizient von $t^{n\nu+r+1}$ in der Entwicklung des Ausdrucks (9.) *nach Potenzen von t gleich Null sein.*

Hieraus folgt schon, daß für $n = 3$ die Potenz x^3 das einzige normierte Polynom ist, das für unendlich viele Primzahlen Permutationen liefert. Denn hier kommt nur der Fall $r = 1$ in Betracht. Für $\nu = 0$ wird aber der Koeffizient von t^2 in der Entwicklung von $(1 + a_2 t^2)^{\frac{1}{3}}$ nur dann gleich Null, wenn $a_2 = 0$ ist. Ebenso erkennt man leicht, daß es überhaupt keine Polynome vierten Grades gibt, die für unendlich viele Primzahlen Permutationen liefern.

Das Kriterium III läßt sich noch auf eine andere Form bringen:

IV. *Soll das Polynom* (10.) *für unendlich viele Primzahlen von der Form* $ns - r$ *Permutationen liefern, so muß folgende Bedingung erfüllt sein: Setzt man*

$$f(y) = y^n + a_2 y^{n-2} + \cdots + a_{n-1} y = x \tag{11.}$$

und entwickelt y *nach Potenzen von* $x^{\frac{1}{n}}$ *in der Form*

$$y = x^{\frac{1}{n}} + c_0 + c_1 x^{-\frac{1}{n}} + c_2 x^{-\frac{2}{n}} + \cdots, \tag{12.}$$

so müssen alle Koeffizienten

$$c_r, \quad c_{n+r}, \quad c_{2n+r}, \cdots$$

den Wert 0 *haben.*

Der Beweis ergibt sich mit Hilfe der LAGRANGEschen Umkehrungsformel[1]. Sind nämlich $z(t)$ und $w(t)$ zwei in der Umgebung von $t = 0$ reguläre Funktionen von t und ist $z'(0) \neq 0$, so wird bekanntlich[2]

$$w \frac{z}{t} \frac{dt}{dz} = w(0) + \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda!} \left[\frac{d^\lambda (z^{-\lambda} t^\lambda w)}{dt^\lambda} \right]_{t=0} z^\lambda. \tag{13.}$$

Hier sei, wenn

$$h(t) = 1 + a_2 t^2 + \cdots + a_{n-1} t^{n-1}$$

gesetzt wird,

$$z = t h^{-\frac{1}{n}}, \quad w = h^{-\frac{1}{n}}.$$

Dann geht (13.) über in

$$h^{-\frac{2}{n}} \frac{dt}{dz} = 1 + \sum_{\lambda=1}^{\infty} B_\lambda z^\lambda, \quad B_\lambda = \frac{1}{\lambda!} \left[\frac{d^\lambda h^{\frac{\lambda-1}{n}}}{dt^\lambda} \right]_{t=0}.$$

Zur Bestimmung von t als Funktion von z dient die Gleichung

$$h(t) = 1 + a_2 t^2 + \cdots + a_{n-1} t^{n-1} = \left(\frac{t}{z}\right)^n.$$

Setzt man

$$t = y^{-1}, \quad z = v^{-1},$$

so wird

$$y^n + a_2 y^{n-2} + \cdots + a_{n-1} y = v^n,$$

ferner ist

$$h^{-\frac{2}{n}} \frac{dt}{dz} = z^2 t^{-2} \frac{dt}{dz} = z^2 t^{-2} \frac{dt}{dy} \frac{dy}{dv} \frac{dv}{dz} = \frac{dy}{dv}.$$

[1] Die erste Anregung, eine Umformung des Kriteriums III mit Hilfe der LAGRANGEschen Umkehrungsformel zu versuchen, verdanke ich Hrn. Dr. G. SZEGÖ.

[2] Vgl. z. B. HERMITE, Cours professé pendant le 2e sémestre 1881—82, S. 142, wo sich die Formel in etwas anderer Schreibweise findet.

Also wird

$$\frac{dy}{dv} = 1 + \sum_{\lambda=1}^{\infty} B_\lambda v^{-\lambda}.$$

Andererseits folgt aber aus (12.)

$$y = v + c_0 + c_1 v^{-1} + c_2 v^{-2} + \cdots$$

Daher ist für $\lambda = 1, 2, 3, \cdots$

$$-\lambda c_\lambda = B_{\lambda+1} = \frac{1}{(\lambda+1)!}\left[\frac{d^{\lambda+1} h^{\frac{\lambda}{n}}}{dt^{\lambda+1}}\right]_{t=0}.$$

Für $\lambda = n\nu + r$ wird aber $B_{\lambda+1}$ nichts anderes als der Koeffizient von $t^{n\nu+r+1}$ in der Entwicklung des Ausdrucks (9.) nach Potenzen von t. Aus dem Satze III ergibt sich nun unmittelbar der Satz IV.

Es empfiehlt sich, diesen Satz noch etwas anders auszusprechen. Bedeutet nämlich ε eine primitive n-te Einheitswurzel, so erhält man die n Zweige $y_0, y_1, \cdots y_{n-1}$ der durch (11.) definierten Funktion y von x in der Umgebung der Stelle $x = \infty$ in der Form

$$y_\varkappa = \varepsilon^\varkappa x^{\frac{1}{n}} + c_0 + c_1 \varepsilon^{-\varkappa} x^{-\frac{1}{n}} + c_2 \varepsilon^{-2\varkappa} x^{-\frac{2}{n}} + \cdots$$

Hieraus folgt für $\varkappa = 0, 1, \cdots, n-2$

$$(14.)\qquad S_\varkappa = \frac{1}{n}\sum_{\lambda=0}^{n-1} \varepsilon^{\varkappa\lambda} y_\lambda = x^{-\frac{\varkappa}{n}} \sum_{\nu=0}^{\infty} c_{n\nu+\varkappa} x^{-\nu}.$$

Für jedes normierte Polynom wird $S_0 = -\frac{a_1}{n} = 0$. Unter den Voraussetzungen des Satzes IV wird aber, da der Fall $r = n-1$ auszuschließen war, auch $S_r = 0$.

Insbesondere ergibt sich also:

V. *Ein normiertes Polynom $f(x)$ kann nur dann für unendlich viele Primzahlen Permutationen liefern, wenn zwischen den n Zweigen $y_\varkappa$ der durch $f(y) = x$ definierten algebraischen Funktion außer der Relation*

$$y_0 + y_1 + \cdots + y_{n-1} = 0$$

noch mindestens eine zweite lineare homogene Beziehung besteht.

Es entsteht also die Aufgabe, alle normierten Polynome $f(x)$ zu bestimmen, für die unter den n Zweigen $y_\varkappa$ der Umkehrungsfunktion höchstens $n-2$ linear unabhängige vorhanden sind. Man kann diese Aufgabe auch so formulieren: Für jedes normierte Polynom $f(x)$ genügt die Umkehrungsfunktion y einer linearen homogenen Differentialgleichung der Ordnung $n-1$ mit Koeffizienten, die rationale Funktionen von x sind. Für welche Polynome $f(x)$ läßt sich für y eine Differentialgleichung derselben Form von niedrigerer Ordnung angeben?

§ 2.

Der Fall eines Primzahlgrades n.

Es sei zunächst noch n eine beliebige Zahl. Hat $S_\varkappa$ die frühere Bedeutung, so tritt zu den Formeln (14.) noch hinzu

$$S_{n-1} = \frac{1}{n} \sum_{\lambda=0}^{n-1} \varepsilon^{-\lambda} y_\lambda = x^{\frac{1}{n}} + x^{-\frac{n-1}{n}} \sum_{\nu=0}^{n-1} c_{n\nu+n-1} x^{-\nu}.$$

Es ist nun unmittelbar klar, daß die von Null verschiedenen unter den n Funktionen

$$S_0, S_1, \cdots, S_{n-1}$$

linear unabhängig sind. Andererseits ist aber

$$y_\varkappa = \sum_{\lambda=0}^{n-1} \varepsilon^{-\varkappa\lambda} S_\lambda.$$

Eine lineare Relation

$$\sum_{\varkappa=0}^{n-1} b_\varkappa y_\varkappa = 0 \tag{15.}$$

läßt sich daher in der Form

$$\sum_\lambda S_\lambda \sum_\varkappa b_\varkappa \varepsilon^{-\varkappa\lambda} = 0$$

schreiben.

Es möge nun S_λ gleich Null sein für

$$\lambda = 0, \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k$$

und von Null verschieden für

$$\lambda = \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_l. \qquad (l = n-1-k)$$

Dann gilt also die Regel: *Die Relation* (15.) *besteht dann und nur dann, wenn die Konstanten $b_\varkappa$ den l Bedingungen*

$$\sum_{\varkappa=0}^{n-1} b_\varkappa \varepsilon^{-\varkappa\beta} = 0 \qquad (\beta = \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_l)$$

genügen.

Es sei nun

$$P = \begin{pmatrix} \varkappa \\ \mu_\varkappa \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ \mu_0 & \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_{n-1} \end{pmatrix}$$

eine Permutation der zu der algebraischen Funktion y von x gehörenden Monodromiegruppe $\mathfrak{G}$. Aus jeder der k Relationen

$$nS_\alpha = \sum_{\varkappa=0}^{n-1} \varepsilon^{\alpha\varkappa} y_\varkappa = 0 \qquad (\alpha = \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k)$$

folgt dann auch, wenn $P^{-1} = \begin{pmatrix} \varkappa \\ \mu'_\varkappa \end{pmatrix}$ gesetzt wird,

$$\sum_{\varkappa=0}^{n-1} \varepsilon^{\alpha\varkappa} y_{\mu'_\varkappa} = 0$$

oder, was dasselbe ist,

$$\sum_{\varkappa=0}^{n-1} \varepsilon^{\alpha\mu_\varkappa} y_\varkappa = 0\,.$$

Wir können also schließen: *Ist α einer der k Indizes α_ϱ und β einer der l Indizes β_σ, so muß für jede Permutation P der Gruppe $\mathfrak{G}$ die Gleichung*

$$\sum_{\varkappa=0}^{n-1} \varepsilon^{\alpha\mu_\varkappa - \beta\varkappa} = 0 \tag{16.}$$

bestehen.

Die weitere Diskussion gestaltet sich besonders einfach, wenn n eine ungerade Primzahl ist. Denn in diesem Fall erfordert die Gleichung (16.), daß die n Exponenten

$$\alpha\mu_0\,, \quad \alpha\mu_1 - \beta\,, \cdots \quad \alpha\mu_{n-1} - \beta(n-1)$$

ein vollständiges Restsystem mod. n bilden. Ist

$$\alpha \equiv \beta\gamma \,(\text{mod. } n)\,, \qquad (1 \leq \gamma < n)$$

so bilden auch die n Zahlen $\mu_\varkappa - \gamma\varkappa$ ein solches Restsystem. Da nun eine der Zahlen k und $l = n - 1 - k$ größer oder gleich $\frac{1}{2}(n-1)$ sein muß, so werden wir, sobald $k > 1$ ist, über mindestens $\frac{1}{2}(n-1)$ verschiedene Zahlen γ aus der Reihe $1, 2, \cdots, n-1$ verfügen, für die

$$\sum_{\varkappa=0}^{n-1} (\mu_\varkappa - \gamma\varkappa)^m \equiv 0 \;(\text{mod. } n) \qquad (m = 2, 3, \cdots, n-2) \tag{17.}$$

wird.

Setzen wir

$$s_{\varrho\sigma} = \sum_{\varkappa=0}^{n-1} \mu_\varkappa^\varrho \varkappa^\sigma\,,$$

so liefert die Kongruenz (17.)

$$s_{m0} - \binom{m}{1} s_{m-1,1}\gamma + \cdots \pm s_{0m}\gamma^m \equiv 0 \;(\text{mod. } n)\,.$$

Hierin ist für jedes m

$$s_{m0} \equiv s_{0m} \equiv 0 \;(\text{mod. } n)\,.$$

Also wird

$$-\binom{m}{1} s_{m-1,1} + \binom{m}{2} s_{m-2,2}\gamma - \cdots \mp \binom{m}{1} s_{1,m-1}\gamma^{m-2} \equiv 0\,.$$

Diese Kongruenz hat mindestens $\frac{1}{2}(n-1)$ inkongruente Lösungen γ. Ist daher

$$m-2<\frac{n-1}{2},$$

so müssen alle Koeffizienten durch n teilbar sein. Oder einfacher: Die Summe $s_{\varrho\sigma}$ ist durch n teilbar, sobald nur die Bedingung

$$\varrho+\sigma\leqq\frac{n+1}{2}$$

erfüllt ist.

Wir denken uns nun die Permutation $\mu_\varkappa$ mit Hilfe eines ganzzahligen Polynoms

$$\mu_\varkappa\equiv g(\varkappa)\equiv b_0+b_1\varkappa+\cdots+b_q\varkappa^q \pmod{n}$$

vom Grade $q\leqq n-2$ dargestellt, und es soll hierbei b_q nicht durch n teilbar sein. Ist nun

$$q\varrho+\sigma=n-1, \tag{18.}$$

so wird

$$s_{\varrho\sigma}\equiv\sum_{\varkappa=0}^{n-1}g^\varrho(\varkappa)\varkappa^\sigma\equiv-b_q^\varrho \pmod{n}$$

nicht durch n teilbar. Es muß also jedesmal, wenn zwei nicht negative ganze Zahlen der Bedingung (18.) genügen,

$$\varrho+\sigma>\frac{n+1}{2}$$

sein. Für $\varrho=1$, $\sigma=n-1-q$ ergibt sich hieraus $q<\frac{1}{2}(n+1)$ und für $\varrho=2$, $\sigma=n-1-2q$ genauer

$$q<\frac{n+1}{4}. \tag{19.}$$

Setzt man ferner

$$\varrho=\left[\frac{n-1}{q}\right],\quad \sigma=n-1-q\left[\frac{n-1}{q}\right],$$

so erhält man

$$\frac{n-1}{q}+q-1\geqq\varrho+\sigma>\frac{n+1}{2},$$

also

$$\frac{n-1}{q}+q>\frac{n+3}{2}. \tag{20.}$$

Aus (19.) und (20.) folgt

$$\frac{n-1}{q}+\frac{n+1}{4}>\frac{n+3}{2},$$

also

$$q<4\,\frac{n-1}{n+5}<4.$$

Für $q = 2$ ist (20.) nicht möglich. Für $q = 3$ führt (19.) auf $n > 11$, dagegen (20.) auf $n < 7$.

Es bleibt folglich nur der Fall $q = 1$ übrig. Wenn also unter den n Funktionen S_λ außer S_0 noch eine zweite identisch verschwindet, so *muß die zu y gehörende Monodromiegruppe $\mathfrak{G}$ im Falle eines Primzahlgrades n eine auflösbare (lineare) Gruppe sein*[1]. Hieraus folgt insbesondere, daß jede Permutation von $\mathfrak{G}$ entweder ein Zyklus der Ordnung n ist oder in einen Zyklus der Ordnung 1 und außerdem in lauter Zykeln von derselben Ordnung zerfällt.

§ 3.

Beweis der Sätze I und II.

Wir betrachten nun die im Endlichen gelegenen Verzweigungspunkte der algebraischen Funktion y von x. Soll $x = \xi$ eine solche Stelle sein, so muß die Gleichung $\xi = f(y)$ eine mehrfache Wurzel $y = \eta$ besitzen, so daß also

$$\xi = f(\eta), \quad f'(\eta) = 0$$

wird. Ist nun

$$f(y) = f(\eta) + (y-\eta)^r (y-\eta_1)^{r_1} \cdots, \qquad (r > 1)$$

so zerfällt die zum Verzweigungspunkte $x = \xi$ gehörende Umlaufssubstitution in Zykeln der Ordnungen $r, r_1, \cdots$. In unserem Falle kommen nach dem Schlußergebnis der letzten Paragraphen nur zwei Möglichkeiten in Betracht: entweder es ist $r = n$ oder es ist unter den Exponenten $r, r_1, \cdots$ einer gleich Eins, während die übrigen einander gleich sind. Ist $\nu = n$, so wird

$$f(y) = f(\eta) + (y-\eta)^n,$$

und da $f(y)$ normiert, d. h. von der Form (11.) sein soll, so wird $f(y) = y^n$.

Tritt aber der zweite Fall ein, so erhält $f(y)$ die Form

$$f(y) = A + (y-\alpha) g^r(y), \tag{21.}$$

wobei $g(y)$ ein Polynom ohne mehrfache Nullstellen mit dem höchsten Koeffizienten 1 bedeutet und außerdem

$$g(\eta) = 0, \quad g(\alpha) \neq 0, \quad r > 1$$

ist. Es wird dann

$$f'(y) = g^{r-1}[r(y-\alpha)g' + g].$$

Der Ausdruck in der Klammer hat mit $(y-\alpha)g(y)$ keine Nullstelle gemeinsam. Daher muß noch ein von η verschiedener Wert $y = \zeta$ vorhanden sein, der auf eine von $\xi = f(\eta)$ verschiedene Verzweigungsstelle $x = f(\zeta)$ führt[2]. Dies liefert für $f(y)$ eine zweite Darstellung

$$f(y) = B + (y-\beta) h^s(y)$$

[1] Auf anderem Wege ergibt sich dies, indem man den bekannten Satz von Hrn. W. Burnside über einfach transitive Permutationsgruppen von Primzahlgrad heranzieht. Doch scheint mir der hier angegebene direkte Beweis elementarer zu sein.

[2] Das ist auch an und für sich klar, da sonst die zu $x = \xi$ gehörende Umlaufssubstitution zyklisch sein müßte.

von derselben Art wie (21.). Hierbei sind aber $g(y)$ und $h(y)$ teilerfremde Polynome. Aus

$$f'(y) = g^{r-1}[r(y-\alpha)g' + g] = h^{s-1}[s(y-\beta)h' + h]$$

folgt daher

$$r(y-\alpha)g' + g = h^{s-1}\phi, \quad s(y-\beta)h' + h = g^{r-1}\phi,$$

wobei ϕ wieder eine ganze rationale Funktion von y sein muß.

Bezeichnet man nun die Grade von $g(y)$ und $h(y)$ mit $\varkappa$ und λ, so ergibt sich

$$\varkappa \geqq (s-1)\lambda, \quad \lambda \geqq (r-1)\varkappa,$$

also $1 \geqq (s-1)(r-1)$. Dies liefert

$$r = s = 2, \quad \varkappa = \lambda = \frac{n-1}{2}.$$

Zugleich erkennt man, daß ϕ eine Konstante ist, für die man durch Vergleichen der höchsten Koeffizienten den Wert $\phi = n$ erhält. Es wird also

$$(22.) \qquad 2(y-\alpha)g' + g = nh, \quad 2(y-\beta)h' + h = ng$$

und

$$(23.) \qquad f(y) = A + (y-\alpha)g^2(y) = B + (y-\beta)h^2(y).$$

Damit nun in $f(y)$ der Koeffizient von y^{n-1} gleich 0 wird, ist erforderlich, daß

$$g(y) = y^{\frac{n-1}{2}} + \frac{\alpha}{2}y^{\frac{n-3}{2}} + \cdots, \quad h(y) = y^{\frac{n-1}{2}} + \frac{\beta}{2}y^{\frac{n-3}{2}} + \cdots$$

sei. Vergleicht man in der ersten der Gleichungen (22.) die Koeffizienten von $y^{\frac{n-3}{2}}$, so erhält man $\beta = -\alpha$.

Aus (22.) ergibt sich ferner für $g(y)$ die Differentialgleichung

$$(24.) \qquad (y^2-\alpha^2)g'' + (2y+\alpha)g' - \frac{n^2-1}{4}g = 0.$$

Der Fall $\alpha = 0$ führt nur auf das Polynom $g(y) = y^{\frac{n-1}{2}}$, was wegen $g(\alpha) \neq 0$ auszuschließen ist. Für $\alpha \neq 0$ ist aber das einzige Polynom, das der Differentialgleichung (24.) genügt, von der Form

$$g(y) = \text{const.}\ F\left(\frac{1-n}{2}, \frac{1+n}{2}, \frac{1}{2}, \frac{y+\alpha}{2\alpha}\right).$$

Um aber $f(y)$ am einfachsten auf ein TSCHEBYSCHEFFsches Polynom zurückzuführen, verfährt man besser folgendermaßen. Setzt man

$$y = \alpha \cos\phi, \quad z = \sin\frac{\phi}{2}\cdot g(y),$$

so geht (24.), wie eine einfache Rechnung zeigt, in die Differentialgleichung

$$\frac{d^2z}{d\phi^2} + \frac{n^2}{4}z = 0$$

über. Daher wird

$$g(\alpha \cos \phi) = C \cdot \frac{\sin \frac{n\phi}{2}}{\sin \frac{\phi}{2}} + D \cdot \frac{\cos \frac{n\phi}{2}}{\sin \frac{\phi}{2}}.$$

Damit dies eine ganze rationale Funktion von $\cos \phi$ wird, muß $D = 0$ sein. Also wird wegen (23.)

$$f(\alpha \cos \phi) = A - C^2 \alpha (1 - \cos \phi) \frac{\sin^2 \frac{n\phi}{2}}{\sin^2 \frac{\phi}{2}}$$

$$= A - C^2 \alpha (1 - \cos n\phi).$$

Nimmt man noch die Bedingung $f(0) = 0$ hinzu, so erhält man $A = C^2 \alpha$, also

$$f(y) = \text{const. } T_n\left(\frac{y}{\alpha}\right).$$

Man beachte noch, daß die Umkehrungsfunktion

$$y = \cos\left(\frac{1}{n} \arccos x\right)$$

von $T_n(y) = x$ der Differentialgleichung

$$(1 - x^2) \frac{d^2 y}{dx^2} - x \frac{dy}{dx} + \frac{y}{n^2} = 0$$

genügt. Die Anzahl der linear unabhängigen unter den n Zweigen der Funktion y ist daher (für $n > 2$) gleich 2, sie ist also für $n > 3$ kleiner als $n - 1$.

Damit ist der Satz II als vollständig bewiesen anzusehen. Zu dem Satze I gelangen wir nun folgendermaßen. Soll das zu betrachtende Polynom $f(y)$ von der Form (11.) sein und ganzzahlige Koeffizienten besitzen, so ist $f(y)$, wie aus unseren Ergebnissen folgt, entweder gleich y^n oder von der Gestalt

$$f(y) = \frac{\alpha^n}{2^{n-1}} T_n(y) = y^n - \frac{n}{4} \alpha^2 y^{n-2} + \frac{n(n-3)}{16} \alpha^4 y^{n-4} - \cdots.$$

Setzt man $n\alpha^2 = -4a'$, so wird

$$\frac{n(n-3)}{16} \alpha^4 = \frac{n-3}{n} a'^2.$$

Für eine ungerade Primzahl $n > 3$ kann diese Zahl nur dann zugleich mit a' eine ganze Zahl sein, wenn $a' = na$ durch n teilbar ist. Dann wird aber $\alpha = \sqrt{-4a}$ und man erhält für $f(y)$ genau das Dicksonsche Polynom $D_n(a, y)$.

Ausgegeben am 28. Juni.

SITZUNGSBERICHTE
DER PREUSSISCHEN
AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.
1923

XVI. Gesamtsitzung. 17. Mai.

Vorsitzender Sekretar: Hr. Lüders.

*1. Hr. Haberlandt las über »Goethe und die Pflanzenphysiologie«.

In Goethes botanischen Schriften, insbesondere in der Metamorphose der Pflanzen, kombinieren sich entwicklungsphysiologische mit rein naturphilosophischen Erklärungsversuchen. Es wird gezeigt, daß die ersteren in verschiedener Hinsicht als Vorläufer moderner Anschauungen über entwicklungsgeschichtliches Geschehen zu betrachten sind. In der Geschichte der Botanik ist aber der naturphilosophische Inhalt der Metamorphosenlehre so sehr in den Vordergrund gerückt worden, daß die Beurteilung Goethes als Botaniker zu einseitig ausfiel.

2. Hr. Schmidt legte eine Arbeit des Hrn. H. Kneser in Göttingen vor: »Über die Lösungen eines Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen, das der Lipschitzschen Bedingung nicht genügt.« (Ersch. später.)

Wenn die rechten Seiten eines Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen stetig sind, aber der Lipschitzschen Bedingung nicht genügen, so sind die Lösungen im allgemeinen durch ihre Anfangswerte nicht bestimmt. Es wird bewiesen, daß die Gesamtheit der Endwertsysteme bei einem festen Argumentwert ein Kontinuum bildet.

3. Hr. Erman überreichte die 3. und 4. Lieferung seines Werkes »Ägypten und ägyptisches Leben im Altertum« neu bearbeitet von Hermann Ranke (Tübingen 1923), sowie sein Buch »Die Literatur der Ägypter. Gedichte, Erzählungen und Lehrbücher aus dem 3. und 2. Jahrtausend v. Chr.« (Leipzig 1923).

4. Hr. von Wilamowitz-Moellendorff überreichte das 14. Heft seiner Übersetzung griechischer Tragödien: »Die griechische Tragödie und ihre drei Dichter« (Berlin 1923).

5. Die Akademie hat auf Vorschlag der vorberatenden Kommission für die Bopp-Stiftung dem Studienrat am Köthener Gymnasium, Hrn. Dr. Franz Specht, als Anerkennung seiner Verdienste um die Bearbeitung des Baranowskischen Nachlasses den Bopp-Preis verliehen.

Die Akademie hat in der Gesamtsitzung am 17. Mai 1923 den ordentlichen Professor an der Universität Bonn, Hrn. Geheimen Regierungsrat Dr. Eduard Study, zum korrespondierenden Mitglied ihrer physikalisch-mathematischen Klasse gewählt.

Ausgegeben am 28. Juni.

SITZUNGSBERICHTE
DER PREUSSISCHEN
AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.
1923

XVII. Sitzung der physikalisch-mathematischen Klasse. 31. Mai.

Vorsitzender Sekretar: Hr. Planck.

1. Hr. Penck sprach über die schwäbisch-fränkische Alb. (Ersch. später.)

Die Hochfläche ist eine Abtragungsfläche, welche Oberflächenstücke aus der Kreide-, Eozän- und Miozänzeit enthält. Sie hat in Schwaben während der Miozänepoche erst eine Senkung, dann eine Hebung, in Franken nur Senkung erfahren. Dadurch sind Gefällsverhältnisse entstanden, die nicht immer in der großen Struktur Süddeutschlands erkennbar sind, aber den Lauf von Flüssen bestimmen. Die Stirn der Alb ist in Schwaben seit dem Miozän nicht unbeträchtlich, in Mittelfranken fast gar nicht zurückgegangen. Die Auslieger, die von ihrer früheren größeren Ausdehnung zeugen, lassen sich in Stirn-, Zwiesel- und Riedelberge trennen. Im Innern der Alb gibt es Umlaufberge; die jähen Erhebungen auf der Höhe der fränkischen Alb sind teilweise zwischen Einsackungen stehengebliebene Pfeiler.

2. Hr. Einstein legte eine Arbeit vor »Zur affinen Feldtheorie«.

Auf Grund der Weyl-Eddingtonschen Idee, die Feldtheorie allein auf den affinen Zusammenhang zu gründen, gelangt man zu einer logisch einheitlichen Theorie von Gravitation und Elektrizität, deren Feldgleichungen sich im wesentlichen mit denjenigen decken, welche die allgemeine Relativitätstheorie ursprünglich aufgestellt hat. Das Elektronproblem bleibt hierbei ungelöst.

Zur affinen Feldtheorie.

Von A. EINSTEIN.

Weiteres Nachdenken führte mich zu einer Vervollkommnung der in zwei früheren Mitteilungen behandelten Theorie des Feldes der Gravitation und Elektrizität. Ich will die Theorie in ihrer neuen Form im folgenden kurz darstellen.

Der affine Zusammenhang sei durch die 40 Funktionen $\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$ dargestellt. Der RIEMANNsche Krümmungstensor zweiten Ranges $R_{\mu\nu}$ sei in einen symmetrischen Teil $\gamma_{\mu\nu}$ und einen antisymmetrischen Teil $\phi_{\mu\nu}$ gespalten, so daß man hat

$$\gamma_{\mu\nu} = -\frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}}{\partial x_{\alpha}} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}\Gamma^{\beta}_{\nu\alpha} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha}}{\partial x_{\nu}} + \frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\nu\alpha}}{\partial x_{\mu}}\right) - \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}, \qquad (1)$$

$$\phi_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha}}{\partial x_{\nu}} - \frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\nu\alpha}}{\partial x_{\mu}}\right). \qquad (2)$$

Die HAMILTONsche Funktion $\mathfrak{H}$ (skalare Dichte) sei eine vorläufig unbekannte Funktion[1] der $\gamma_{\mu\nu}$ und $\phi_{\mu\nu}$. Das HAMILTONsche Integral ist zu variieren nach den $\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}(=\Gamma^{\alpha}_{\nu\mu})$. Man erhält zunächst

$$\int(\mathfrak{g}^{\mu\nu}\delta\gamma_{\mu\nu} + \mathfrak{f}^{\mu\nu}\delta\phi_{\mu\nu})d\tau = 0, \qquad (3)$$

wobei zur Abkürzung gesetzt ist

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial \gamma_{\mu\nu}} &= \mathfrak{g}^{\mu\nu}\\ \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial \phi_{\mu\nu}} &= \mathfrak{f}^{\mu\nu}.\end{aligned}\right\} \qquad (3a)$$

$\mathfrak{g}^{\mu\nu}$ und $\mathfrak{f}^{\mu\nu}$ seien als Tensordichten des metrischen und elektrischen Feldes aufgefaßt. Setzt man die durch (1) und (2) gegebenen Ausdrücke von $\gamma_{\mu\nu}$ und $\phi_{\mu\nu}$ in (3) ein, so erhält man durch Variation die Gleichungen

$$\mathfrak{g}^{\mu\nu}{}_{;\alpha} - \frac{1}{2}\mathfrak{g}^{\mu\sigma}{}_{;\sigma}\delta^{\nu}_{\alpha} - \frac{1}{2}\mathfrak{g}^{\nu\sigma}{}_{;\sigma}\delta^{\mu}_{\alpha} - \frac{1}{2}\mathfrak{i}^{\mu}\delta^{\nu}_{\alpha} - \frac{1}{2}\mathfrak{i}^{\nu}\delta^{\mu}_{\alpha} = 0, \qquad (4)$$

[1] Die Voraussetzung, daß $\mathfrak{H}$ nur von $\gamma_{\mu\nu}+\phi_{\mu\nu}$ abhänge, wird aufgegeben. Ich möchte ferner bemerken, daß Hr. DROSTE in Leiden schon vor zwei Jahren ähnliche Überlegungen angestellt aber nicht publiziert hat.

wobei $\mathfrak{g}^{\mu\nu}{}_{;\alpha}$ die kovariante Erweiterung der Tensordichte $\mathfrak{g}^{\mu\nu}$ gemäß der Gleichung

$$\mathfrak{g}^{\mu\nu}{}_{;\alpha} = \frac{\partial \mathfrak{g}^{\mu\nu}}{\partial x_\alpha} + \mathfrak{g}^{\sigma\nu}\Gamma^{\mu}_{\sigma\alpha} + \mathfrak{g}^{\mu\sigma}\Gamma^{\nu}_{\sigma\alpha} - \mathfrak{g}^{\mu\nu}\Gamma^{\sigma}_{\alpha\sigma} \tag{5}$$

und $\mathfrak{i}^\mu$ die als Stromdichte zu deutende Tensordichte

$$\mathfrak{i}^\mu = \frac{\partial \mathfrak{f}^{\mu\sigma}}{\partial x_\sigma} \tag{6}$$

ist. Wir führen als metrischen Tensor $g_{\mu\nu}$ bzw. $g^{\mu\nu}$ den Tensor ein, welcher zur symmetrischen Tensordichte $\mathfrak{g}^{\mu\nu}$ gehört, gemäß den Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{g}^{\mu\nu} &= g^{\mu\nu}\sqrt{-g} \qquad (g = |g_{\sigma\tau}|)\,. \\ g_{\mu\sigma}g^{\nu\sigma} &= \delta^\nu_\mu \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Dieser Tensor wird wie in der Riemannschen Geometrie verwendet, um von kovarianten Tensorcharakteren zu kontravarianten überzugehen und umgekehrt. In diesem Sinne gehören zur Stromdichte $\mathfrak{i}^\mu$ der kontravariante Tensor i^μ und der kovariante i_μ; zur Felddichte $\mathfrak{f}^{\mu\nu}$ der kontravariante Feldtensor $f^{\mu\nu}$ bzw. der kovariante $f_{\mu\nu}$.

Vermittels solcher Operationen gelingt es in bekannter Weise, die Gleichungen (4) nach den $\Gamma^\alpha_{\mu\nu}$ aufzulösen, wobei man erhält:

$$\Gamma^\alpha_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta}\left(\frac{\partial g_{\mu\beta}}{\partial x_\nu} + \frac{\partial g_{\nu\beta}}{\partial x_\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\beta}\right) - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} i^\alpha + \frac{1}{6}\delta^\alpha_\mu i_\nu + \frac{1}{6}\delta^\alpha_\nu i_\mu\,. \tag{8}$$

Ferner bemerken wir, daß gemäß (3a) $\mathfrak{g}^{\mu\nu}$ und $\mathfrak{f}^{\mu\nu}$ Funktionen der $\gamma_{\mu\nu}$ und $\phi_{\mu\nu}$ sind, derart, daß

$$\mathfrak{g}^{\mu\nu} d\gamma_{\mu\nu} + \mathfrak{f}^{\mu\nu} d\phi_{\mu\nu}$$

ein vollständiges Differential ist. Daraus folgt, daß auch

$$\gamma_{\mu\nu} d\mathfrak{g}^{\mu\nu} + \phi_{\mu\nu} d\mathfrak{f}^{\mu\nu}$$

ein vollständiges Differential sein muß einer Größe $\mathfrak{H}^*$ (skalare Dichte), welche wir als Funktion der $\mathfrak{g}^{\mu\nu}$ und $\mathfrak{f}^{\mu\nu}$ dargestellt denken wollen.

Es ist also zu setzen

$$\left.\begin{aligned} \gamma_{\mu\nu} &= \frac{\partial \mathfrak{H}^*}{\partial \mathfrak{g}^{\mu\nu}} \\ \phi_{\mu\nu} &= \frac{\partial \mathfrak{H}^*}{\partial \mathfrak{f}^{\mu\nu}}, \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

wobei die Gleichungen (9) die Gleichungen (3a) vollkommen zu ersetzen vermögen. Wir haben nun nur noch die skalare Dichte $\mathfrak{H}^*$ in Funktion der $\mathfrak{f}^{\mu\nu}$ und $\mathfrak{g}^{\mu\nu}$ so zu wählen. Der allgemeinste mögliche Ansatz lautet

$$\mathfrak{H}^* = \sqrt{-g}\,\Phi(J_1,\ J_2)\,, \tag{10}$$

wobei Φ eine beliebige Funktion der beiden bekannten Invarianten des elektromagnetischen Feldes bedeutet. Der im Sinne unserer bisherigen Kenntnisse natürlichste Ansatz lautet

$$\mathfrak{H}^* = 2\alpha\sqrt{-g} - \frac{\beta}{2} f_{\mu\nu} \mathfrak{f}^{\mu\nu}. \tag{10a}$$

Ersetzt man die linken Seiten der Gleichungen (1), (2) auf Grund der Gleichungen (9) und (10a), die rechten Seiten auf Grund der Gleichungen (8) durch Ausdrücke in den Feldgrößen, so erhält man die Gleichungen

$$R_{\mu\nu} - \alpha g_{\mu\nu} = -\left[\beta\left(-f_{\mu\tau}f_\nu^\tau + \frac{1}{4} g_{\mu\nu} f_{\sigma\tau} f^{\sigma\tau}\right) + \frac{1}{6} i_\mu i_\nu\right] \tag{11}$$

$$-\beta f_{\mu\nu} = \frac{1}{6}\left(\frac{\partial i_\mu}{\partial x_\nu} - \frac{\partial i_\nu}{\partial x_\mu}\right). \tag{12}$$

Die Gleichungen (6), (11) und (12) sind die Feldgleichungen der hier entwickelten Theorie.

Bisher haben wir für die Feldstärken des metrischen und elektrischen Feldes Einheiten unbekannter Größe verwendet. Beim Übergang zum Gramm-Zentimeter-System nehmen die Feldgleichungen die Form an

$$R_{\mu\nu} - \alpha g_{\mu\nu} = -\varkappa\left[\left(-f_{\mu\tau}f_\nu^\tau + \frac{1}{4} g_{\mu\nu} f_{\sigma\tau} f^{\sigma\tau}\right) + \frac{1}{\beta} i_\mu i_\nu\right] \tag{11a}$$

$$-f_{\mu\nu} = \frac{1}{\beta}\left(\frac{\partial i_\mu}{\partial x_\nu} - \frac{\partial i_\nu}{\partial x_\mu}\right), \tag{12a}$$

wobei α und β andere Konstante bedeuten; $\varkappa$ ist die Gravitationskonstante.

Diese Feldgleichungen lassen sich in die Form eines HAMILTONschen Prinzipes bringen, in welchem nach dem metrischen Tensor und der elektrischen Feldstärke variiert wird. Seine HAMILTONsche Funktion $\mathfrak{H}$ ist gegeben durch

$$\mathfrak{H} = \sqrt{-g}\left[R - 2\alpha + \varkappa\left(\frac{1}{2} f_{\sigma\tau} f^{\sigma\tau} - \frac{1}{\beta} i_\sigma i^\sigma\right)\right]. \tag{13}$$

R bedeutet hierbei den aus den $g_{\mu\nu}$ gebildeten RIEMANNschen Krümmungsskalar. Zum Beweise drückt man $\mathfrak{H}$ am bequemsten durch die Tensordichten $\mathfrak{f}^{\mu\nu}$ und $\mathfrak{g}^{\mu\nu}$ und die zu letzteren Größen gehörigen normierten Unterdeterminanten aus und variiert nach den $\mathfrak{f}^{\mu\nu}$ und $\mathfrak{g}^{\mu\nu}$.

Für die physikalische Interpretation der Feldgleichungen (11a), (12a) ist es wohl am dienlichsten, das elektromagnetische Potential

$$-f_\mu = \frac{1}{\beta} i_\mu \tag{14}$$

einzuführen, welches gemäß (12a) mit der Stromdichte durch die Gleichung

$$\mathfrak{i}^\mu = -\beta \mathfrak{g}^{\mu\sigma} f_\sigma \tag{15}$$

zusammenhängt. (11a) nimmt dann die Form an

$$R_{\mu\nu} - \alpha g_{\mu\nu} = -\varkappa\left[\left(-f_{\mu\sigma}f_\nu^\sigma + \frac{1}{4} g_{\mu\nu} f_{\sigma\tau} f^{\sigma\tau}\right) + \beta f_\mu f_\nu\right]. \tag{16}$$

Man erhält die bisherige Theorie der Gravitation und des elektromagnetischen Feldes bei Abwesenheit elektrischer Dichten, indem man den Faktor β verschwinden läßt. Jedenfalls muß man, um mit der Erfahrung nicht in Widerspruch zu geraten, β sehr klein setzen, da ja sonst gemäß (15) elektrizitätsfreie elektrische Felder nicht existieren könnten. Dann müssen bei endlichen elektrischen und metrischen Feldern die i^{μ} stets verschwindend klein sein. Die Gleichungen (15), (16) stimmen bis auf das Vorzeichen der Konstante β überein mit Feldgleichungen, welche H. Weyl auf Grund seiner Theorie aus einem speziellen Wirkungsprinzip abgeleitet hat. Ein singularitätsfreies Elektron liefern diese Gleichungen nicht.

Ausgegeben am 28. Juni.

SITZUNGSBERICHTE
DER PREUSSISCHEN
AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.
1923

XVIII. Gesamtsitzung. 7. Juni.

Vorsitzender Sekretar: Hr. Lüders.

1. Hr. Eduard Meyer sprach über Wesen und Entwicklung des römischen Manipularheeres. (Abh.)

Taktik, Bewaffnung und Gestaltung des Heeres, durch das Rom die Welt erobert hat, beruhen auf der Einstellung auf den Schwertkampf. Daraus ergibt sich ebensowohl die lockere Stellung der Frontkämpfer im Gefecht, die Gliederung der Armee in kleine Abteilungen (Manipel), die sich um die Fahne zusammenschließen, die Intervalle zwischen den Manipeln, wie die Notwendigkeit einer Ablösung der Kämpfer und die Treffentaktik. Erst wenn die beiden ersten Treffen den Sieg nicht errungen haben, folgt schließlich in geschlossener Front (als Phalanx) die Attacke der mit Lanzen bewaffneten Reserve, der Triarier.

Diese Organisation der Armee ist in den Kriegen mit den Samniten im Anschluß an die von diesen gegebenen Vorbilder ausgebildet worden. Die Vorstufen und die schrittweise fortschreitende Entwicklung läßt sich zum Teil noch erkennen, so vor allem an den Namen der drei Treffen, die zu ihrer späteren Verwendung in schroffem Gegensatz stehen.

2. Das korrespondierende Mitglied Hr. Bresslau in Heidelberg übersandte eine Abhandlung über die ältere Salzburger Annalistik. (Abh.)

Die Auffindung bisher unbekannter Salzburger Annalen in einer Admonter Miszellenhs. des 12. Jahrhunderts, die im vorigen Jahre von ihrem Entdecker E. Klebel erstmals herausgegeben sind und als Annales Juvavenses maximi in den Schlußband der Folioserie der Monumenta Germaniae historica aufgenommen werden sollen, nötigte zu einer eingehenden Untersuchung der gesamten älteren Salzburger Annalistik. Ihr Ergebnis war, daß die neu gefundenen Annalen der Admonter Hs. sowie die schon bekannten Ann. Juvavenses maiores und minores und die Annales Emmerammi maiores bis auf ganz wenige unbestimmbare Notizen Exzerpte aus einem verlorenen umfangreichen Annalenwerke (Annales Juvavenses antiqui) sind, aus dem auch die Conversio Bagoariorum et Carantanorum, die Annales Altahenses maiores und eine Gruppe späterer österreichischer Annalen (von Admont, Garsten und Salzburg), diese aber nicht unmittelbar, sondern durch eine ihnen gemeinsame Mittelquelle geschöpft haben, daß dagegen die von Klebel zur Ergänzung der Ann. Juv. max. herangezogenen Ann. Ratisponenses mit der Salzburger Annalistik nichts zu tun haben. Außerdem konnten in einer Hs. aus dem Nachlaß Aventins Exzerpte aus den Ann. Juvav. antiqui, die bisher teils ungedruckt, teils unbeachtet geblieben sind, nachgewiesen werden. Die Abhandlung stellt aus diesen Ableitungen die Bestandteile der verlorenen Ann. Juvav. antiqui fest, untersucht ihre Entstehungsverhältnisse und ihre Quellen und schließt mit einem Abschnitte, der die insbesondere für die Geschichte der zweiten Hälfte des 9. und der ersten des 10. Jahrhunderts sehr wichtigen Nachrichten der neuen Quelle in den Rahmen der bisher bekannten Tatsachen kritisch einordnet, wobei namentlich die bisherige Ansicht über die Beziehungen der Könige Konrad I. und Heinrich I. zu den Herzogen Arnulf und Eberhard von Bayern wesentlich umgestaltet wird.

3. Hr. von Laue überreichte die 2. Auflage des II. Bandes seines Werkes »Die Relativitätstheorie« (Braunschweig 1923).

4. Hr. Roethe legte das von der Akademie unterstützte Werk von Walter Mitzka »Studien zum baltischen Deutsch« (Marburg 1923) und Band I, Abt. 1 des von der Wentzel-Heckmann-Stiftung unterstützten Werkes von Alfred Voeltzkow »Reise in Ostafrika in den Jahren 1903—1905« (Stuttgart 1923) vor.

5. Vorgelegt wurden ferner »Thesaurus linguae latinae, Onomasticon Vol. III fasc. II« (Leipzig 1923) und »Mitteilungen aus der Preußischen Staatsbibliothek V: Inventar der Grimm-Schränke in der Preußischen Staatsbibliothek, bearbeitet von Hans Daffis« (Leipzig 1923).

6. Das ordentliche Mitglied der philosophisch-historischen Klasse Hr. von Harnack feierte am 29. Mai sein fünfzigjähriges Doktorjubiläum. Die Akademie hat ihm eine Adresse überreicht, welche in diesem Stück abgedruckt ist.

Die Preußische Regierung hat am 4. Juni die Wahl des ordentlichen Professors an der Friedrich-Wilhelms-Universität in Berlin Hrn. Dr. Otto Franke zum ordentlichen Mitglied der philosophisch-historischen Klasse der Akademie bestätigt.

Die Akademie hat in ihrer Gesamtsitzung am 7. Juni den ordentlichen Professor an der Universität Breslau, Hrn. Dr. Adolf Kneser, zum korrespondierenden Mitglied ihrer physikalisch-mathematischen Klasse gewählt.

Adresse an Hrn. Adolf von Harnack zum fünfzigjährigen Doktorjubiläum am 29. Mai 1923.

Hochgeehrter Herr Kollege!

Zum Ehrentag Ihres goldenen Doktorjubiläums mit unter den Glückwünschenden zu erscheinen, fühlt sich die Akademie Ihnen, als ihrem Geschichtschreiber gegenüber, in besonderem Maße verpflichtet. Als Sie genau vor einem Menschenalter in die Akademie eintraten, standen Sie bereits auf der Höhe Ihres Ruhms. Sie waren damals eben im Begriff, mit dem 3. Band Ihrer Dogmengeschichte das Meisterwerk zu krönen, das Ihren Namen weit über die Theologie hinaus in die Welt getragen hat. Sie haben darin eine Aufgabe zu lösen unternommen, die Ihnen, fast möchte man sagen, schicksalhaft zugefallen war. Zwei Einflüsse haben in frühester Jugend auf Sie gewirkt: Luther und Goethe. Daß sie beide gleichzeitig, beide in gleicher Stärke auf Sie wirkten, das schuf die schöpferische Spannung und stellte Sie vor die Frage, die Sie Ihr Leben lang festgehalten hat.

Es entsprach Ihrer besonderen Veranlagung, daß Sie diese Frage von der geschichtlichen Seite her aufnahmen. Weiterbauend auf den festen Grundlagen, die F. Chr. Baur gelegt hatte, durch A. Ritschl sowohl im Grundsätzlichen wie in der Einzelauffassung befruchtet, daneben auch wohl durch Renan angeregt, mit dem Sie das starke Vorstellungsbedürfnis und die Lust, die Dinge immer auch von der entgegengesetzten Seite her zu betrachten, verband, haben Sie ein Geschichtsbild entworfen, das das christliche Dogma in seiner Auseinandersetzung mit der Kultur in ihrer ganzen Breite schilderte. Das Dogma wächst, indem es aus der Kultur wesentliche Bestandteile in sich aufnimmt, aber es unterliegt eben damit auch der Gefahr, sich von seinem tiefsten Sinn, von dem eigentlichen Wesen des Evangeliums zu entfernen. Die Neigung ging bei Ihnen darauf — darin trafen sich für Sie Luther und Goethe —, das Helle, das Vernünftige, den Logos, wie Sie es nennen, als das Ziel, dem die Entwicklung zustrebt, festzuhalten. Das Trübe, das Verworrene, das Dumpfe haben Sie zwar als gewissenhafter Geschichtschreiber nie in seiner Wirksamkeit verkannt, aber es hat Ihnen, nach Ihrem eigenen Wort, stets fast körperliche Qualen bereitet, sich darein zu vertiefen. Eben vermöge dieses persönlichen Standpunkts wirkte jedoch Ihr Buch wie ein Bekenntnis. Man erlebte das ganze Ringen in der Geschichte mit, so wie für Sie selbst vorher die Verarbeitung des Stoffs eine Sie innerlich tief erregende Auseinandersetzung gewesen war.

Den Rahmen, den Sie in Ihrer Dogmengeschichte abgesteckt hatten, haben Sie nachher in zahllosen Abhandlungen und weiteren großen Werken zu füllen sich bemüht. Sie haben dabei neben der Förderung, die der Stoff erfuhr, einen eigenen neuen Stil der Abhandlung begründet. Sie strebten danach — auch diese Freude am Mathematischen darf in Ihrem Bild nicht fehlen —, den Beweis möglichst in Form einer Wahrscheinlichkeitsrechnung zu führen und doch durch die Anschaulichkeit des Vortrags den Leser immer wieder daran zu erinnern, daß es sich um lebendige Gestalten und nicht um unbenannte Größen handele.

Endlich aber haben Sie aus dem Gefühl heraus, daß das Feld, das Sie bebauten, Arbeit für ein ganzes Geschlecht darböte, eine Reihe von Unternehmungen ins Leben gerufen: die Theologische Literaturzeitung, die Texte und Untersuchungen und schließlich die große Ausgabe der griechischen Kirchenväter sind Ihr Werk. Sie haben hier zuerst das seltene Geschick der Organisation bewährt, das Sie seitdem auf so vielen andern Gebieten wieder gezeigt haben.

Fertig geworden sind Sie mit Ihrem Lebenswerk bis zur Stunde noch nicht. Sie sind immer ein Werdender geblieben. Möge es Ihnen vergönnt sein, in derselben jugendlichen Rüstigkeit Ihre Bahn zum Ende fortzusetzen.

Die Preußische Akademie der Wissenschaften.

Ausgegeben am 28. Juni.

Berlin, gedruckt in der Reichsdruckerei.

1923 XIX—XXIII

SITZUNGSBERICHTE

DER PREUSSISCHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

Physikalisch-mathematische Klasse

BERLIN 1923

VERLAG DER AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

IN KOMMISSION BEI WALTER DE GRUYTER U. CO.

Aus dem Reglement für die Redaktion der akademischen Druckschriften

Aus § 1.

Die Akademie gibt gemäß § 41, 1 der Statuten zwei fortlaufende Veröffentlichungen heraus: »Sitzungsberichte der Preußischen Akademie der Wissenschaften« und »Abhandlungen der Preußischen Akademie der Wissenschaften«.

Aus § 2.

Jede zur Aufnahme in die Sitzungsberichte oder die Abhandlungen bestimmte Mitteilung muß in einer akademischen Sitzung vorgelegt werden, wobei in der Regel das druckfertige Manuskript zugleich einzuliefern ist. Nichtmitglieder haben hierzu die Vermittelung eines ihrem Fache angehörenden ordentlichen Mitgliedes zu benutzen.

§ 3.

Der Umfang einer aufzunehmenden Mitteilung soll in der Regel in den Sitzungsberichten bei Mitgliedern 32, bei Nichtmitgliedern 8 Seiten in der gewöhnlichen Schrift der Sitzungsberichte, in den Abhandlungen 12 Druckbogen von je 8 Seiten in der gewöhnlichen Schrift der Abhandlungen nicht übersteigen.

Überschreitung dieser Grenzen ist nur mit Zustimmung der Gesamtakademie oder der betreffenden Klasse statthaft und ist bei Vorlage der Mitteilung ausdrücklich zu beantragen. Läßt der Umfang eines Manuskripts vermuten, daß diese Zustimmung erforderlich sein werde, so hat das vorlegende Mitglied es vor dem Einreichen von sachkundiger Seite auf seinen mutmaßlichen Umfang im Druck abschätzen zu lassen.

§ 4.

Sollen einer Mitteilung Abbildungen im Text oder auf besonderen Tafeln beigegeben werden, so sind die Vorlagen dafür (Zeichnungen, photographische Originalaufnahmen usw.) gleichzeitig mit dem Manuskript, jedoch auf getrennten Blättern, einzureichen.

Die Kosten der Herstellung der Vorlagen haben in der Regel die Verfasser zu tragen. Sind diese Kosten aber auf einen erheblichen Betrag zu veranschlagen, so kann die Akademie dazu eine Bewilligung beschließen. Ein darauf gerichteter Antrag ist vor der Herstellung der betreffenden Vorlagen mit dem schriftlichen Kostenanschlage eines Sachverständigen an den vorsitzenden Sekretar zu richten, dann zunächst im Sekretariat vorzuberaten und weiter in der Gesamtakademie zu verhandeln.

Die Kosten der Vervielfältigung übernimmt die Akademie. Über die voraussichtliche Höhe dieser Kosten ist — wenn es sich nicht um wenige einfache Textfiguren handelt — der Kostenanschlag eines Sachverständigen beizufügen. Überschreitet dieser Anschlag für die erforderliche Auflage 200000 M., so ist Vorberatung durch das Sekretariat geboten.

Aus § 5.

Nach der Vorlegung und Einreichung des **vollständigen druckfertigen** Manuskripts an den zuständigen Sekretar oder an den Archivar wird über Aufnahme der Mitteilung in die akademischen Schriften, und zwar, wenn eines der anwesenden Mitglieder es verlangt, verdeckt abgestimmt.

Mitteilungen von Verfassern, welche nicht Mitglieder der Akademie sind, sollen der Regel nach nur in die Sitzungsberichte aufgenommen werden. Beschließt eine Klasse die Aufnahme der Mitteilung eines Nichtmitgliedes in die Abhandlungen, so bedarf dieser Beschluß der Bestätigung durch die Gesamtakademie.

Aus § 6.

Die an die Druckerei abzuliefernden Manuskripte müssen, wenn es sich nicht bloß um glatten Text handelt, ausreichende Anweisungen für die Anordnung des Satzes und die Wahl der Schriften enthalten. Bei Einsendungen Fremder sind diese Anweisungen von dem vorlegenden Mitgliede vor Einreichung des Manuskripts vorzunehmen. Dasselbe hat sich zu vergewissern, daß der Verfasser seine Mitteilung als vollkommen druckreif ansieht.

Die erste Korrektur ihrer Mitteilungen besorgen die Verfasser. Fremde haben diese erste Korrektur an das vorlegende Mitglied einzusenden. Die Korrektur soll nach Möglichkeit nicht über die Berichtigung von Druckfehlern und leichten Schreibversehen hinausgehen. Umfängliche Korrekturen Fremder bedürfen der Genehmigung des redigierenden Sekretars vor der Einsendung an die Druckerei, und die Verfasser sind zur Tragung der entstehenden Mehrkosten verpflichtet. Übersteigen die Kosten der Korrektur einen gewissen Prozentsatz der Satzkosten, so fallen die Mehrkosten den Verfassern selbst ganz oder teilweise zur Last.

Aus § 8.

Von allen in die Sitzungsberichte oder Abhandlungen aufgenommenen wissenschaftlichen Mitteilungen, Reden, Adressen oder Berichten werden für die Verfasser, von wissenschaftlichen Mitteilungen, wenn deren Umfang im Druck 4 Seiten übersteigt, auch für den Buchhandel Sonderabdrucke hergestellt, die alsbald nach Erscheinen ausgegeben werden.

Von Gedächtnisreden werden ebenfalls Sonderabdrucke für den Buchhandel hergestellt, indes nur dann, wenn die Verfasser sich ausdrücklich damit einverstanden erklären.

§ 9.

Von den Sonderabdrucken aus den Sitzungsberichten erhält ein Verfasser, welcher Mitglied der Akademie ist, zu unentgeltlicher Verteilung ohne weiteres 50 Freiexemplare; er ist indes berechtigt, zu gleichem Zwecke auf Kosten der Akademie weitere Exemplare bis zur Zahl von noch 100 und auf seine Kosten noch weitere bis zur Zahl von 200 (im ganzen also 350) abziehen zu lassen, sofern er dies rechtzeitig dem redigierenden Sekretar angezeigt hat; wünscht er auf seine Kosten noch mehr Abdrucke zur Verteilung zu erhalten, so bedarf es dazu der Genehmigung der Gesamtakademie oder der betreffenden Klasse. — Nichtmitglieder erhalten 50 Freiexemplare und dürfen nach rechtzeitiger Anzeige bei dem redigierenden Sekretar weitere 200 Exemplare auf ihre Kosten abziehen lassen.

Von den Sonderabdrucken aus den Abhandlungen erhält ein Verfasser, welcher Mitglied der Akademie ist, zu unentgeltlicher Verteilung ohne weiteres 30 Freiexemplare; er ist indes berechtigt, zu gleichem Zwecke auf Kosten der Akademie weitere Exemplare bis zur Zahl von noch 100 und auf seine Kosten noch weitere bis zur Zahl von 100 (im ganzen also 230) abziehen zu lassen, sofern er dies rechtzeitig dem redigierenden Sekretar angezeigt hat; wünscht er auf seine Kosten noch mehr Abdrucke zur Verteilung zu erhalten, so bedarf es dazu der Genehmigung der Gesamtakademie oder der betreffenden Klasse. — Nichtmitglieder erhalten 30 Freiexemplare und dürfen nach rechtzeitiger Anzeige bei dem redigierenden Sekretar weitere 100 Exemplare auf ihre Kosten abziehen lassen.

(Fortsetzung auf S. 3 des Umschlags.)

SITZUNGSBERICHTE
DER PREUSSISCHEN
AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.
1923

XIX. Sitzung der physikalisch-mathematischen Klasse. 14. Juni.

Vorsitzender Sekretar: Hr. Planck.

Hr. Rubner sprach: Über die Beziehung zwischen Kolloidalzustand der Gewebe und Wachstum. (Ersch. später.)

Der Vortragende berührt die bisher gemachten Untersuchungen zur Aufklärung des Wachstums der Säuger, eine Fortführung derselben im Hinblick auf die Veränderungen des kolloidalen Zustandes der Zellen sei notwendig. Die kolloidalen Verhältnisse werden für die ausgewachsenen Tiere, für das intra- und extrauterine Wachstum an der Hand eigener Untersuchungen dargelegt und gezeigt, daß wenigstens der Betriebstoffwechsel von den Änderungen des kolloidalen Aufbaues nicht berührt wird. Wie aber dieser auf das Wachstum selbst einwirkt, läßt sich am Säuger selbst nicht zeigen, weshalb Versuche an Hefezellen bei künstlicher Variation ihres Wassergehaltes angestellt worden sind. Innerhalb sehr weiter Grenzen ist die Gärung unabhängig von der Variation des Wassergehaltes der Zellen, während das Wachstum mit abnehmendem Wassergehalt sofort herabgesetzt wird. Die Ergebnisse klären die Wachstumsverhältnisse bei den Säugern völlig auf. Mit fortschreitender Abnahme der Quellung der Zellen, die schon im intrauterinen Leben beginnt, schränkt sich die Wachstumsgeschwindigkeit immer mehr ein, bis schließlich die Wachstumsfähigkeit überhaupt erlischt, wenn ein Organismus den für alle Erwachsenen nahezu gemeinsamen Grenzgehalt an Trockensubstanz und Wasser erreicht hat.

Ausgegeben am 7. August.

SITZUNGSBERICHTE
DER PREUSSISCHEN
AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.
1923

XX. Gesamtsitzung. 21. Juni

Vorsitzender Sekretar: Hr. Lüders.

1. Hr. Hellmann las »Über den Ursprung der volkstümlichen Wetterregeln (Bauernregeln).«

Die frühesten bekannten Zeugnisse für das Vorhandensein der Bauernregeln (regulae rusticorum) stammen aus der Mitte des 13. Jahrhunderts. Die Regeln sind aber viel älter und können als ein uraltes Erb- und Wandergut angesprochen werden. Ihr Inhalt stammt zu einem großen Teile aus dem Altertum, zum Teil auch ihre Fassung, doch ist diese durch die christliche Kirche stark beeinflußt worden.

2. Hr. Erman überreichte die 2. Auflage seines Buches über »Die Hieroglyphen« (Berlin und Leipzig 1923).

3. Hr. Franke legte sein Buch über »Die Großmächte in Ostasien von 1894 bis 1914« (Braunschweig und Hamburg 1923) vor.

4. Vorgelegt wurden ferner »Regesta pontificum Romanorum, iubente Societate Gottingensi congessit Paulus Fridolinus Kehr: Italia pontificia, Vol. VII: Venetiae et Histria, Pars I: Provincia Aquileiensis« (Berlin 1923) und »Gesammelte philologische Schriften von Johannes Vahlen«. Zweiter Teil (Leipzig-Berlin 1923).

5. Das korrespondierende Mitglied Hr. Sven Hedin in Stockholm übersandte sein Werk »Southern Tibet, discoveries in former times compared with my own researches in 1906—1908«, Vol. IV, VI bis IX nebst zwei Mappen Karten (Stockholm 1922).

6. Für wissenschaftliche Unternehmungen sind bewilligt worden:

durch die physikalisch-mathematische Klasse für die Fortführung des Nomenclator animalium generum et subgenerum 44000 Mark, für die Fortführung des Werkes »Das Pflanzenreich« 90000 Mark, dem ordentlichen Mitgliede der Akademie Hrn. Guthnick für thermoelektrische Messungen der Sternstrahlung 100000 Mark, dem ordentlichen Mitgliede der Akademie Hrn. Pompeckj für die Bearbeitung des Tendagurumaterials 80000 Mark, dem Hrn. Dr. Fritz Levy in Berlin zur Fortführung seiner Untersuchungen zur Zellteilungsphysiologie 20000 Mark;

durch die philosophisch-historische Klasse für die Arbeiten der Orientalischen Kommission 200000 Mark, für die Bearbeitung und Verzettelung ägyptischer Texte 50000 Mark, für die Herausgabe griechischer Inschriften 150000 Mark, für die Arbeiten der Deutschen Kommission 200000 Mark; für die Fortführung der Arbeiten des Hrn. Burdach 200000 Mark.

Die Akademie hat den ordentlichen Professor an der Universität Utrecht Hrn. Dr. Wilhelm Caland und den ordentlichen Professor an der Universität Kristiania Hrn. Dr. Sten Konow zu korrespondierenden Mitgliedern ihrer philosophisch-historischen Klasse gewählt.

Über den Ursprung der volkstümlichen Wetterregeln (Bauernregeln).

Von G. Hellmann.

Aus alter Zeit überkommen, lebt im Munde des Volkes heute noch fort eine große Zahl von Sprüchen und kurzgefaßten Regeln, die sich auf die Vorhersage des Wetters, auf das vom Wetter abhängige Gedeihen der Feldfrüchte, auf landwirtschaftliche Verrichtungen und verwandte Dinge beziehen. Sie bilden ein Gemeingut aller Kulturnationen, aber auch bei primitiven Völkern fehlen sie nicht ganz. In Deutschland werden sie unter dem Namen Bauernregeln zusammengefaßt, und das mit Recht; denn die ländliche Bevölkerung kennt sie am besten und gebraucht sie auch am meisten, während der Städter gewöhnlich nur wenig von ihnen weiß.

Relativ spät sind die Bauernregeln, die von Geschlecht zu Geschlecht mündlich überliefert wurden, aufgeschrieben und sodann auch systematisch gesammelt worden. Heute gibt es in den Sprachen fast aller Kulturvölker gedruckte Verzeichnisse von ihnen[1]. Ich habe versucht, im Anhang I eine nach Ländern geordnete Übersicht über diese Literatur zu geben, da eine solche bisher fehlte; sie wird für weitere Arbeiten auf diesem Gebiete vielleicht willkommen sein, und sie soll zugleich das Zitieren in der vorliegenden Abhandlung erleichtern.

Diese Sammlungen von Bauernregeln (frz. dictons agricoles, engl. weather proverbs, usw.) haben einen sehr ungleichen Wert, je nachdem sie durch wirkliche Aufnahme aus dem Munde des Volkes oder durch Zusammentragen aus Büchern entstanden sind. Erstere erweisen sich natürlich als die wertvolleren, aber leider auch als die selteneren. In letztern, die jene gewöhnlich an Umfang übertreffen, stehen oft Regeln, die das Volk selber gar nicht kennt; sie gerieten meist durch Übersetzungen aus fremden Sprachen oder durch Aufnahme größerer Abschnitte aus Volksbüchern, wie z. B. der Bauern-Praktik, dem Book of Knowledge u. a., in die Sammlungen und werden leicht als Fremdgut erkannt. Wenn z. B. in einer schwedischen Bauernregel vom Weinfaß die Rede ist, weiß man gleich, daß sie in Schweden nicht entstanden und heimisch sein kann.

---

[1] Sogar die Bauernregeln der portugiesischen Zigeuner in Alemtejo und die der Zuñi-Pueblo-Indianer in Nordamerika liegen gesammelt und gedruckt vor; vgl. im Anhang I Pires bei Portugal und Dunwoody bei den Ver. Staaten von Amerika.

Eine Sichtung und Klassifizierung der auf die Vorhersage des Wetters bezüglichen Bauernregeln, mit denen sich die vorliegende Arbeit hauptsächlich beschäftigen wird, zeigt deutlich, daß mehrere Arten oder Gruppen von solchen Regeln unterschieden werden können. Zunächst kann man sie nach ihrer Fassung einteilen in Prosasprüche und in Reimsprüche. Letztere überwiegen an Zahl, was leicht verständlich ist, weil sich kurze gereimte Regeln dem Gedächtnis gut einprägen und in ihm besser haften bleiben als Prosasätze.

Nach ihrem Inhalt zerfallen die volkstümlichen Wetterregeln in solche, die eine wirkliche Wettervorhersage enthalten, wie z. B.

Abendrot, Schönwetterbot'
Morgenrot fällt in Kot,

oder in solche, die einen Wunsch bezüglich des Wetters ausdrücken, wie es beschaffen sein sollte, damit die Feldfrüchte gedeihen und die Ernte gut wird, z. B.

Ein dürrer April
Ist nicht des Bauern Will'
Sondern der Prillenregen[1]
Ist ihm gelegen.

Andere Bauernregeln drücken eine feststehende Tatsache in volkstümlicher Weise aus, wie z. B.

Sankt Luzen
Macht den Tag stutzen (13. Dezember)[2]

oder eine oftmals wahrgenommene Erscheinung, die zugleich eine gewisse prognostische Bedeutung hat:

Wenn der Tag beginnt zu langen[1]
Kommt die Kälte gegangen,

oder zur Charakterisierung des Aprilwetters:

Ist der April auch noch so gut
Er[1] schneit dem Bauer auf den Hut.

Sodann lassen sich die volkstümlichen Wetterregeln nach ihrem Inhalt einteilen in solche allgemeiner Natur, die jeden Tag Geltung haben, und in solche, die von dem Verhalten des Wetters an bestimmten Tagen, den sogenannten Lostagen, oder zu bestimmten Abschnitten des Jahres ausgehen. Lostage sind nach der volkstümlichen Anschauung Tage, an denen sich das Los der zu erwartenden Witterung eines späteren Zeitabschnittes entscheidet. Sie werden auch bisweilen Lurtage genannt, weil man an ihnen auf das kommende Wetter lauert, niederdeutsch lurt. In den ältesten Ausgaben der Bauern-Praktik

---

[1] Die gewählten Beispiele lassen eine Eigentümlichkeit der Bauernregeln erkennen, die sie mit anderen Erzeugnissen der Volksliteratur teilen, nämlich die Neigung zur Bildung neuer Wörter und zu stark willkürlichem Gebrauch der Sprache.

[2] Das bedeutet: der Tag nimmt nicht weiter ab. Die Regel gilt natürlich nur für den Julianischen Kalender. Da dieser ums Jahr 1350 um 8 Tage (21. weniger 13. Dezember) zurück war, dürfte die Regel ungefähr in jener Zeit entstanden sein; vgl. Ginzel, Handbuch d. math. u. techn. Chronologie III, 252 ff.

findet man für das Wort Losung die Schreibweise Liessen, Liessung, Lausung. Auch der Ausdruck Kürtage kommt vor.

Bei Durchsicht der gereimten Bauernregeln macht man ferner die Wahrnehmung, daß es — das gilt für alle Sprachen — außer dialektischen Fassungen viele Varianten gibt. Man muß daraus schließen, daß dieselbe Wetterregel wiederholt und wahrscheinlich zu ganz verschiedenen Zeiten in Reime gebracht bzw. daß eine bereits vorhandene Fassung absichtlich abgeändert wurde. Es scheint bei vielen Menschen eine gewisse natürliche Neigung dafür vorhanden zu sein, solche Reimregeln zu bilden. Die Urheber der meisten Wetterregeln sind natürlich unbekannt und werden es für immer bleiben[1]; es läßt sich aber nachweisen, daß auch gelehrte Leute, die sich mit den Bauernregeln literarisch beschäftigt haben, mehrfach bestrebt waren, ihnen eine neue Fassung zu geben. So z. B. die bald näher zu erwähnenden Deutschen Leonhard Reynmann (Anfang des 16. Jahrh.) und Johann Colerus (Ende des 16. Jahrh.), der Franzose Fr. de Roucy (19. Jahrh.), der Österreicher W. von Kesslitz (20. Jahrh.). Ja, ich muß gestehen, daß ich mich selbst auf solchen Reimversuchen ertappt habe. Obwohl ich sonst keinerlei dichterische Begabung besitze, versuchte ich doch, namentlich beim Übersetzen aus fremden Sprachen, mehrmals die Regeln in Reime zu bringen. Ich komme weiter unten auf diesen Punkt noch einmal zurück.

Geht man dem Alter und dem Ursprung der Bauernregeln nach, so kann man zunächst feststellen, daß viele von ihnen, ja vielleicht die Mehrzahl schon zur Zeit der Gregorianischen Kalenderreform (1582) vorhanden waren. Das beweisen ohne weiteres manche Regeln, deren Datumsangabe sich noch auf den alten Kalender bezieht, wie z. B. die oben angeführte von Sancta Lucia, die im neuen Kalender erst für den 21. Dezember paßt. Aus der Geschichte des damals entbrannten heftigen Kalenderstreites wissen wir auch, daß als ein Hauptgrund gegen die Annahme der Reform vielfach geltend gemacht wurde, daß die an die Lostage anknüpfenden Bauernregeln alsdann ihre Gültigkeit verlören und daß der Landmann ganz in Verwirrung geraten würde, da er nicht mehr wüßte, wann er seine landwirtschaftlichen Verrichtungen vornehmen müßte; denn gerade darüber gab es viele kurze Regeln, z. B.

Säe Korn Egidii[2], Habern, Gersten Benedicti
usw.

Nachdem aber die Kalenderreform doch angenommen worden war, schrieb 1590 der Astrolog Johann Rasch[3] für die Bauern ein Buch »New *Loßtäg*.

---

[1] Die von Friedrich Seiler (Deutsche Sprichwörterkunde, München 1922. 8°. S. 19ff.) eingehend behandelte Frage nach der Entstehung und Formgebung der volkstümlichen Sprichwörter bietet viele Anhaltspunkte für die gleiche Frage bei den volkstümlichen Wetterregeln; ich verweise daher auf dieses Werk.

[2] Scilicet die Egidii, usw.

[3] Von den Lebensumständen dieses Mannes, der über Theologie, Musik, Astrologie, Weinbau und andere Dinge schrieb, wissen wir trotz der Studie von S. Günther (Jahrb. f. Münchener Geschichte IV 239—256) fast gar nichts. Da war es mir von Interesse, in A. Pilgram, Untersuchungen über das Wahrscheinliche der Wetterkunde (Wien 1788. 4°. Bl. 6v) zu lesen, daß Rasch Organist am Schottenkloster in Wien war. Damit steht in Übereinstimmung, daß er sich in einigen Schriften als »Bürger zu Wien« bezeichnet.

Nvtzliche bedencken vnd vnterscheidung der pöflischen alten Loßtag, die feldregel vnd Bawrenpractic angehend .... (Rorschach am Bodensee. Anno M. D. XC. 4°. 6 Bogen), in dem er untersuchte, »ob die in dem Neucalender all vmb X tag mussen mit vmbsetzt werden, oder aber noch in jren vorigen terminis vnd statis diebus vnverruckt bleiben«. Bei der Gelegenheit teilt Rasch einige Bauernregeln in der damaligen Fassung mit und verrückt einzelne um zehn Tage, während die meisten beim Datum des alten Kalenders stehen bleiben.

Das Jahr darauf, 1591, erschien eine etwas größere Sammlung von Bauernregeln in dem von dem Parchimer Prediger Johann Colerus herausgegebenen Calendarium oeconomicum et perpetuum, das viele Auflagen erlebte und bald ein richtiges Haus- und Volksbuch wurde. Die frühesten gedruckten Bauernregeln in deutscher Sprache sind aber m. W. die in Leonhard Reynmanns Wetterbüchlein (1505 bzw. 1510) enthaltenen, die, wie ich schon früher (Neudrucke Nr. 1, S. 31 der Einleitung) ausgeführt habe, offenbar vom Verfasser selbst in Reime gebracht wurden und die wohl vielfach in andere Bücher, auch durch Übersetzungen, übergegangen, aber eigentlich nie volkstümlich geworden sind. Sie waren in ihrer Fassung nicht prägnant genug. In diesem Büchelchen, das gegen zwanzig Auflagen erlebte, begegnen wir auch zum ersten Male dem Wort Bauernregel; denn die Überschrift am Schluß der Schrift lautet »Pauren regel«. Diese Bezeichnung muß also gegen das Ende des 15. Jahrhunderts, in das die Abfassung des Wetterbüchleins anzusetzen ist, schon allgemein gebräuchlich gewesen sein; sie war aber, wie wir gleich sehen werden, in Wirklichkeit schon viel älter.

Geht man nämlich weiter zurück, so begegnet man in manchen Handschriften des 15. Jahrhunderts wohl einer oder mehreren Bauernregeln, die am Rande oder an einer leergebliebenen Stelle von gleichzeitiger, bisweilen auch von späterer Hand eingetragen sind, aber trotz eifrigen Suchens habe ich keine eigentliche Sammlung von ihnen aus dieser frühen Zeit auffinden können. Erst vom Jahre 1578 stammt eine solche, die im Cod. Vindob. 10638 steht und die ich im Anhang 2 wörtlich zum Abdruck bringe[1]. Die vielen in ihr vorkommenden unreinen Umlaute und das Adjektiv »keiff« statt dicht[2] werden einem Germanisten wohl die Möglichkeit geben, ihr Ursprungsland zu bestimmen.

Aus dem reichen Material der von der Deutschen Kommission der Preußischen Akademie der Wissenschaften gesammelten Nachweise über den Inhalt deutscher Handschriften glaubte ich weitere Proben alter Bauernregeln erhalten zu können. Hr. Prof. Dr. Behrend hatte auch die Güte, mir einige solche Handschriften nachzuweisen und die betreffenden Stellen auszuschreiben. Die Ausbeute war aber über Erwarten gering. Die an die Kalenden des Januar anknüpfenden Vorhersagen für das ganze folgende Jahr, von denen gleich die Rede sein wird, finden sich zwar in vielen deutschen und lateinischen Handschriften,

[1] Eine ähnliche, aber etwa fünfzig Jahre jüngere Sammlung hat R. M. Werner aus der Handschrift Nr. 334 der Ossolińskischen Bibliothek in Lemberg bekanntgegeben (Vierteljahrsschrift f. Literaturgesch. VI, 297—300).

[2] Nach A. Götze, Frühneuhochdeutsches Glossar, Bonn 1912. 8°. S. 75.

eigentliche Bauernregeln dagegen sehr selten. Im ganzen waren es nur folgende vier, davon drei in lateinischer Fassung, die ausgezogen werden konnten.

In clm 5595 Bl. 46v, vom Jahre 1432

Nocte rubens celū cras indicat sē se̕num
An̄ rubet mane seqᵓtur tc̄ tēpȝ pluuiale } Nota bene
Pallida luā pluit rubea flat alba se̕nat.

In Braunschweig, Stadtbibliothek 109, Bl. 395rb, 14./15. Jahrhundert

Si pluit ī festo ꝓcessi martiniani
Quadraginta dies ꝯtinuare solet
H° ītelige sic si nō pluit hic pluit illic.

Die letzte Zeile ist köstlich; sie erinnert ganz an manche moderne Regenprognose. In clm 5964, Bl. 1r, 15. Jahrhundert, und in Göttingen, Univ. Bibl. jur. 736, Bl. 209rb, 16. Jahrhundert, steht die bekannte Bauernregel vom St. Paulstag (25. Januar, Clara dies Pauli bona tempora nuntiat anni ...), in letzterer Handschrift in lateinischer und in niederdeutscher Fassung.

Lange Zeit war ich der Meinung, daß Eintragungen von Bauernregeln in Handschriften des 15. und früherer Jahrhunderte häufig wären, aber nachdem ich trotz eifrigen Suchens nur sehr wenige gefunden, scheint es mir bei längerem Nachdenken über den Gegenstand nunmehr begreiflich, ja sogar wahrscheinlich, daß dies nicht der Fall sein kann. Die in den Bauernregeln enthaltene Volksweisheit war den Schreibern von Handschriften, die dem gelehrten geistlichen Stande angehörten, nicht gelehrt genug, um auf dem kostbaren Schreibstoff (Pergament, Papier) niedergeschrieben zu werden, mit anderen Worten, sie wurden der schriftlichen Überlieferung nicht für würdig erachtet. Und wenn doch einmal an einem leergebliebenen Plätzchen solche Regeln eingeschrieben wurden, dann mit Vorliebe solche in lateinischer Fassung, die man wohl am besten als M ö n c h s v e r s e bezeichnet, da sie wahrscheinlich meist von Mönchen bzw. von der Geistlichkeit herrühren.

Ob die Mönchsverse älter oder jünger sind als die Bauernregeln in der Vulgärsprache, dürfte schwer zu entscheiden sein[1]. Ich möchte glauben, daß beides vorgekommen ist. Manche Regel ist zuerst in lateinischer Fassung aufgetaucht und in Umlauf gekommen, andere haben zuerst in der Landessprache Verbreitung gefunden, und es mag manchem Mönch, der gelehrte Neigungen hatte, eine willkommene Beschäftigung und Übung gewesen sein, solche Bauernregeln in lateinische Verse zu bringen und sie damit gleichsam klosterfähig zu machen. Es sind hauptsächlich die an die großen Lostage St. Paul, Mariä Lichtmeß, St. Peter und Paul, Mariä Heimsuchung u. a. anknüpfenden Regeln, die in lateinischer Fassung auftreten, und zwar muß auch diesen eine solche zu wiederholten Malen gegeben worden sein, denn es existieren gewöhnlich mehrere Varianten. So habe ich z. B. von der auf den 2. Februar (Mariä

[1] Die noch im 17. Jahrhundert von dem deutschen Benediktinermönch Gabriel Bucelinus latinisierten Bauernregeln, die auch in der englischen Sammlung von Swainson (vgl. Anhang 1) aufgeführt werden, kommen hierbei natürlich nicht in Betracht, sondern nur die alten aus sehr früher Zeit stammenden Fassungen. In der im Anhang 2 abgedruckten Handschrift vom Jahre 1578 wird die oben zitierte lateinische Regel vom St. Paulstag »alt« genannt.

Lichtmeß, Purificatio Beatae Mariae Virginis, engl. Candlemas-day, frz. La Chandeleur[1], ital. Candelora usw.) bezüglichen Regel folgende fünf Fassungen vorgefunden:

Si Sol claruerit
Virgine se purificante
Frigus erit maius post
Quam fuit ante.

Sole micante
Virgine purificante
Nix erit maior
Quam ante.

Si Sol splendescat
Maria purificante
Maior erit glacies post festum
Quam fuit ante.

Sole micante, die Purificante
Maius frigus quam ante.

Imber si datur Virgo dum purificatur
Inde notatur quod hiems abinde fugatur
Si Sol dat radium frigus erit nimium.

In demselben Mönchslatein sind auch die meisten übrigen lateinischen Regeln abgefaßt. Ins Volk sind sie natürlich direkt nicht gedrungen, aber durch die Mitglieder der Orden, die überall hin verschickt wurden, haben sie innerhalb des weiten Geltungsbereiches der christlichen Kirche Verbreitung gefunden, und sie sind sodann auch durch Übersetzungen in die Landessprache dem Volk bekannt geworden. Auf die Weise erklärt sich zum Teil die große Übereinstimmung und Ähnlichkeit der volkstümlichen Wetterregeln in großen Teilen Europas. Aber auch die direkte Berührung der Bewohner benachbarter Länder wird zur Verbreitung der Bauernregeln und zu ihrer gleichartigen Fassung viel beigetragen haben.

Wenn ich eben ausführte, daß in alten Handschriften nur selten Bauernregeln angetroffen werden, so macht die an die »zwölf Nächte« von Weihnachten bis Epiphanias bzw. an die Kalenden des Januar anknüpfende große Prognose für alle zwölf Monate des nächsten Jahres eine Ausnahme. Sie bildet die Grundlage der »Bauernpraktik«, von der ich 1896 in Nr. 5 meiner »Neudrucke« zeigen konnte, daß sie mindestens bis auf Beda Venerabilis, also bis zum Anfang des 8. Jahrhunderts, zurückgeht[2]. Wenn ich damals schon zahlreiche Handschriften namhaft machen konnte, die diese Regel sowohl in lateinischer Fassung als auch in der Vulgärsprache enthalten, so kann ich jetzt nach Durchsicht weiterer Handschriften und Handschriftenkataloge sowie nach Kenntnisnahme der vom Anglisten Max Förster gelieferten Beiträge zur englischen Bauernpraktik (Archiv f. d. Studium d. neueren Sprachen und Literaturen, Bd. 110, 120, 121, 128) hinzufügen, daß sie noch viel häufiger vorkommt, als ich früher annahm. Es lohnt aber nicht, alle diese Handschriften hier einzeln namhaft zu machen. Die umfangreiche Regel, die nicht mehr den Charakter der eigentlichen Bauernregel hat, sondern richtiger in das Kapitel Volksaberglauben gehört, fehlt trotzdem wohl in keiner der im Anhang 1 aufgeführten Sammlungen von Bauernregeln.

[1] Die französische Sammlung »Proverbes et dictons agricoles« verzeichnet S. 15—19 nicht weniger als 22 verschiedene Fassungen in französischer Sprache der auf den jour de la Chandeleur bezüglichen Wetterregel. Ebenso zahlreich sind die spanischen für die Candelera (Candelaria) gültigen Wetterregeln (vgl. Puente y Ubeda S. 180—189).

[2] Vgl. auch den Nachtrag in Nr. 15 der Neudrucke und S. 203 im zweiten Bande meiner »Beiträge zur Geschichte der Meteorologie«, Berlin 1917, gr. 8°.

Wenn sich nun auch Bauernregeln aus sehr alten Handschriften nicht nachweisen lassen, so müssen sie doch schon frühzeitig existiert haben, wie die Werke einiger mittelalterlicher Schriftsteller beweisen. Zunächst liefert die älteste selbständige Schrift über die Wettervorhersage, das »Opusculum repertorii pronosticon in mutationes aeris, tam via astrologica quam metheorologica«, das von dem der Diözese Amiens angehörigen FIRMIN DE BEAUVAL um 1330 verfaßt und zuerst 1485 von E. Ratdolt in Venedig gedruckt wurde[1], einen Beleg dafür; denn auf Bl. 44[v] wird von den Wetterzeichen des Volkes, »signalia vulgi«, gesprochen, und an einer anderen Stelle heißt es »secundum pronosticationem rusticorum«. Ebenso wird in der »Compilatio LEUPOLDI .... de astrorum scientia«, von der ich im zweiten Bande meiner Beiträge zur Geschichte der Meteorologie (S. 176—179) nachgewiesen habe, daß sie wahrscheinlich in der zweiten Hälfte des 13. Jahrhunderts geschrieben wurde, am Schluß des »Tractatus sextus de mutatione aëris« auf Bauernregeln mit den Worten »agricolae dicunt« hingewiesen. Noch früher, nämlich um 1250, wird ihrer von ALBERTUS MAGNUS in seinem Werke »De passionibus aëris« mehrfach gedacht[2]. Da heißt es im Kapitel vom Donner: »unde observaverunt rustici quod verum esse expertus sum duobus annis« ...., und vorher im Kapitel »De signis futurae nivis« wird erwähnt die »pronosticatio rusticorum: qui in hyeme quando remittitur frigus expectant nivem nisi sint nubes obscurae«. Es war mir interessant feststellen zu können, daß der bereits genannte Verfasser des Wetterbüchleins, Leonhard Reynmann, diese Stelle offenbar gekannt, sie in deutsche Reime gebracht und dann unter seine »Pauren regel« aufgenommen hat:

»Wenn sich die kellt im wintter lindet
als bald man schnees empfindet
Es seyen dann dunckel wolcken dabey
so sag das es ain Regen sey« [nach der Ausgabe München 1510][3].

Es wäre offenbar interessanter zu wissen, wie diese deutsche Bauernregel um die Mitte des 13. Jahrhunderts gelautet haben mag, aber nach dem vorher Gesagten wird das wohl für immer verborgen bleiben. Es ist hier vielleicht der richtige Ort, zu bemerken, daß einige aufs Wetter bezügliche mittelalterliche Sprichwörter (vgl. J. VON ZINGERLE, Die deutschen Sprichwörter im Mittelalter, Artikel: Abendrot, Donner, Regenbogen, Wetter, Wind) nicht

---

[1] Das Buch erschien ohne Nennung des Verfassers, und erst in der zweiten Ausgabe (Paris, J. Kerver 1539) heißt es: Firmini repertorium .... Wegen weiterer Einzelheiten über dieses interessante Werk vgl. meine »Beiträge zur Geschichte der Meteorologie« II, 189—193.

[2] Steht im 5. Bande der Lyoner Ausgabe der Opera omnia von Albertus Magnus. Ich benutze die Sonderausgabe der kleineren Schriften: Tabula Tractatuum Parvorum Naturalium Alberti Magni. Venetiis, O. Scotus 1517. Fol. Bl. 117[v] seq. Vgl. auch Nr. 15 der Neudrucke (Denkmäler mittelalterlicher Meteorologie) S. 105ff.

[3] Merkwürdigerweise ist gerade dieser Teil der Bauernregeln in einer ganz sinnentstellenden Übersetzung aus Reynmanns Wetterbüchlein in das englische Volksbuch »The Husband-Mans Practice« übergegangen:

When the cold in winter ceaseth
And when a man snow findeth;
If there be dark clouds thereby
Then look for rain verily (Ausgabe von W. Thackeray, London 1688).

die knappe prognostische Fassung, wie die Bauernregeln haben[1], sondern mehr Vergleiche enthalten.

Aus den genannten Zitaten aus mittelalterlichen Schriften glaube ich schließen zu dürfen, daß die volkstümlichen Wetterregeln (regulae rusticorum) im 13. Jahrhundert nicht etwas ganz Neues, eben Entstandenes waren, sondern daß sie damals schon lange existierten. Allerdings kann ich aus noch älteren Werken keinen direkten Beweis dafür liefern. Schriftsteller des 7. und 8. Jahrhunderts, wie Isidorus Hispalensis und Beda Venerabilis, die in ihren naturwissenschaftlichen Werken auch die Vorhersage des Wetters behandeln, geben nur Auszüge aus dem 18. Buch der Naturalis Historia des Plinius, und ein im 8. Jahrhundert aus Plinius gefertigtes und weit verbreitetes astronomisch-komputistisches Sammelwerk hat nach den Untersuchungen von K. Rück in der Folgezeit zwar den Inhalt von vielen Wetterregeln, nämlich die aus dem Altertum stammenden »natürlichen Wetterzeichen« (signalia tempestatis vel serenitatis) in den des Lateinischen kundigen Kreisen verbreiten helfen, aber zur Bildung von kurzgefaßten oder gar von gereimten Wetterregeln in der Landessprache nicht beigetragen.

Nachdem im 9. Jahrhundert der Reimvers in Deutschland durch Otfrieds Evangelienbuch endgültig eingebürgert war, werden in der darauffolgenden Zeit, wenn nicht schon früher, in Anlehnung an die lateinischen Hymnenverse der Kirche, wahrscheinlich auch gereimte Wetterregeln gebildet worden sein. Ihr Inhalt rührte vom Landmann, ihre Form wohl meist von einem Gebildeten, einem Geistlichen, her. Sie erhielten sich durch mündliche Überlieferung von Geschlecht zu Geschlecht, und sie wurden vermutlich zunächst von niemandem, auch von der Geistlichkeit nicht, aufgeschrieben. Wahrscheinlich hatte aber diese vereinzelt Kenntnis davon, daß es schon im Altertum bei den Griechen und Römern ähnliche Bauernregeln gab, und sie war bemüht, die aus der heidnischen Zeit übernommenen volkstümlichen Anschauungen an die Hauptheiligen des christlichen Kalenders anzuknüpfen. Wir wissen ja, daß schon in sehr alter Zeit die Witterung bestimmter Tage und Jahresabschnitte als entscheidend für diejenige kommender Zeiten angesehen wurde, wie z. B. die Witterung beim Aufgang des Hundssterns und diejenige des kürzesten Tages (bruma) — vgl. Plinius N. H. XVIII, 26, 62 nach Demokrit und die Geoponika —, daß es also damals schon Lostage gab, aber unter dem Einfluß der Kirche wurden diese Zusammenhänge auf Heilige übertragen, die im Kirchenkalender ungefähr zur selben Zeit ihren Tag hatten. Die Fassung mancher Bauernregeln läßt auch darauf schließen, daß der Tag der Heiligen nicht bloß zur Zeitbestimmung diente, sondern daß dem Heiligen selbst ein gewisser Einfluß auf die Gestaltung des Wetters zugeschrieben wurde, genau so, wie in den griechischen Parapegmen die Auf- und Untergänge gewisser Sterne, die ursprünglich nur die Zeit angeben sollten, später für die Erscheinungen selbst verantwortlich gemacht wurden. So erkläre

[1] Die alten katalanischen aufs Wetter bezüglichen Sprichwörter, die Jahuda Bonsenyor gegen das Ende des 13. Jahrhunderts gesammelt hat, enthalten auch keine die Vorhersage des Wetters betreffende Regel; vgl. Jahuda Bonsenyor, Llibre de paraules e dits de savis e filosofs ... per en Gabriel Llabres y Quintana. Palma de Mallorca 1889. 8°. S. 68, 69.

ich es mir, daß fast die Hälfte aller volkstümlichen Wetterregeln an die Heiligen des christlichen Kalenders anknüpft. Wie groß ferner der Einfluß der christlichen Kirche bei der Bildung der an einzelne Tage gebundenen Regeln gewesen sein muß, geht auch daraus hervor, daß für die Wirkungsdauer eines Lostages auf die nachfolgende Witterung mit Vorliebe eine Zahl von Tagen genommen wurde, die auch in der Bibel häufig vorkommt, nämlich die Zahl 40[1]. Wir finden sie in den Bauernregeln, die sich auf das Wetter beziehen, an: Mariä Lichtmeß (2. Februar), St. Felix (21. Februar), vierzig Ritter (10. März), Mariä Verkündigung (25. März), Frohnleichnamsfest, St. Medardus (8. Juni), St. Gervasius (19. Juni), Mariä Heimsuchung (2. Juli), St. Benedikt (7. Juli), St. Swithin (15. Juli, speziell englischer Wetterheiliger), St. Bartholomaeus (24. August). Wenn die Wirkungsdauer der Witterung an zwei anderen Lostagen, nämlich dem Siebenschläfertag (27. Juni) und den Sieben Brüdern (10. Juli), auf sieben Wochen angenommen wird, so liegt da wohl eine beabsichtigte äußerliche Übereinstimmung mit dem Namen des Lostages vor; vielleicht spielt aber auch die der Zahl 7 in den Vorstellungen des Volkes beigelegte Bedeutung etwas mit.

Die starke Beeinflussung seitens der Geistlichkeit macht es auch verständlich, daß im Bereich der römisch-katholischen Kirche die Übereinstimmung der Bauernregeln eine ziemlich große ist, am meisten in Deutschland, Frankreich, England und Italien, während sie im slavischen Osten viel weniger Anklänge an die westeuropäischen zeigen.

Der Inhalt der Bauernregeln allgemeiner Natur, die nicht an bestimmte Tage gebunden sind, stammt hauptsächlich schon aus dem Altertum; er ist bei der Berührung der Völker untereinander zum Teil mündlich überliefert, zum Teil durch die Schriften der Griechen und Römer in den Kreisen der Gebildeten eingebürgert worden. Auf diesem Wege dürfte es auch bekannt geworden sein, daß beide Völker schon Bauernregeln besaßen oder wenigstens kurze Sprüche und Verse, die diesen sehr ähnlich sind. Heutzutage wissen wir nur wenig von ihnen, weil viele Schriften der Alten über den Landbau, die Schiffahrt und verwandte Gebiete, die solche Fragen behandelten, verloren gegangen sind.

Aus altrömischer Zeit scheint sich nur eine einzige auf das Wetter bezügliche Bauernregel erhalten zu haben[2]. Macrobius (4.—5. Jahrh. nach Christi Geb.) sagt von ihr (Saturnal. lib. V, 20, 18; Macrobius ed. Eyssenhardt,

[1] Bei der biblischen Sündflut regnet es 40 Tage und Nächte (Moses I, 7); Moses bleibt 40 Tage und Nächte auf dem Berge Sinai (Moses II, 24); Christus bleibt 40 Tage und Nächte in der Wüste (Matthaeus 4, 2); der Prophet Elias geht 40 Tage und Nächte durch die Wüste bis an den Berg Horeb (Könige I, 19, 8). — Nachträglich sehe ich, daß die große Bedeutung der Zahl 40 in den Vorstellungen einiger Völker eingehend erörtert worden ist von W. H. Roscher in der Abhandlung »Die Zahl 40 in Glaube, Brauch und Schrifttum der Semiten« (Abh. d. Phil.-Hist. Kl. d. Sächs. Ges. d. Wiss. XXVII, 1909 S. 91—138). Er weist nach, daß schon in Alt-Babylon der Zahl 40 eine besondere Stellung eingeräumt wurde.

[2] Beim Suchen nach lateinischen und griechischen Bauernregeln gab mir den ersten Anhaltspunkt, der weiter führte, die Anmerkung 13 auf S. 108 der Meteorologia veterum Graecorum et Romanorum von J. L. Ideler, sowie der Umstand, daß mich mein verehrter Kollege, Herr Geheimrat Prof. Dr. Norden, mit dem gleich zu nennenden griechischen versus paroemiographus bekannt machte.

2. Aufl. S. 341): in libro enim vetustissimorum carminum, qui ante omnia, quae a Latinis scripta sunt, conpositus ferebatur, invenitur hoc rusticum vetus canticum

hiberno pulvere verno luto grandia farra, camille, metes[1].

In freier Übersetzung könnte die Regel deutsch lauten:

Winterstaub und Frühjahrsregen
Bringt, Camill, dir Erntesegen;

sie hat eine Parallele unter den deutschen Bauernregeln, nämlich:

Märzenstaub, Aprillenregen
Kommt dem Bauer sehr gelegen.

Etwas zahlreicher sind die mir bekanntgewordenen Beispiele für griechische, in Verse gebrachte volkstümliche Wetterregeln. Ich nenne zunächst den in den Werken[2] über griechischen Versbau gewöhnlich als versus paroemiographus angeführten Spruch

φιλεῖ δὲ νότος μετὰ πάχνην
(Auf Reif folgt gern Südwind).

Der folgende Hexameter

εἰ δὲ νότος βορέην προκαλέσσεται, αὐτίκα νίψει
(Wenn der Südwind den Nordwind zum Kampf herausfordert, wird es sogleich schneien)

dürfte aus dem nördlichen Teil des ionischen Sprachgebietes stammen, wo das Eindringen des kalten Nordwindes in warme und feuchte Südluft im

[1] Nach einer gefälligen Mitteilung des Hrn. Kollegen E. Norden, mit dem ich über diese altitalische Bauernregel sprach, wird sie am besten folgendermaßen geschrieben:

hiberno pulvere verno luto
grandia farra camille metes.

»Nach seinem Vorschlage, den er in seiner Antiken Kunstprosa I (Leipz. 1898, 3. Aufl. 1922) S. 159 begründete, pflegt man ein derartiges Gebilde jetzt »rhythmische Prosa« zu nennen. Es sind zwei Zeilen, beide in der Mitte abgeteilt; jede Hälfte enthält je zwei Worte, die ihrem Sinne nach sich zu einer Gedankeneinheit zusammenschließen. Da nun diese Eigenart sich auch bei dem ältesten italischen Verse, dem versus Saturnius, findet, so läßt sich von jenem Spruche auch sagen: er zeige in seiner Form eine rhythmische Vorstufe des Saturnius.«

Aus dem Inhalt der Regel möchte ich schließen, daß sie nicht in Unteritalien oder Sizilien, wo Winterregen herrschen, entstanden ist, sondern in Mittelitalien, wobei natürlich vorausgesetzt wird, daß die jahreszeitliche Verteilung der Niederschläge im wesentlichen unverändert geblieben ist, was wahrscheinlich erscheint.

Sodann will ich noch auf eine charakteristische Eigentümlichkeit in der Fassung der Regel aufmerksam machen, die sich bis auf den heutigen Tag erhalten hat und die vielen modernen Bauernregeln eigen ist, daß nämlich häufig nicht direkt von den meteorologischen Erscheinungen, sondern von deren Wirkung gesprochen wird: statt Regenmangel steht Staub, statt reichlichem Regen Kot. Von den vielen diesbezüglichen Beispielen, welche die jetzt noch gebräuchlichen Bauernregeln bieten, seien nur folgende drei nichtdeutsche genannt:

March dust to be sold
Worth ransom of gold.

A Noel au balcon
A Pâques au tison.

Hasta pasado Mayo
No te quites el sayo.

[2] Zuerst wohl bei G. Hermann, Elem. doctr. metricae. Lips. 1816. 8°. S. 638.

Winter leicht Schneefälle hervorruft[1]. Er wird von PLUTARCH[2] in der Schrift De primo frigido überliefert, steht aber schon in ein wenig veränderter Fassung in dem pseudo-aristotelischen Werke Problemata. Diese wegen ihres vielseitigen Inhalts merkwürdige Schrift, die nach PRANTL[3] u. a. wahrscheinlich der »nächsten nacharistotelischen Periode« angehört, liefert die größte Ausbeute von griechischen Wetterregeln. Man kann den Abschnitt XXVI, in dem sie alle vorkommen und geprüft werden, geradezu als eine Abhandlung über volkstümliche griechische Wetterregeln und Wetteranschauungen ansehen. Die Schrift wurde von den Philologen bislang wenig beachtet, und erst jetzt ist eine Einzelausgabe von ihr erschienen[4], leider ohne deutsche Übersetzung[5], die dem Nichtphilologen die Benutzung erleichtern würde, aber die im 15. Jahrhundert von THEODORUS VON GAZA besorgte Übertragung (aus seiner Muttersprache) ins Lateinische gibt immer noch einen bequemen Überblick über den Inhalt. Ich entnehme dieser Quelle die folgenden Fragen:

Problemata XXVI, 3: Cur auster post pruinam spirare soleat? [siehe oben].

» XXVI, 9: Cur dici solet »tertia lux nunquam nocturno aquilone laborat? (οὔποτε νυκτερινὸς βορέας τρίτον ἵκετο φέγγος, in freier Übersetzung:

Nordwind, der bei Nacht entsteht
Bis zum dritten Tag vergeht,

oder:

Nordwind, der sich bei Nacht erhebt
Nicht den dritten Tag erlebt;

ein Beispiel dafür, wie leicht Varianten entstehen).

» XXVI, 20: unde illud proverbium »cum cessat boreas, cumque auster surgere coepit«, wiederholt in 27, 41, 45! (ἀρχομένου γε νότου καὶ λήγοντος βορέαο)[6].

[1] Dieser Vorgang wird am Bosporus häufig beobachtet: die schwere, kalte Nordluft dringt keilförmig unter die aus Süden stammenden leichten, warmen und feuchten Luftmassen und zwingt sie zum Aufsteigen. Dabei kühlen sie sich ab und scheiden Wasserdampf aus. Der an- und eingreifende Teil ist also der Nordwind, nicht der Südwind, und die Regel würde griechisch richtiger lauten:

εἰ δὲ βορρᾶς νότον προκαλέσσεται, αὐτίκα νίψει.

[2] Plutarchi Scripta moralia ed. F. Dübner. Paris, Didot 1841, vol. II Sp. 1162. — In den Problemata lautet der Vers: εἰ δὲ νότος βορέαν προκαλέσσεται, αὐτίκα χειμών. — PAUL MINERVA, der Verfasser des umfangreichsten Werkes über die Wettervorhersage des 17. Jahrhunderts (De praecognoscendis temporum mutationibus ... Neapoli 1616. Fol. S. 240) zitiert die Quelle bei Plutarch und gibt die vielleicht von ihm selbst herrührende lateinische Übersetzung in Form eines Hexameters: Auster si Boream exciverit, illico ninget.

[3] PRANTL, Über die Probleme des Aristoteles. Abh. Münch. Ak. d. Wiss., phil.-hist. Kl., VI, 1852.

[4] Aristotelis quae feruntur Problemata Physica, ed. C. E. Ruelle, recog. H. Knoellinger, ... curavit J. Keck. Lips., Teubner 1922. 8°. XV, 317 S. — Die lateinische Übersetzung von Theodorus steht z. B. im 3. Bande der Aristotelesausgabe der Berliner Akademie d. Wissenschaften (1831). Es gibt eine französische Übersetzung von BARTHÉLEMY ST. HILAIRE (Paris 1891) mit umfangreichem Kommentar.

[5] Kurz vor und nach 1500 erschienen sehr freie Bearbeitungen der Probleme in deutscher Sprache (Hain Nr. 1733—1737); sie enthalten aber fast nur medizinische Kapitel und viele spätere Zutaten, sogar aus arabischen Schriftstellern.

[6] Über diese Frage vgl. die Bonner Dissertation von E. RICHTER: De Aristotelis Problematis (1885), S. 19—21. — Durch den häufigen Wechsel von Nord- und Südwinden entsteht

Problemata XXVI, 29: quod etiam proverbium illud declarat »ut caecias nubes, sic ille trahit opes« (ἕλκων ἐφ' αὑτὸν ὥσπερ καικίας νέφος)[1].

» XXVI, 46: Cur dici soleat »fit glacialis hiems, boream si duxerit auster?« unde celebre illud est »offendente lutum borea, mox terra gelascit« (εἰ βορρᾶς πηλὸν καταλήψεται, αὐτίκα χειμών).

Die drei Wetterregeln 3, 9 und 29 stehen auch in der kleinen Schrift περὶ ἀνέμων, die gewöhnlich dem Theophrast zugeschrieben wird, und zwar in den Abschnitten 49 bzw. 50 und 37. Der Philologe Adrian Turnebus (Turnèbe), der das Werkchen im 16. Jahrhundert ins Lateinische übersetzte[2], hat die beiden ersten Regeln in Hexameter gebracht, die von denen des Theodorus von Gaza verschieden sind; sie lauten:

Auster post aërem est solitus spirare pruinam

Nocturnum boream lux nunquam tertia vidit.

Auch der moderne Übersetzer[3] der genannten Schrift von Theophrast ins Englische, J. G. Wood, hat dieselben Regeln in Reime gefaßt:

After Frost hoar
Southern winds roar.

A North-wind rising in the night
Never sees the third day's light.

Beide Fälle sowie die eben angeführten Hexameter von Theodorus von Gaza und von Paul Minerva bestätigen das, was ich oben über die Neigung der Menschen, Wetter- bzw. Bauernregeln in Reime zu bringen, näher ausgeführt habe.

Während die oben zitierte altitalische Wetterregel eine echte Bauernregel ist, die sich auf den Ausfall der Ernte bezieht, machen wir bei den griechischen die Wahrnehmung, daß sie meist auf die Winde Bezug nehmen, d. h. daß sie eigentlich Schifferregeln oder Seemannssprüche sind, was bei dem alten und intensiven Betrieb der Schiffahrt durch die Griechen durchaus begreiflich erscheint. Im Grunde entspringen sie natürlich demselben Bedürfnis und atmen denselben Geist wie die auf die landwirtschaftlichen Verrichtungen bezüglichen Wetterregeln.

Damit glaube ich den Beweis dafür geliefert zu haben, daß schon im klassischen Altertum dieselbe oder eine sehr ähnliche Form der volkstümlichen Wetterregeln bestand wie bei den noch heute gebräuchlichen. Eine

---

eine Unruhe der Luft, eine ταραχὴ τοῦ ἀέρος, von der im Parapegma von Clodius Tuscus sooft die Rede ist; vgl. meine Beiträge z. Gesch. d. Met. II, 162.

[1] Auffällig ist in der Übersetzung das Wort opes. Gemeint ist, daß der Nordostwind Wolken bringt (heraufzieht). Offenbar bezieht sich hierauf die Stelle der Nat. Hist. des Plinius II, 48: narrant et in Ponto caecian in se trahere nubes.

[2] Man findet diese Übersetzung in dem Werke: Theophrasti Eresii libri de historia et de causis plauterum cum libellis plerisque physicis ... curavit I. G. Schneider. Lipsiae 1821. 8°. S. 462.

[3] Theophrastus of Eresus on winds and on weather signs ... translated ... by J. G. Wood ... London 1894. 8°. S. 45—46.

Beeinflussung dieser durch jene, und zwar auf dem Wege mündlicher und schriftlicher Überlieferung, dürfte, wenn nicht als sicher, so doch als sehr wahrscheinlich anzunehmen sein.

Die angeführten griechischen Wetterregeln stammen aus Schriften des 4. und 3. Jahrhunderts vor Christi Geburt, sie sind aber natürlich viel älter und mögen vielleicht in eine Zeit hinaufreichen, in denen HESIODS »Werke und Tage« die ältesten griechischen Wetterzeichen überliefert. Wetterzeichen bilden den Inhalt der Wetterregeln, aber zur Aufstellung von diesen bedarf es offenbar einer höheren Kulturstufe. Ob die Bewohner von Babylonien eigentliche Wetterregeln besessen haben, entzieht sich unserer Kenntnis, wir wissen nur, daß sie gewisse Witterungserscheinungen zur Aufstellung von Prophezeiungen benutzt haben[1]. Das trifft wahrscheinlich auch für die Juden in Palästina zu, wie einige Witterungsangaben prognostischer Natur in der Bibel andeuten (Könige I, 18, 44—45; Hiob[2] 37, 9 u. 22; Matth. 16, 2—3; Luk. 12, 54—55).

Das Ergebnis der vorstehenden Untersuchung läßt sich also dahin zusammenfassen: Unsere volkstümlichen Wetterregeln sind ein uraltes Erb- und Wandergut. Ihr Inhalt ist zu einem großen Teil derselbe geblieben wie im Altertum, zum Teil auch ihre Fassung; diese hat aber durch die christliche Kirche vielfach eine starke Beeinflussung erfahren.

Obwohl es streng genommen nicht zu dem hier behandelten Thema gehört, will ich doch noch einige Bemerkungen über den Wert und die Richtigkeit der Bauernregeln hinzufügen. Darüber ist schon mehrfach und auch frühzeitig gerade in Deutschland geschrieben worden (vgl. im Anhang 1: STURM 1687, PILGRAM 1788, FRESENIUS 1791) und in besonders eingehender Weise von den beiden badischen Meteorologen PH. STIEFFEL (1840) und O. EISENLOHR (1847). Ich bin der Meinung, daß alle diese Autoren den Bauernregeln insofern nicht ganz gerecht geworden sind, daß sie diese zu wörtlich genommen und sich nicht genug in den Geist der in ihnen enthaltenen Volksweisheit versetzt haben. Man muß meines Erachtens sowohl die Zeitangaben als auch den Inhalt der Wetterregeln freier deuten[3]. Diesen liegt sicherlich eine oftmals wiederholte Beobachtung zugrunde, die aber sehr häufig falsch aufgefaßt und auch unrichtig gedeutet wurde, bisweilen aber doch genügend deutlich erkennen läßt, um was es sich eigentlich handelt. Der gemeine Mann kann natürlich nicht, wie ein Naturforscher, genau beobachten und er versteht auch nicht das Beobachtete genau wiederzugeben.

---

[1] G. HELLMANN, Die Anfänge der Meteorologie. Meteorol. Zeitschr. XXV, 1908 S. 481 ff.

[2] Wegen der meteorologischen Deutung dieser Stelle (37, 22) vgl. J. J. SCHEUCHZER, Iobi Physica Sacra. Zürich 1721. 4°. S. 321—322.

[3] Eine ähnliche Ansicht äußerte schon 1803 der Landshuter Professor G. KNOGLER auf S. 302 seines Lehrbuches der Meteorologie (»Etwas von den sogenannten Bauernregeln«). Ebenso vertrat THOMAS FORSTER (Perennial Calendar S. XIX. XX) den Standpunkt, daß man sich nicht an die Tage der Heiligen und Festtage klammern soll, sondern »about the Time when the Festivals alluded to are recorded in the Calendar«. Auch HENNIG (1921) hat eine freiere Auffassung der Bauernregeln.

So ist z. B. der Glaube an die »Eisheiligen« Mamertus, Pancratius und Servatius (11.—13. Mai im Gregorianischen Kalender) von der richtigen Beobachtung ausgegangen, daß es im Mai häufig Kälterückfälle gibt, die der Vegetation schädlich werden können. Zur zeitlichen Bestimmung des Eintretens solcher Rückschläge wurde in jenen frühen Zeiten, in denen es eine genauere Datierungsmethode noch nicht gab, der ungefähr passende Tag eines (oder in diesem Falle mehrerer[1]) Heiligen des Kirchenkalenders genommen. Deren gab es aber in den ersten Jahrhunderten der christlichen Kirche nur wenige, so daß die Zeitbestimmung nur eine ungefähre sein konnte. Man darf deshalb aus der Regel nicht schließen, daß gerade der 11., 12. und 13. Mai Frostgefahr bringen, sondern nur so viel, daß man sie im Laufe des Monats Mai erwarten kann. In gewissen Zeiträumen sind aber die Kälterückfälle wirklich häufig um die angegebene Zeit eingetreten, wie ich in diesen Sitzungsberichten 1923 S. 7 ff. gezeigt habe. Dadurch wurde der Glaube an die »Gestrengen Herren« von neuem belebt, so daß er nicht erlosch, auch wenn lange Perioden kamen, in denen sie sich an anderen Tagen einstellten, oder wenn sie ganz ausblieben.

Bei der an den Siebenschläfertag (27. Juni) anknüpfenden Bauernregel liegt wahrscheinlich die Erfahrung zugrunde, daß Ende Juni in Deutschland die Hauptregenzeit anfängt, die sich gewöhnlich bis zum August hinzieht. Faßt man die Regel wörtlich auf, so ist sie natürlich falsch. Denn 7 Wochen hintereinander hat es in Deutschland noch nie geregnet; wenn sie aber so gedeutet wird, daß von Ende Juni ab längere Zeit hindurch häufig Regen zu erwarten steht, so trifft sie in vielen Jahren zu. Das ist eben richtige Bauernmeteorologie oder, wie Paullini 1705 schrieb, »Bauern-Physic«.

Die Bauernregel »Grüne Weihnachten, weiße Ostern«, die auch erst durch die christliche Kirche diese Fassung erhalten hat, darf gleichfalls nicht so aufgefaßt werden, daß gerade das Wetter an diesen Feiertagen einander gegenübergestellt wird, sondern sie will nur sagen: wenn mitten im Winter kein richtiges Winterwetter herrscht, dann gibt es einen Nachwinter, und das trifft häufig zu[2].

---

[1] Vielleicht deshalb, weil der Kälterückfall gewöhnlich einige Tage anhält.

[2] Die Fassung: Grüne Weihnachten — weiße Ostern muß in einer Gegend Deutschlands entstanden sein, in der zu Weihnachten gewöhnlich schon Schnee liegt, also in höheren Ortslagen oder im Osten. In Berlin und westwärts ist dies nicht der Fall; so war z. B. an dem frei gelegenen Meteorologischen Observatorium bei Potsdam in den letzten 30 Jahren (1893 bis 1922) gegen Weihnachten, d. h. weit gegriffen in den Tagen vom 20. bis 31. Dezember, nur sechsmal eine nennenswerte Schneedecke vorhanden. Es scheint mir deshalb unwahrscheinlich, daß die von Swainson (S. 161) gebrachte englische Fassung: »A green Christmas — a white Easter« in England, wo Schnee noch viel seltener ist, wirklich volkstümlich sein soll. Denham, der aus dem Munde des Volkes die Regeln aufgenommen hat, kennt sie nicht. Das wäre also wieder einer der eingangs erwähnten Fälle, daß die Sammlungen von Bauernregeln manches Fremdgut enthalten, das für das betreffende Land nicht paßt. Die andere von Swainson und anderen erwähnte Fassung: »A warm Christmas — a cold Easter« ist für England viel besser geeignet.

Die in Rede stehende Wetterregel gehört zu der ziemlich großen Kategorie von Wetterregeln, in denen zum Ausdruck kommt, daß eine Witterungsanomalie durch eine solche entgegengesetzten Charakters bald ausgeglichen wird. Dieses aus ethischen Vorstellungen entnommene »Prinzip der ausgleichenden Gerechtigkeit« zeigt sich ja auch in manchen anderen auf das Wetter bezüglichen Volksanschauungen: auf einen kalten Winter soll ein warmer Sommer folgen u. a. m. In dieser Allgemeinheit ist das Prinzip natürlich nicht richtig.

Bei solcher oder ähnlicher liberaler Auffassung der volkstümlichen Wetterregeln wird man finden, daß in manchen doch ein guter Kern steckt, wenn auch ihr prognostischer Wert meistens nicht hoch anzuschlagen ist. Andererseits muß gesagt werden, daß sich viele solche Regeln auch bei freier Ausdeutung als unbrauchbar und ganz töricht erweisen. Am meisten Wert haben diejenigen allgemeinen Wetterregeln, die nicht an einen bestimmten Tag geknüpft sind und die gewöhnlich die sogenannten natürlichen Wetterzeichen verwerten, unsinnig dagegen sind diejenigen Regeln, die das Wetter eines einzelnen Tages (Lostages) als maßgebend annehmen für dasjenige eines viel späteren Zeitraumes.

Anhang 1.

Verzeichnis von Schriften über volkstümliche Wetterregeln[1].

Böhmen.

O. Frh. von Reinsberg-Düringsfeld, Fest-Kalender aus Böhmen. Ein Beitrag zur Kenntnis des Volkslebens und Volksglaubens in Böhmen. Prag 1861. 8°. XVI, 626 S.

Enthält viele Wetterregeln in deutscher und tschechischer Sprache; von letzteren stehen einige auch in der tschechischen Übersetzung der Bauern-Praktik: Pranostika Sedlská, ca. 1612 ff.; vgl. bei Deutschland: Bauern-Praktik, 1508.

Sammlung der bekannteren Wetter-, Bauern- und Winzer-Regeln und Lostage für den Landmann, nebst einer Einleitung von einem Deutschböhmen. Leipzig 1869. 8°. 58 S.

Enthält auch tschechische Wetterregeln.

Brasilien.

Moacyr Silva, Proverbios meteoro-agricolas (Revista mensal de meteorologia, Rio de Janeiro 1922. 8°, vol. I Nr. 1, 2 ff.).

Bulgarien.

Spas Watzof, Volks-Meteorologie. Sammlung von populären bulgarischen, auf die Wettervorhersage bezüglichen Redensarten, Sprichwörtern und Regeln. Sofia 1900. 8°. X, 79 S.

In bulgarischer Sprache. Mit Hilfe vieler Korrespondenten zusammengebrachte reiche Sammlung.

J. D. Kowatschew, Volks-Astronomie und Meteorologie (Zeitschr. f. Volkskunde der Bulg. Akad. d. Wissensch. Bd. XXX, 1914, S. 1—85, Sofia 1914).

In bulgarischer Sprache.

Dänemark.

Bonde-Practica, vgl. bei Deutschland: Bauern-Praktik, 1508.

Jens Lauritzsøn W(olf), Diarium siue Calendarium ecclesiasticum, politicum et oeconomicum perpetuum. Det er: En evigvarende Kircke, Politick oc Huuszholdings-Calender .... Kjøbenhavn 1648. 4°. 21 Bl., 664 S., 1 Bl.

Enthält Bauernregeln in dänischer und lateinischer Sprache.

Olaus Worm, Fasti Danici. Universam tempora computandi rationem antiquitus in Dania et vicinis regionibus observatam libris tribus exhibentes ... Hafniae 1693. Fol. 6 Bl., 191 S., 4 Bl.

Prognostica rusticorum S. 109—118.

Mathias Bugge, Nogle aeldgamle Danske Bonderegler og Mærkedage for Veirliget, sammenlignede med nyere Erfaringer. Kjøbenhavn 1816. kl. 8°. 44 S. (S.-A. Dansk Minerva).

Deutsche und schwedische Bauernregeln werden zum Vergleich herangezogen. Der Verfasser war Observator an der Sternwarte in Kopenhagen.

C. Th. Engell, Veirforudsigelser eller Kjendemærker, ved hvis Hjælp man med mer eller mindre Sikkerhed kan forudse, hvorledes Veiret i den nærmeste Fremtid vil blive. Samlede og udgivne af —. Kjøbenhavn 1870. kl. 8°. 26 S.

In alphabetischer Anordnung.

---

[1] Die allgemeinen folkloristischen Werke, die natürlich auch volkstümliche Wetterregeln enthalten, bleiben hier außer Betracht.

Deutschland.

Leonhard Reynmann, Wetterbüchlein von warer Erkenntnis des Wetters, 1505 bzw. 1510.

Wegen der zahlreichen Ausgaben und Übersetzungen dieses Volksbuches vgl. Hellmann, Neudrucke von Schriften und Karten über Meteorologie und Erdmagnetismus Nr. 1, Einleitung.

Bauern-Praktik, 1508.

Wegen der noch zahlreicheren Ausgaben und Übersetzungen dieses Volksbuches vgl. Hellmann, Neudrucke Nr. 5, Einleitung, und den Nachtrag zu Nr. 15.

Jodocus Willich(ius), Dialysis quatuor librorum in Georgicis Virgilii. Signorum prognosticorum de tempestatibus aeris physica explicatio. Francof. ad Viadrum 1551. kl. 8°. 80 n. gez. Bl.

Johann Rasch, New Loßtäg ... Rorschach 1590. 4°, vgl. oben.

Joannes Colerus, Calendarium Oeconomicum & perpetuum. Vor die Haußwirt, Ackerleut, Apotecker vnd andere gemeine Handwercksleut, Kauffleut, Wanderßleut, Weinherrn, Gertner vnd alle diejenige so mit Wirtschafft vmbgehen ... Wittenberg 1591. kl. 4°. 22 Bogen.

Es gibt zahlreiche spätere Ausgaben, 1592 ff.

Henricus Ranzovius, Diarium sive Calendarium oeconomicum, ecclesiasticum, astronomicum, et fere perpetuum ... Witebergae 1593. 4°. 54 Bogen.

Bauernregeln in lateinischer Fassung S. 81 ff.

Der Baurn und Landleut hellpolirter Wetterspiegel, in welchem man die Witterung eines jeden Jahrs, Monat, Wochen und Tag ... nahe vorher sehen ... Aus der alten Astrologen und erfahrner Bauersleut fleißiger Aufmerckung zusammen getragen. o. O. u. J. (etwa 1600). 8°. 144 S.

Gabriel Bucelinus, Calendarium Astronomicum Priscum ... Item zu mehrern Erlustigung auch die gemein Bauren-Practic vnnd was dergleichen zu observiern sein möchte. o. O. 1657. 16°. 16 Bl.

Johannes Praetorius, Philologico-Historicum Schediasma de Bruma, vom Luzien-Tage ... (Lipsiae) 1667. 4°. 9 Bogen.

J. Chr. Sturm, Exercitatio physica de agricolarum regulis ... (J. Chr. Lindstatt resp.) Altdorfi 1687. 4°. 16 S.

Frid. Frisius, Dissertatio physica de curiosa et superstitiosa rusticorum physica ... (J. C. Ritter resp.). Lipsiae 1691. 4°. 17 Bl.

C. T. Paullini, Kleine, doch curieuse Bauren-Physic. Franckfurth und Leipzig 1705. kl. 8°. 87 S.; 2. vermehrte Aufl. ebenda 1711. kl. 8°. 166 S.

Thomas Hoffmann, De praesagiis tempestatis naturalibus. Dissert. inaug. medico-physica ... Basileae 1771. 4°. 32 S.

Behandelt hauptsächlich die dem Altertum bekannten Wetterzeichen.

Einige Reime und Regeln der Alten auf alle zwölf Monate. Nebst Gesundheits-Regeln. wie auch Haushaltungs- und Garten-Wissenschaften. Leipzig o. J. (etwa 1790). kl. 8°. 48 S.

Johann Gottlob Kirschbaum, Nützliches Handbuch, enthaltend erprobte Witterungs- und Bauernregeln, bewährte Hausmittel, einen kurzen Unterricht vom Aberglauben .... Leipzig 1794. 12°. 2 Bände. X, 443 S., 12 Bl.; 5 Bl., 227 S., 12 Bl.

Im ersten Bande 258, im zweiten 150 Witterungs- und Bauernregeln.

F. A. Fresenius, Praktische Wetterkunde nach alten Bauererfahrungen. Ein Handbuch für Oekonomen und Landleute. Gotha 1799. kl. 8°. 267 S.

Zahlreiche Wetterregeln werden auf ihre Richtigkeit geprüft.

Das Buch vom Wetter, oder kurzgefasster Unterricht von den sogenannten Bauernregeln als Wetterprophezeiungen, und anderen Witterungsanzeigen aus den Ansichten des Mondes, der Sonne, der Nebel und der Wolken und aus Beobachtungen an Menschen, Thieren u. s. w. .... Pesth. 1819. 8°. 48 S. (S.-A. aus dem 100jährigen Zeit- und Witterungs-Kalender).

C. Schulz*[1], Prognosticum und alte Bauernregeln. Ein immerwährender Witterungskalender. Berlin 1830. Fol.

---

[1] Die mit einem * versehenen Schriften habe ich nicht einsehen können.

J. Eckenstein, Der erfahrene Wetterverkündiger oder populäre Witterungskunde für das Volk und besonders für das Landwirthschaft treibende Publicum. Auf vieljährige Erfahrungen alter Waidmänner, Landwirthe, Gärtner und Winzer begründet. Ilmenau 1833. 8°. XX, 218 S.

Ph. Stieffel, Jahrbuch der Witterungs- und Himmelskunde für Deutschland im Jahr 1840. Karlsruhe 1840. 8°. VI, 208 S., 2 Taf.

Die Bauernregeln werden an der Hand langjähriger meteorologischer Beobachtungen geprüft. Dasselbe geschieht in des Verfassers Witterungskunde, Karlsruhe 1842. 8°. VIII, 215 S., 4 Tab.

Der untrügliche Wetterprophet*. Oder Wetter- und Bauern-Regeln auf alle Monate des Jahres. Erfurt 1844. 16°.

M. Cunow, Witterungsbüchlein oder Sammlung sicherer Kennzeichen von bevorstehendem Witterungs-Wechsel und zukünftiger Witterungs-Beschaffenheit. Zweite vermehrte Auflage. Gotha 1844. kl. 8°. IV, 87 S.

Enthält nur volkstümliche Wetterregeln und Wetterzeichen. Ins Holländische übersetzt: Weerboekje ... Amsterdam 1845. kl. 8°. 79 S.

Otto Eisenlohr, Untersuchungen über die Zuverlässigkeit und den Werth der gebräuchlichsten Wetterregeln, namentlich der sog. Bauernregeln und Loostage. Nach vieljährigen zu Karlsruhe angestellten Beobachtungen. Karlsruhe 1847. 8°. VII, 55 S.

(Clemens von Bönninghausen), Denksprüche über die Witterung, oder meteorologische Aphorismen unserer Vorfahren, aus ihren Schriften gesammelt und mit einem Anhange .... herausgegeben von Dr. C. v. B....n. Münster 1848. 8°. XVI, 93 S.

Schübler, Grundsätze der Meteorologie in näherer Beziehung auf Deutschlands Klima. Neu bearbeitet von G. A. Jahn. Leipzig 1849. 8°. 244 S., 9 Taf.

»Alte Wetterregeln und Wetterzeichen« auf S. 227—244.

K. M. Bosch, Über Wetter- und Bauern-Regeln. Progr. Gymn. Rottweil 1852. 4°. 18 S.

Theodor Boebel, Die Haus- und Feldweisheit des Landwirths. Die Kalendernamen, Bauernregeln, Sprichwörter u. s. w. in landwirthschaftlicher Beziehung. Nach den dem Königl. Landes-Oekonomie-Kollegium von den landwirthschaftlichen Vereinen des Preussischen Staates erstatteten Berichten bearbeitet von —. Mit einem Vorwort von F. W. Luedersdorff. Berlin 1854. kl. 8°. 4 Bl., 147 S.

Mit Angabe der Orte und Gegenden, in denen die Bauernregeln gebräuchlich sind. Die polnischen Fassungen in einigen Gebieten von Posen und Westpreußen werden gleichfalls mitgeteilt.

G. A. Jahn, Handbuch der Witterungskunde. Leipzig 1855. 8°. 304 S.

Bauernregeln auf S. 247—265.

(Grässe), Des deutschen Landmanns Practica. Wetter- und Gesundheitsregeln in Reimen, ... Bauerncompaß, Loostage des ganzen Jahres .... Dresden 1859. 8°. 197 S.

Wilhelm Körte, Die Sprichwörter und sprichwörtlichen Redensarten der Deutschen. Nebst den sprichwörtlichen Redensarten der deutschen Zechbrüder und Aller Praktik Grossmutter, d. i. der Sprichwörter ewigem Wetterkalender .... Zweite, verbesserte und vermehrte Auflage. Leipzig 1861. 8°. XXXII, 579 S.

Die Wetterregeln, mit Parallelen aus anderen Sprachen, auf S. 553—579. Die erste Auflage erschien bereits 1831.

O. Freiherr v. Reinsberg-Düringsfeld, Das Wetter im Sprichwort. Leipzig 1864. kl. 8°. VIII, 216 S.

Die aus fremden Sprachen zum Vergleich herangezogenen Regeln sind meist ins Deutsche übersetzt. Am Schluß ein reichliches Quellenverzeichnis.

R. W. T. Petri, Des Landwirth's Orakel. Die Bauernregeln der Völker Europa's oder Regeln und Sprüche aus dem Volksmunde über die Vorausbestimmung des Wetters. Breslau 1866. 8°. XVI, 116 S.

Namentlich französische und englische Parallelen werden mitgeteilt.

G. Freiherr von Horn, Die Kunst des Wetterprophezeiens oder: die Wetterzeichen und Bauernregeln. Altona 1869. kl. 8°. V, 103 S.

Rudolf Müldener, Das Buch vom Wetter oder das Wetter im Sprüchwort. Bernburg und Leipzig o. J. (etwa 1870). kl. 8°. 2 Bl., 153 S.

Die »Zweite Auflage«, Gotha (1883), ist nur eine Titelauflage.

Ernst Leistner, Des deutschen Landwirths Sprüchwörterbuch. Ein immerwährender Feldkalender und Wetterprophet. 1800 auserlesene und bewährte Bauernregeln und Sprüchwörter auf alle Jahreszeiten, Monate und Kalendertage .... Leipzig o. J. (1876). 8°. XVI, 144 S.

B. Schwalbe, Ueber Wetteraberglauben und die Wetterregeln des gewöhnlichen Lebens. Berlin 1876. 8°. 43 S.

Otto Danckwortt, Ueber Volksphysik. 4°. 30 S. (Progr. Realsch. I. Ordg. in Magdeburg 1880).

I. B. Montag, Immerwährender Witterungs-Prophet ... nebst den sogenannten Bauern-Regeln. Berlin (1881). kl. 8°. 90 S.

M. Schollen*, Volkstümliches aus Aachen ... Wetter-, Gesundheits- und Rechts-Regeln. Aachen 1881. 8°.

Wind und Wetter im Ostfriesischen Reimspruch (Ostfriesisches Monatsblatt 1884 S. 203 ff.).

P. Bahlmann, Alt-Münsterische Bauern-Praktik. Eine Sammlung münsterländischer Sprichwörter und Erfahrungssätze über Witterung und landwirtschaftlichen Betrieb. Münster 1896. kl. 8°. 32 S.

L. Grünenwald, Pfälzischer Bauernkalender. Speier 1896. 8°. 69 S.

W. Lüpkes, Seemannssprüche, Sprichwörter und sprichwörtliche Redensarten über Seewesen, Schiffer- und Fischerleben in den germanischen und romanischen Sprachen. Berlin 1911. gr. 8°. XII, 192 S.

Heinz Grube, Bauern-Regeln und Los-Tage. Weisheits-, Wahr- und Wetter-Sprüche der deutschen Bauern. Aachen (1905). kl. 8°. XIII, 79 S.

Eduard Kück, Wetterglaube in der Lüneburger Heide. Hamburg 1915. 8°. VI, 175 S.
Enthält viele bei den Bewohnern der Lüneburger Heide selbst gesammelte Wetterregeln.

Robert Walter, Wettersprichwörter. Deutsche Bauern- und Wetterregeln. Braunschweig 1920. kl. 8°. XVI, 132 S.

R. Hennig, Praktische Wetterregeln für jedermann. Leipzig u. Wien 1921. 8°. VII, 59 S., 10 Tafeln.
»Zutreffende Bauernregeln« S. 51—59. »Zutreffendes aus altem Volkswetterglauben« S. 42—45.

Bruno Haldy, Die deutschen Bauernregeln gesammelt und herausgegeben von —. Mit Monatsbildern von J. L. Gampp. Jena 1923. 8°. 1 Bl., 127 S.
Fast ausschließlich Wetterregeln. Einige Reimregeln scheinen vom Verfasser herzurühren.

England.

The Husbandman's Practice und The Book of Knowledge, etwa 1535 bis 1556, vgl. bei Deutschland: Bauern-Praktik, 1508.

Perpetvall and natvral Prognostications of the change of weather. London 1598. 8°. 24 Bl.

J. W(orlidge), Systema Agriculturae, The mystery of husbandry discovered ... Kalendarium Rusticum; or, the husbandmans monethly directions. Also the prognosticks of dearth, scarcity, plenty, sickness, heat, cold, frost, snow, windes, rain, hail, thunder ... London 1669. Fol. 16 Bl., 278 S., 3 Bl.
Wetterregeln, doch nur wenige gereimte in englischer Sprache, auf S. 220—264.

John Claridge, The Shepherd of Banbury's Rules to judge of the Changes of the Weather ... London 1744. 8°. 1 Bl., 64 S.
Weitere Ausgaben: London 1748, Edinburgh 1755, London 1827. Das Buch erschien bereits 1670 in London unter dem Titel: The Shepheard's Legacy or John Clearidge, his Forty Years experience of the Weather.

Thomas Forster, Researches about atmospheric phaenomena. Third edition. London 1823. 8°. XIV, 442 S., 6 Tafeln.
»Prognosticks« S. 128 ff. und 272 ff. Viel Zitate aus Schriftstellern des Altertums. Die erste Auflage, London 1813, enthält den Abschnitt »of some meteorological antiquities and superstitions« noch nicht. In der deutschen Übersetzung, Leipzig 1819, stehen die Wetterregeln auf S. 125 ff. Auch folgende beide Werke des Verfassers: The Perennial Calendar, and Companion to the Almanack (London 1824. 8°. XXVII, 803 S.) und The Pocket Encyclopaedia of natural phenomena (London 1827. 8°. XLVIII, 440 S.)

enthalten viel Stoff zur Beurteilung der volkstümlichen Wettervorhersage, besonders in England. Th. Forster hatte schon vorher gelegentlich seiner Ausgabe der Diosemeia von Aratus die Wettervorhersage im Altertum behandelt (London 1815. 8°. VII, 106 S.).

M. A. Denham, A collection of proverbs and popular sayings relating to the seasons, the weather, and agricultural pursuits; gathered chiefly from oral tradition. London (Percy Society Nr. LXVI) 1846. 8°. 2 Bl., IV, 73 S.

Mit Parallelen aus anderen Sprachen. Wertvoll durch die vielen vom Verfasser im Volke gesammelten Wetterregeln.

Arthur Mitchell, Popular weather prognosticks of Scotland (S.-A. Edinburgh New Philos. Journ., October 1863).

Ergänzungen dazu im Journal Scott. Meteorol. Soc., New Series, vol. I, 1866, S. 303—306.

Charles Clouston, An explanation of the popular weather prognosticks of Scotland on scientific principles. Edinburgh 1857. 8°. V, 53 S.

R. Inwards, Weather Lore: a collection of proverbs, sayings, and rules concerning the weather. London 1869. 8°. 91 S.

Zweite Auflage London 1893. 8°. XII, 190 S.; dritte ebenda 1898. XII, 233 S. Die aus anderen Sprachen zum Vergleich herangezogenen Wetterregeln sind ins Englische übersetzt.

C. Swainson, A handbook of weather-folk-lore being a collection of proverbial sayings in various languages relating to the weather, with explanatory and illustrative notes. Edinburgh and London 1873. 8°. X, 275 S.

Sehr reich an Vergleichen mit anderen Sprachen.

Ralph Abercromby and William Marriott, Popular Weather Prognosticks (Quart. Journ. Meteorol. Soc. 1883 S. 27—43, Discussion S. 43—47).

Hauptsächlich eine Prüfung der bekanntesten englischen Wetterregeln. Dazu gehört noch: R. Abercromby, On the explanation of certain weather prognosticks, ebenda 1884 S. 26—44.

(William Raper), Weather sayings, proverbs and prognosticks, chiefly from North Lancashire. 2d edition. Lancaster 1883. 8°. 36 S. — Erste Ausgabe in demselben Jahre.

H. N. Dickson, Weather Folk-Lore of Scottish Fishermen (Jour. Scott. Meteorol. Soc. 3d series, vol. VIII, No. VI S. 349—355; 1888).

Patrick Dudgeon, Weather Prognosticks (ebenda 3d series, vol. IX, No. IX, S. 259 bis 261; 1893).

R. T., My weather-wise companion. Edinburgh & London 1895, kl. 8°. 119 S.

J. S. Fowler and William Marriott, Our Weather. London 1912. kl. 8°. VIII, 131 S. Weather-Lore S. 116—122.

M. E. S. Wright, A medlay of weather lore. Bournemouth 1913. kl. 8°. 144 S.

Finnland.

Talon-Pojan Sää-eli Ilma-kirja ... (Des Bauern Wetter- und Klimabuch) 1773 ff.; vgl. bei Deutschland: Bauern-Praktik, 1508.

Frankreich.

La Grande Prognostication des Laboureurs, etwa 1542, vgl. bei Deutschland: Bauern-Praktik, 1508.

Daraus übergegangen in Einzelausgaben für bestimmte Jahre, z. B. La Grande Prophetie, et Pronostication des Laboureurs, pour les années 1615, 16, 17, 18 ... A Troys (1614). kl. 8°. 15 S.; ferner: Almanach, ou Pronostication des Laboureurs, reduite selon le Kalendier [sic] Gregorien ... par Mr. Anthoine Maginus. A Autun (1637). kl. 8°. 3 Bogen; ferner: La Pronoſtication des Pères Anciens ... Paris (ca. 1700) kl. 8°. 16 Bl., auf der letzten Seite Holzschnittportrait des Mathematikers Cormopedy, der wohl als Herausgeber anzusehen ist; ferner: Prophéties ou Prédictions perpetuelles ... A Troyes 1749 kl. 8°. 1½ Bogen. — Wider Erwarten enthält der berühmte, aus dem 15. Jahrhundert stammende »Grand Calendrier et Compost des Bergers« keine volkstümlichen Wetterregeln, sondern nur Astro-Meteorologisches.

L. A. D. F. (L. A. d'Hombre-Firmas), Recueil de proverbes météorologiques et agronomiques des Cévennois, suivi de pronostics des paysans Languedociens sur les changemens de temps. Paris 1822. 8°. 56 S.

Auch enthalten in des Verfassers: Recueil de mémoires et d'observations de physique, de météorologie ... Nismes 1838. 8°. 291 S.

Le Roux de Lincy, Le livre des proverbes français. Paris 1842, 12°. 2 vol., 2. Aufl., 1859.

L. A. Stoeber*, Chants et légendes populaires de l'Alsace qui se rattachent à la température et aux différents agents qui la déterminent (Revue d'Alsace, Colmar 1861).

Anacharsis Combes, Proverbes agricoles du Sud-Ouest de la France. 2me édit. Castres 1869. 8°. 166 S.

Wetterregeln S. 38—74, in der Vulgärsprache S. 133—152.

Proverbes et dictons agricoles de France, Paris 1872. 8°. 2 Bl., 190 S., 1 Bl.

Enthält fast ausschließlich aufs Wetter bezügliche Sprüche, mit Angabe der Departements, in denen sie gebräuchlich sind. Das bei Berger-Levrault in Paris erschienene Buch ist wahrscheinlich nur eine Sonderausgabe eines Teils der Statistique générale de la France vom Jahre 1862 (Strasbourg 1862).

Francis de Roucy, Dictons populaires sur le temps ou recueil des proverbes météorologiques de la France. Paris 1875. 12°. 23 S.

Der Verfasser hat bei den gereimten Regeln bisweilen nachgeholfen und einige offenbar selbst gemacht, z. B.

Le plus froid de tous les étés
Atteint toujours vingt-cinq degrés.

A l'instant précis du passage
De la plus basse pression (dans le baromètre)
Le vent est la direction
Où le tourbillon se propage.

Solche Regeln werden natürlich niemals »dictons populaires«.

F. Canu et A. Labbalétrier, Manuel de météorologie agricole. Paris (1884). kl. 8°. 167 S.; S. 101 ff.: Prévision du temps.

G. Dallet, La prévision du temps et les prédictions météorologiques. Paris 1887. kl. 8°. 336 S.; S. 301 ff.: Les proverbes et les dictons météorologiques.

H. Duchaussoy, Almanach météorologique à l'usage des cultivateurs. Amiens 1898. 8°. 124 S., 1 Bl.

Die volkstümlichen Wetterregeln werden z. T. geprüft.

A. Bleunard, L'art de prédire le temps. Paris (1903). 12°. 140 S.

Paul Sébillot, Le Folk-Lore de France. Tome premier. Le Ciel et la Terre. Paris 1904. 8°. VI, 489 S.; S. 60—132 Les météores.

Griechenland.

August Mommsen, Griechische Jahreszeiten. Heft 1. Neugriechische Bauernregeln, geordnet nach Monaten alten Stils. Schleswig 1873. 8°.

Mit Erläuterungen und mit Parallelen aus dem Altertum.

Holland.

Boerenpractica, vgl. bei Deutschland: Bauern-Praktik, 1508, sowie »Neudrucke« Nr. 15, Nachträge S. (8) und (9).

Cunow, vgl. bei Deutschland: Cunow, 1844.

H. C. van Hall, Spreekwoorden en voorschriften in spreuken, betreffende landbouw en weêrkennis. Haarlem 1872. 8°. VIII, 80 S.

Weêrkennis S. 54—76; mit deutschen und französischen Parallelen.

Italien.

L. Zacconi, Pronostici perpetui ... In Rimino 1623. 4°. 4 Bl., 140 S., 2 Bl.

Proverbij pronosticali (rusticali) auf S. 94 u. 118.

G. Giusti, Raccolta di proverbi Toscani. Firenze 1853. 8°. XV, 423 S.

»Meteorologia, stagioni, tempi dell'anno« S. 179—197.

G. Pitré, Meteorologia Popolare Siciliana (S.-A. Archivio per le tradizioni popolari, vol. IV, S. 495—534, Palermo).

Japan.

E. Knipping und K. Kawashima, Japanische Wetterregeln. Übersetzt von —. Fol. 8 S.

Japanische (transkribierte) und deutsche Fassung von 100 Regeln, die im südlichen Teil der Insel Shikoku gebräuchlich sind.

Österreich.

Fr. Pichler*, Das Wetter nach deutscher und im besondern nach steirischer Volksmeinung. Graz 1859. 8°.

Maria Rehsener*, Wind, Wetter, Regen, Schnee und Sonnenschein in Vorstellung und Rede des Tiroler Volkes (Zeitschr. d. Vereins f. Volkskunde I, 1891, S. 67ff.).

Ludwig von Hörmann, Wetterherren und Wetterfrauen in den Alpen. München 1917. 8°. (S.-A. Zeitschr. d. Deutschen u. Österreichischen Alpenvereins, Band 38, 1902, S. 93—114).

Bezieht sich auf die Tiroler Alpen.

Wilhelm v. Kesslitz, Alte und neue Wetterregeln für die Adria. o. O. u. J. (etwa 1900). 8°. 16 S.

Der Verf. übersetzt die alten italienischen Regeln auch ins Deutsche und fügt einige neue gereimte Regeln hinzu.

Palästina, Syrien, Arabien.

A. Klein, Mitteilungen über Leben, Sitten und Gebräuche der Fellachen in Palästina. (Zeitschr. d. deutschen Palästina-Vereins, VI, 1881, besonders S. 72—74).

K. L. Tallqvist, Arabische Sprichwörter und Spiele. Helsingfors 1897. 8°.

Aug. Haffner, »Bauernregeln« (in Syrien). (Wiener Zeitschr. f. d. Kunde d. Morgenlandes, XVIII, 1904 S. 169—176.)

Polen.

Klucz Prognostykarski, to iest: Rzetelne objasnienie słów y przezwisk niewyrozumianych, których astrologowie w kalendarzach y prognostykach swoich używaią ..... w Supraslu 1768. 4°. 10½ Bogen.

Erste Auflage: Danzig 1656; vgl. Zebrawski, Bibliografija S. 303, wo sechs verschiedene Ausgaben angeführt werden.

Portugal.

J. Leite de Vasconcellos, Tradições popul. de Portugal. Porto 1882. 8°.

Cap. III. A Atmosphera S. 45—65.

A. Thomaz Pires, Calendario Rural. Dictados relativos aos meses, comparados com os dictados similares de varios paises romanicos. Elvas 1893. 16°. 90 S.

Im Anhang Wetterregeln der Zigeuner von Alemtejo.

Rußland.

Alexis Yermoloff, Der landwirtschaftliche Volkskalender. Leipzig 1905. gr. 8°. IV, 567 S.

Deutsche Ausgabe des in russischer Sprache erschienenen zweibändigen Originalwerkes: Die landwirtschaftliche Volksweisheit in Sprichwörtern, Redensarten und Wetterregeln. — Besonders reich an russischem Material, das dem Verfasser als Minister für Landwirtschaft von vielen Seiten zur Verfügung gestellt wurde. Zum Vergleich werden fast alle europäischen Sprachen herangezogen, am wenigsten die skandinavischen.

A. Smolensky, Sammlung überlieferter Wetterregeln verschiedener Volksstämme Rußlands, gesammelt und geordnet von —. Moskau 1913. 8°. XX, 91, II S.

In russischer Sprache und mit beigegebenem deutschen Titel und Inhaltsverzeichnis. Der Verfasser hatte schon 1895 in Kasan ein Werk über die Wetterregeln der Tschuwaschen veröffentlicht.

Schweden.

Bonde-Practica, 1662; vgl. bei Deutschland: Bauern-Praktik, 1508.

H. Hildebrand Hildebrandsson, Samling of bemärkelse dagar, tecken, märken, ordspråk och skrock rörande väderleken. 8°. 128 S. (S.-A. Antiquarisk tidskrift för Sverige, Del 7 Nr. 2.)

Mit Angabe der Gegenden, in denen die Bauernregeln Geltung haben, sowie der Quelle, denen sie entnommen sind. Ein französisches Resumé auf S. 107—128. Einige Regeln werden auf ihre Richtigkeit geprüft.

H. Hildebrand Hildebrandsson, Om väderleksmärken, deras betydelse och ursprung. Stockholm (1894). 8°. 28 S.

Spanien.

Alfonso de Chaves, Tratado de los señales naturales para conocer la mudanza de los tiempos, ca. 1525.

Diese Sammlung von 273 alten Wetterregeln (Schifferregeln) wurde zum ersten Male abgedruckt in: C. F. Duro, De algunas obras desconocidas de Cosmografia y de Navigacion, y singularmente de la que escribió Alfonso de Chaves en principios del siglo XVI. Madrid 1895. Fol. 46 S. Der Herausgeber Duro hat einige noch heute gebräuchliche Wetterregeln der spanischen Schiffer und Fischer hinzugefügt; vgl. Meteorol. Zeitschr. XII, 1895 S. (61).

Cels Gomis, Lo llamp y 'ls temporals. Barcelona 1884. kl. 8°. XXII, 69 S., 1 Bl. — Meteorologia y agricultura populars. Barcelona 1888. kl. 8°. 176 S., 2 Bl.

Katalanische Regeln, vielfach verglichen mit solchen in anderen romanischen Sprachen.

Francisco Rodriguez Marin, Cien refranes Andaluces de meteorologia, cronologia, agricultura y economia rural recogidos de la tradicion oral y concordados con los de varios paises Romanicos. Segunda edicion, anotada. Sevilla 1894. 8°. 32 S.

Erste Auflage: Fregenal 1883.

Cárlos Puente y Úbeda, Meteorologia popular ó refranero meteorologico de la Peninsula Ibérica. Madrid 1896. 8°. 3 Bl., 279 S.

Mit vielen Varianten aus den Provinzen einschließlich der baskischen. Die Wetterregeln werden eingehend geprüft, wobei eine belehrende Darstellung der Witterungskunde, sowie des Verlaufes der Witterung in Spanien gegeben wird.

G. M. Vergara, Algunos refranes meteorologicos españoles (Boletin d. l. Soc. Geogr. de Madrid LIII, 1911, S. 502—505).

Vereinigte Staaten von Amerika.

H. H. C. Dunwoody, Weather Proverbs. Washington 1883. 8°. 148 S. (Signal Service Notes No. IX).

Offiziell veranstaltete Sammlung; auf S. 124—127 Wetterregeln der Zuñi-Pueblo-Indianer. Abgedruckt ist die Arbeit von Abercromby und Marriott vom Jahre 1883; vgl. England.

Edward B. Garriott, Weather Folk-Lore and local weather signs. Washington 1903. 8°. 153 S., 20 Karten.

J. D. Haines, Weather Opinions. A book of quotations with interleaves on weather. San Francisco and New York (1907). 8°. Frontispice, (4) Bl., 98, XXIII S., 1 Bl.

Weather Lore of the Sea. (Auf der Rückseite der vom U. S. Weather Bureau herausgegebenen Meteorological Chart of the North Pacific Ocean, May 1911.)

Anhang 2.

Cod. Vind. 10638. kl. 8°. 6 Bl. Papierhandschrift, rot und schwarz.

Bl. 4r:

Etliche gmaine Reglen ſo von den alten | auſz Langwiꝛdigeꝛ eꝛfaꝛung von deꝛ | witteꝛung des Jaꝛs ſollen heꝛkomen | ſein vnd vndeꝛ gmaine man noch | Breichlich ſnd. Vom Lentzen.

1 Wan ein waꝛmeꝛ gelindeꝛ Lentz iſt ſo volgt ein Tꝛuckner vnd warmer ſomeꝛ:

2 Wieuil Taw jm meꝛtzen gefalen ſouil komen Reiffen nach Oſteꝛen | vnd wieuil nebel jm meꝛtzen ſouil blatzꝛegen jm Jaꝛꝛ eꝛfolgen.

3 So es am Palmtag rengnet ſo ſoll ein miſz Jaꝛꝛ eꝛuolgen.

4 Ein ſcheneꝛ Oſtertag macht wolfail butteꝛ vnd teuꝛ fuetteꝛ.

5 Wan es auff Vrbani tag ſchen iſt ſo ſoll guetteꝛ Wein waxen ſo es abeꝛ rengnet das widerſpil.

Bl. 4v: Vom Som̄eꝛ:

1 So es auff Medaꝛde tag ſchen ſey ſol guet keiff koꝛen geben.

2 So es am tag Johanes des taüffers rengnet ſoll es vil frichten ſchedlich ſein.

3 Regnet es auff den tag Maria Haimſuchung ſo ſol es 40 tag altag ein reḡ tuen.

4 Wan es am tag Maria Himelfaꝛt ſchen vnd hell ſey ſo waxe vil guets Weins.

5 Am tag Egidi mit was gewitter der Hirſch in die prunſt tꝛete alſo tꝛete eꝛ wideꝛum herauſz.

Vom Heꝛbſt.

1 Souil tag es vor Michaeli ſchneibt ſouil
ſchne ſollen den winter vber fallen.

2 Die alten ſagen alhailgen wellen auch
ein ſomer haben.

3 Die kelt vnd froſt ſo Clement bꝛingt
bleibt geꝛen den Wintteꝛ vbeꝛ.

Bl. 5r: Vom Wintteꝛ.

1 So deꝛ Criſtag auff einen Sontag
gefelt ſo volgt ein waꝛmeꝛ wintteꝛ mit
ſtaꝛcken winden.

2 Wan die Criſtnacht trieb ſey vnd nit vil
ſteren am Himel geſechen weꝛden ſo
gehe das volget Jar vbeꝛ das Jungvich.

3 So der Criſtag fꝛie ſchen vnd hell iſt
ſo ſoll der wein wolgeraten.

4 Vil moꝛge rötte am newen Jaꝛs tag
ſol vil Kꝛieg bedeüten.

5 Jſts am tag Vintzenti ſchen vnd
ſcheinet die ſon hell ſo ſoll dasſelb
Jar vil vnd gutteꝛ Wein waxen.

6 Der tag ſantt Paulus Bekôꝛung ſole
gar ein Kuꝛ tag ſein nach den alten
4 verſſen
Clara dies Pauli bona Tempora denotat anni
Si fuerint uenti deſingnat proclia Genti
Si fuerint nebulae preunt animalia quaeq;
Si nix cum pluuia deſingnat tempora clara.

Bl. 5v:

7 Wieuil ſtund die ſon ſcheinet am don=
ſtag in der Faſnacht ſouil ſcheint
ſy tag die Faſten vber.

8 So es auff die nacht ſant Petters ſtul=
feir gefreuꝛt ſo gefreuꝛts 40 necht heꝛnach.
Wan die hund in winteꝛs Zeit trabig
ſind ſo volgt geꝛen vnſtet gewiteꝛ.

Finis

.1.5.78.

Über die Lösungen eines Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen, das der Lipschitzschen Bedingung nicht genügt.

Von Hellmuth Kneser
in Göttingen.

(Vorgelegt von Hrn. Schmidt am 17. Mai 1923 [s. oben S. 135].)

Peano[1] erkannte, daß bei einem System gewöhnlicher Differentialgleichungen

$$(1) \qquad y_i' = f_i(x, y_1, \ldots, y_n) = f_i(x, y) \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

schon die Stetigkeit der Funktionen f_i hinreicht, um die Existenz von Lösungen zu sichern, die gegebene Anfangswerte — etwa $y_i(0) = 0$ — annehmen, daß aber diese Lösungen nicht eindeutig bestimmt zu sein brauchen, wenn nicht weitere Bedingungen — etwa die von Lipschitz — erfüllt sind. Im Falle einer einzigen Differentialgleichung ist ziemlich leicht zu sehen, daß die Lösungen jeden Zwischenwert annehmen; d. h. wenn y_1 und y_2 zwei Lösungen mit dem gegebenen Anfangswert sind und $y_1(a) < \eta < y_2(a)$ ist, so gibt es eine Lösung mit demselben Anfangswert, die bei a den Wert η annimmt[2]. Im folgenden beweise ich den Satz über Differentialsysteme, der für $n = 1$ den eben genannten ergibt, nämlich:

Die Gesamtheit der Wertsysteme (y_i), die für $x = a$ von den bei $x = 0$ verschwindenden Lösungen des Systems (1) angenommen werden, ist ein Kontinuum im Raume der y.

Den bloßen Existenzbeweis kann man auf die folgende Weise recht einfach führen. Wir beschränken die Variablen x und y_i zunächst auf ein Gebiet $0 \leq x \leq c$, $|y_i| \leq c$, in dem die Funktionen f_i stetig sind und absolut unter einer Schranke $M (> 1)$ liegen, dann auf ein Gebiet

$$(2) \qquad 0 \leq x \leq a < \frac{c}{M}, \; |y_i| \leq c,$$

teilen die x-Strecke durch die Teilpunkte $x = \frac{\nu a}{r}$ $(\nu = 1, \ldots, r-1)$ und kon-

[1] Math. Ann. **37** (1890), S. 182 f.; vgl. G. Mie, Math. Ann. **43** (1893), S. 553 f.
[2] Siehe W. F. Osgood, Monatsh. f. Math. u. Phys. **9** (1898), S. 331 f.

struieren zu jeder Teilung ein System stetiger, stückweise linearer Funktionen

$$(3) \qquad y_{ir}(0) = 0\,, \quad y_{ir}(x) = y_{ir}\left(\frac{\nu a}{r}\right) + \left(x - \frac{\nu a}{r}\right) f_i\left(\frac{\nu a}{r}\,,\ y_{ir}\left(\frac{\nu a}{r}\right)\right)$$

$$\left(\frac{\nu a}{r} \leqq x \leqq \frac{(\nu+1)a}{r}\right).$$

Diese Funktionen verbleiben in dem Gebiet (2) und haben gleichmäßig beschränkte Differenzenquotienten. Einem allgemeinen Konvergenzsatze zufolge[1] kann man aus dieser unendlichen Folge von Funktionensystemen eine gleichmäßig konvergierende Teilfolge auswählen, und man erhält für die Grenzfunktionen y_i durch Vertauschung der Grenzübergänge

$$\int_0^x f_i(\xi\,,\ y(\xi))\, d\xi = y_i(x)\,,$$

d. h. die Grenzfunktionen befriedigen das System (1).

Um den oben genannten Satz zu beweisen, müssen wir dies Verfahren etwas erweitern. Nicht jede Lösung erhält man nämlich auf diese Art, wie schon das Beispiel $y' = y^{2/3}$ mit der Anfangsbedingung $y = 0$ zeigt. Wohl aber können wir jede Lösung y_i mit Hilfe stetiger, stückweise quadratischer Funktionen annähern: wir setzen

$$(3') \quad y_{ir}(x) = y_{ir}\left(\frac{\nu a}{r}\right) + f_i\left(\frac{\nu a}{r}\,,\ y\left(\frac{\nu a}{r}\right)\right)\left(x - \frac{\nu a}{r}\right) + \alpha_{ir\nu}\left(x - \frac{\nu a}{r}\right)^2 \quad \left(\frac{\nu a}{r} \leqq x \leqq \frac{(\nu+1)a}{r}\right)$$

$$\alpha_{ir\nu} = \frac{r^2}{a^2}\left[y_i\left(\frac{(\nu+1)a}{r}\right) - y_i\left(\frac{\nu a}{r}\right) - \frac{a}{r} f_i\left(\frac{\nu a}{r}\,,\ y\left(\frac{\nu a}{r}\right)\right)\right].$$

Zur Abschätzung der Koeffizienten $\alpha_{ir\nu}$ machen wir von der Stetigkeit der Funktionen f_i Gebrauch. Sie drückt sich aus durch die Ungleichheiten

$$|f_i(x + \theta h\,,\ y_l + \theta_l h) - f_i(x\,,\ y_l)| \leqq L(h) \qquad (|\theta| \leqq 1\,, |\theta_l| \leqq 1)\,,$$

die für alle x und y im Gebiete (2) gelten, und in denen $L(h)$ eine mit h gegen Null konvergierende Funktion ist. Damit ist

$$\alpha_{ir\nu} = \frac{r^2}{a^2} \int_{\frac{\nu a}{r}}^{\frac{(\nu+1)a}{r}} \left\{ f_i(\xi\,,\ y(\xi)) - f_i\left(\frac{\nu a}{r}\,,\ y\left(\frac{\nu a}{r}\right)\right)\right\} d\xi\,,$$

$$(4) \qquad |\alpha_{ir\nu}| \leqq \frac{r^2}{a^2} N\left(\frac{a}{r}\right),$$

wenn

$$N(x) = \int_0^x L(M\xi)\, d\xi$$

[1] Er ist zu einem Teil von Ascoli, Atti della R. Acc. dei Lincei 1885, zum anderen von Osgood l. c.[2] ausgesprochen und bewiesen worden.

gesetzt wird, so daß

$$\lim_{x \to 0} \frac{N(x)}{x} = 0$$

ist. Dann haben wir

$$|y'_{ir}| \leq M + \frac{2a}{r} \cdot \frac{r^2}{a^2} N\left(\frac{a}{r}\right) = M + \frac{2r}{a} N\left(\frac{a}{r}\right).$$

Wählen wir also r so groß, daß

$$2 \frac{r}{a} N\left(\frac{a}{r}\right) \leq \frac{c - Ma}{a}$$

wird, so ist

$$|y'_{ir}| \leq \frac{c}{a}, \quad |y_{ir}| \leq c.$$

Die Annäherungsfunktionen y_{ir} verlassen also das Gebiet (2) nicht und haben gleichmäßig beschränkte Differenzenquotienten. Dies gilt von allen Funktionen (3′), bei denen die Größen $\alpha_{ir\nu}$ den Ungleichungen (4) genügen, sonst aber beliebig gewählt sind. Wählen wir aus einer Folge solcher Funktionensysteme ($r = 1, 2, \ldots$) eine gleichmäßig gegen Grenzfunktionen y_i konvergierende Teilfolge aus, so ist

$$\begin{aligned}
\int_0^x f_i(\xi, y_i(\xi))\, d\xi &= \lim_{r \to \infty} \int_0^x f_i(\xi, y_{ir}(\xi))\, d\xi \\
&= \lim_{r \to \infty} \int_0^{\left[\frac{rx}{a}\right]\frac{a}{r}} f_i(\xi, y_{ir}(\xi))\, d\xi \\
&= \lim_{r \to \infty} \left\{ \frac{a}{r} \sum_{\nu=0}^{\left[\frac{rx}{a}\right]} f_i\left(\frac{\nu a}{r}, y_{ir}\left(\frac{\nu a}{r}\right)\right) + A_r \right\} \\
&= \lim_{r \to \infty} \left\{ y_{ir}\left(\left[\frac{rx}{a}\right]\frac{a}{r}\right) + B_r + A_r \right\} \\
&= \lim_{r \to \infty} \left\{ y_{ir}(x) + C_r + B_r + A_r \right\},
\end{aligned}$$

worin die Größen

$$|A_r| \leq r \int_0^{\frac{a}{r}} L\left(\frac{c}{a}\xi\right) d\xi = a \cdot \frac{Mr}{c} \cdot N\left(\frac{c}{Mr}\right),$$

$$|B_r| \leq \sum_{\nu=0}^{r-1} |\alpha_{ir\nu}| \left(\frac{a}{r}\right)^2 \leq r N\left(\frac{a}{r}\right),$$

$$|C_r| \leq \frac{c}{r}$$

mit wachsendem r gegen Null streben. Also ist

$$\int_0^x f_i(\xi, y_i(\xi))\, d\xi = \lim_{r\to\infty} y_{ir}(x) = y_i(x);$$

die Grenzfunktionen befriedigen das System (1).

Die Gesamtheit der von den bei $x = 0$ verschwindenden Lösungen von (1) bei $x = a$ angenommenen Werte bildet eine abgeschlossene Punktmenge S, wie schon Peano bewies. Wäre sie kein Kontinuum, sondern ließe sie sich in zwei fremde abgeschlossene Mengen Q und R mit positivem Abstand d zerlegen, so definieren wir eine auf S nirgends verschwindende, auf Q positive und auf R negative, stetige Funktion des Punktes P, z. B. durch

$$F(P) = (PR) - (PQ),$$

worin die Klammern Abstände bezeichnen. Auf Q ist nämlich $F \geqq d$, auf R aber $F \leqq -d$. Für genügend großes r gibt es dann Annäherungsfunktionen $\overline{y_{ir}}$ und $\underline{y_{ir}}$, so daß

$$F(\overline{y_{ir}}(a)) > 0, \quad F(\underline{y_{ir}}(a)) < 0$$

ist. Bei veränderlichen $\alpha_{ir\nu}$ hängen aber die Werte $F(y_{ir}(a))$ stetig von diesen ab; daher gibt es bei genügend großem r Annäherungsfunktionen y_{ir}, für die

$$F(y_{ir}(a)) = 0$$

ist. Eine gleichmäßig konvergente Teilfolge definiert eine Lösung y_i von (1), die

$$F(y_i(a)) = 0$$

ergibt; die Funktion F muß doch auf S verschwinden, d. h. S ist ein Kontinuum.

Ausgegeben am 7. August.

SITZUNGSBERICHTE
DER PREUSSISCHEN
AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.
1923

XXI. Sitzung der physikalisch-mathematischen Klasse. 5. Juli.

Vorsitzender Sekretar: Hr. Planck.

*1. Hr. Keibel sprach: »Über die Kiemenbogen, Kiementaschen und Kiemenderivate.«

Groß angelegte Untersuchungen sind durch seine Vertreibung aus Straßburg unterbrochen worden. Die Protokolle sind verlorengegangen, viele Präparate und viel Material sind zugrunde gegangen, so daß sich die Arbeit jetzt nicht weiterführen läßt. Festgestellt konnte bereits werden, daß für Axolotl, Necturus und Alytes die entodermale Anlage nur das Gerüstwerk der Thymusdrüse bildet, die kleinen Rundzellen sind sehr frühzeitig eingewanderte Lymphozyten. Keibel stimmt also in seinen Ergebnissen durchaus mit Hammar und seiner Schule, mit Maximow und Frau Dantschakoff überein, deren auf ausgedehnten Untersuchungen begründete Resultate durch die neuliche Mitteilung von Schridde »Die Zellen der Thymusrinde« (Centralblatt für allg. Pathologie usw. Bd. 33, 1923) seines Erachtens in keiner Weise widerlegt werden.

Er verweist hierfür auch auf die Antwort, welche Hammar auf die Schriddesche Veröffentlichung gegeben hat, und die er vor wenigen Tagen durch die Freundlichkeit des Autors erhielt (J. Aug. Hammar, Zur Frage der Histogenese der Thymusdrüse. Centralblatt f. allg. Pathologie usw. Bd. 33, 1923).

2. Hr. Schmidt legte eine Arbeit des Hrn. Dr. Guido Hoheisel in Breslau vor unter dem Titel: Über das Verhalten einer analytischen Funktion in einer Teilumgebung eines singulären Punktes.

Es wird folgendes sich an den Ideenkreis der bekannten Lindelöf-Phragménschen Sätze schließendes Theorem bewiesen:

Die Funktion $f(z)$ sei innerhalb der positiv imaginären Halbebene regulär und analytisch und einschließlich der reellen Achse stetig. Sie genüge ferner folgenden Größenbeschränkungen:

Für $J(z) > 0$ sei $|f(z)| < \text{Konst. } e^{c|z|}$,

für $J(z) = 0$, $\Re(z) > 0$ sei $|f(z)| < \text{Konst. } e^{\eta_1 z}$,

für $J(z) = 0$, $\Re(z) < 0$ sei $|f(z)| < \text{Konst. } e^{\eta z}$.

Hierbei bedeuten c eine beliebige reelle positive Konstante und η_1 und η beliebige reelle Konstanten, welche nur an die Bedingung $\eta > \eta_1$ gebunden sind.

Dann verschwindet $f(z)$ identisch.

3. Hr. Schmidt legte eine Arbeit des Hrn. Dr. Hammerstein in Berlin vor unter dem Titel: Über die Entwicklung des Kernes linearer Integralgleichungen nach Eigenfunktionen.

Es wird folgender Satz bewiesen: Es bezeichne $K(s, t)$ einen für $0 \leq s \leq 1$ $0 \leq t \leq 1$ stetigen symmetrischen Kern mit den dem absoluten Betrage nach geordneten Eigenwerten λ_ν und dem vollständigen normierten Orthogonalsystem der Eigenfunktionen $\varphi_\nu(s)$.

Es sei ferner für $s_1 \neq s_2$

$$\int_0^1 \left[\frac{K(s_1, t) - K(s_2, t)}{(s_2 - s_1)} \right]^2 dt \leqq c,$$

wo c eine von s_1 und s_2 unabhängige Konstante bedeutet.

Dann konvergiert die Reihe $\sum_\nu \frac{\phi_\nu(s)\,\phi_\nu(t)}{\lambda_\nu}$ für $0 \leqq s \leqq 1$ $0 \leqq t \leqq 1$ gleichmäßig und stellt mithin den Kern dar.

Über das Verhalten einer analytischen Funktion in einer Teilumgebung eines singulären Punktes.

Von Dr. Guido Hoheisel
in Breslau.

(Vorgelegt von Hrn. Schmidt.)

Lindelöf und Phragmén haben folgenden Satz bewiesen, aus dem sich durch konforme Abbildung eine Reihe ähnlicher wichtiger Theoreme ergeben.

Es sei $f(z)$ innerhalb der positiv imaginären Halbebene analytisch und regulär und einschließlich der reellen Achse stetig. $f(z)$ genüge ferner den Bedingungen

a) für $J(z) > 0$ sei $|f(z)| < \text{Const.}\, e^{|z|^k} (k < 1)$

b) für reelle z sei $f(z)$ beschränkt.

Dann ist $f(z)$ in der ganzen positiv imaginären Halbebene beschränkt.

Hier soll nachstehender Satz bewiesen werden: Es sei $f(z)$ innerhalb der positiv imaginären Halbebene analytisch und regulär und einschließlich der reellen Achse stetig. $f(z)$ genüge ferner den Bedingungen

(1) für $J(z) > 0$ sei $|f(z)| < \text{Const.}\, e^{c \cdot J(z)}$. ($c$ beliebig groß, aber fest.)

(2) für reelle positive z sei $f(z)$ beschränkt.

(3) für reelle negative Werte von z sei bei genügend großem Absolutbetrage von z $|f(z)| < e^{\eta z}$. ($\eta > 0$, beliebig klein, aber fest.)

Dann ist

$$f(z) \equiv 0.$$

Beweis: Wir stützen uns auf folgenden Hilfssatz von Schwarz:

Es sei $h(z)$ in einem an das Geradenstück (a, b) von einer Seite angrenzenden Gebiete G analytisch und regulär, einschließlich des Geradenstücks stetig und verschwinde auf diesem. Dann verschwindet $h(z)$ identisch.

Die Cauchysche Integraldarstellung

$$h(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{h(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

gilt nämlich, wie bekannt, auch für eine Randkurve C, wenn die Funktion nur im Innern regulär, aber einschließlich des Randes stetig ist.

Bezeichnet also C eine einfach geschlossene Kontur, die sich aus dem Geradenstück (a, b) und einer die Endpunkte innerhalb G verbindenden Kurve zusammensetzt, so folgt aus dem Verschwinden des Integranden auf dem Geradenstück (a, b), daß $h(z)$ auch dort noch analytisch und regulär bleibt und mithin identisch verschwindet.

Dies vorausgeschickt, setzen wir nun

$$g(z) = \frac{f(z)}{(z+is)^3} \quad (s > 0)$$
$$\phi(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-izt} g(t)\, dt. \tag{4}$$

Dann ist wegen (2) und (3) $\phi(z)$ im Streifen $0 > J(z) > -\eta$ analytisch und regulär und wegen der gleichmäßigen Konvergenz des Integrals auch einschließlich der reellen Achse stetig. Es sei nun z reell und

$$z < -c. \tag{5}$$

Dann ist wegen (1), (4) und (5) für $J(t) > 0$

$$|e^{-izt} g(t)| < \frac{\text{Const.}}{|t|^3}.$$

Aus dieser Ungleichung folgt bei Anwendung des Cauchyschen Integralsatzes auf das von dem in der Halbebene $J(t) \geqq 0$ liegenden Halbkreis $|t| = r$ und seinem Durchmesser begrenzte Gebiet für $r \to \infty$ das Verschwinden von $\phi(z)$ für alle reellen Werte von z, welche $< -c$ sind. Daraus ergibt sich nach dem Schwarzschen Hilfssatz

$$\phi(z) \equiv 0.$$

Insbesondere ist auch

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\, dt = \phi(0) = 0. \tag{6}$$

Setzt man jetzt bei reellem t und τ

$$\bar{g}(t) = \int_{-\infty}^{t} g(\tau)\, d\tau,$$

so gilt offenbar für große negative t

$$|\bar{g}(t)| < \frac{\text{Const.}}{|t|^2}.$$

Aus (6) folgt aber wegen

$$\bar{g}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau)\, d\tau + \int_{\infty}^{t} g(\tau)\, d\tau$$

bei Berücksichtigung von (2) und (4) dieselbe Abschätzung bei großen positiven t.

Somit erfüllt die Funktion $\overline{g}(t)$ die Bedingungen der Darstellbarkeit durch das Fouriersche Integral:

$$2\pi\overline{g}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{izx} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-izt}\overline{g}(t)\,dt\,dz\,.$$

Durch partielle Integration folgt aber bei Berücksichtigung von (4)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-izt}\overline{g}(t)\,dt = \frac{1}{iz}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-izt}g(t)\,dt = \frac{\phi(z)}{iz} \equiv 0\,.$$

Also verschwindet für reelle x $\overline{g}(x)$ und mithin auch $g(x)$. Aus dem Verschwinden von $g(x)$ auf der reellen Achse folgt aber gemäß dem Schwarzschen Hilfsatz das identische Verschwinden von $g(z)$ und damit auch von $f(z)$, was zu beweisen war.

Die Voraussetzungen des Theorems lassen sich nach mehreren Richtungen hin verallgemeinern:

I. Die Bedingung (1) braucht nur erfüllt zu sein auf einer Kurvenschar $\mathfrak{C}_\nu$, welche von Punkten der negativ reellen Halbachse durch die positiv imaginäre Halbebene zu solchen der positiv reellen Achse führen und welche den Bedingungen

$$|L_\nu| < e^{q\rho_\nu}\,; \qquad \rho_\nu \to \infty$$

genügen, wenn L_ν die Länge und ρ_ν die minimale Entfernung vom Nullpunkt bezeichnet. Beim Beweise ist dann nur die Ungleichung (5) durch die Ungleichung $z < -(c+q)$ zu ersetzen.

II. Es kann die Forderung der Beschränktheit von $f(z)$ auf der positiv reellen Achse ersetzt werden durch die Forderung

$$|f(z)| < e^{\eta_1 z}\,(0 < \eta_1 < \eta)\,,$$

denn durch Multiplikation von $f(z)$ mit $e^{-\eta_1 z}$ können wir diesen Fall bei Beachtung der nachstehenden Bemerkung III sofort auf den oben bewiesenen zurückführen.

III. Endlich läßt sich die Bedingung (1) ersetzen durch die Bedingung

$$|f(z)| < e^{c|z|}\,.$$

Zunächst ist nämlich die Funktion

$$f_1(z) = f(z)\cdot e^{ic'z} \qquad (c' > c)$$

auf der positiv reellen und positiv imaginären Achse beschränkt.

Setzt man jetzt

$$z^2 = \xi\,, \qquad f_1(z) = h(\xi)\,,$$

so geht der erste Quadrant von z in die positiv imaginäre Halbebene von ξ über und die Funktion $h(\xi)$ genügt, wie sofort ersichtlich, den Voraussetzungen des zu Anfang zitierten Fundamentalsatzes von Lindelöf, wenn dort $k > \frac{1}{2}$ gewählt wird. Also ist $h(\xi)$ in der ganzen positiv imaginären Halbebene und mithin auch $f_1(z)$ im ganzen ersten Quadranten beschränkt. Ebenso ergibt

sich auch die Beschränktheit von $f_1(z)$ im zweiten Quadranten. Also ist $f_1(z)$ in der ganzen positiv imaginären Halbebene beschränkt und genügt mithin a fortiori der Voraussetzung (1) unseres Theorems. Da die Funktion $f_1(z)$ die Voraussetzungen (2) und (3) ebenso erfüllt wie die Funktion $f(z)$, so ergibt sich

$$f_1(z) = 0$$

und mithin auch

$$f(z) = 0,$$

w. z. b. w.

Durch konforme Abbildung kann man das Theorem für beliebige Winkelräume oder Streifen formulieren. Über die Anwendungen des Theorems, das sich bei Untersuchungen über die Nullstellen analytischer Funktionen sehr nützlich erweist, soll an anderer Stelle gesprochen werden.

Über die Entwickelung des Kernes linearer Integralgleichungen nach Eigenfunktionen.

Von Dr. A. Hammerstein
in Berlin.

(Vorgelegt von Hrn. Schmidt.)

In dieser Note soll der folgende Satz bewiesen werden:

Es bezeichne $K(s,t)$ einen für $0 \leq s \leq 1$, $0 \leq t \leq 1$ stetigen, symmetrischen Kern mit den der absoluten Größe nach geordneten Eigenwerten $\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_\nu, \cdots$, deren unendlich viele vorhanden sein mögen, und dem vollständigen normierten Orthogonalsystem $\phi_1(s), \phi_2(s), \cdots \phi_\nu(s), \cdots$. $K(s,t)$ genüge für $0 \leq s_1 \leq 1$, $0 \leq s_2 \leq 1$; $s_1 \neq s_2$ der Bedingung

$$(1) \qquad \int_0^1 \left[\frac{K(s_1,t) - K(s_2,t)}{s_1 - s_2}\right]^2 dt \leq c,$$

wo c eine von s_1 und s_2 unabhängige Konstante bedeutet. Dann konvergiert die Reihe $\sum_{(\nu)} \frac{\phi_\nu(s)\,\phi_\nu(t)}{\lambda_\nu}$ für $0 \leq s \leq 1$, $0 \leq t \leq 1$ gleichmäßig, und stellt $K(s,t)$ dar.

Beweis: Bekanntlich ist für jedes Paar stückweise stetiger Funktionen $\phi(s)$, $\psi(s)$, die den Nebenbedingungen $\int_0^1 [\phi(s)]^2 ds = 1$, $\int_0^1 [\psi(s)]^2 ds = 1$ genügen,

$$(2) \qquad \left|\int_0^1\int_0^1 K(s,t)\,\phi(s)\,\psi(t)\,ds\,dt\right| \leq \frac{1}{|\lambda_1|}.$$

Sei nun l eine der Ungleichung $0 < l < \frac{1}{2}$ genügende Zahl und σ, τ ein innerhalb oder auf dem Rande des Quadrates $0 \leq s \leq 1$, $0 \leq t \leq 1$ gelegener Punkt. Man wähle zwei Intervalle $\langle s', s''\rangle$, $\langle t', t''\rangle$, deren jedes die Länge l hat derart, daß

$$0 \leq s' \leq \sigma \leq s'' \leq 1 \quad \text{und} \quad 0 \leq t' \leq \tau \leq t'' \leq 1$$

ist. Setzt man jetzt für ganzzahliges $n > 1$

$$K_n(s,t) = K(s,t) - \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\phi_\nu(s)\,\phi_\nu(t)}{\lambda_\nu},$$

so liefert (2) mit $K_n(s,t)$ und

$$\phi(s) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{l}} & \text{für } s' \leqq s \leqq s'' \\ 0 & \text{in dem restlichen Teil des Intervalls } \langle 0, 1 \rangle, \end{cases}$$

$$\psi(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{l}} & \text{für } t' \leqq t \leqq t'' \\ 0 & \text{in dem restlichen Teil des Intervalls } \langle 0, 1 \rangle \end{cases}$$

angewandt:

$$\left| \frac{1}{l} \int_{s'}^{s''}\int_{t'}^{t''} K_n(s,t)\, ds\, dt \right| \leqq \frac{1}{|\lambda_{n+1}|}. \tag{3}$$

Zufolge der Stetigkeit von $K_n(s,t)$ existiert nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung ein Punkt $\bar\sigma, \bar\tau$ des Quadrates $s' \leqq s \leqq s''$, $t' \leqq t \leqq t''$ derart, daß

$$\int_{s'}^{s''}\int_{t'}^{t''} K_n(s,t)\, ds\, dt = l^2 K_n(\bar\sigma, \bar\tau);$$

$$|\bar\sigma - \sigma| \leqq l, \quad |\bar\tau - \tau| \leqq l \tag{4}$$

ist. Zusammen mit (3) ergibt dies

$$\begin{aligned} \left| K_n(\sigma,\tau) \right| &\leqq \frac{1}{l|\lambda_{n+1}|} + \left| K_n(\bar\sigma,\bar\tau) - K_n(\sigma,\tau) \right| \\ &\leqq \frac{1}{l|\lambda_{n+1}|} + \left| K(\bar\sigma,\bar\tau) - K(\sigma,\tau) \right| + \left| \sum_{\nu=1}^{n} \left(\frac{\phi_\nu(\bar\sigma)\,\phi_\nu(\bar\tau)}{\lambda_\nu} - \frac{\phi_\nu(\sigma)\,\phi_\nu(\tau)}{\lambda_\nu} \right) \right|. \end{aligned} \tag{5}$$

Zur Abkürzung werde nun

$$\int_0^1 [K(\bar\sigma, y) - K(\sigma, y)]\, \phi_\nu(y)\, dy = r_\nu(\bar\sigma, \sigma)$$

gesetzt. Dann erhält man

$$\phi_\nu(\bar\sigma) = \phi_\nu(\sigma) + \lambda_\nu r_\nu(\bar\sigma, \sigma); \qquad \phi_\nu(\bar\tau) = \phi_\nu(\tau) + \lambda_\nu r_\nu(\bar\tau, \tau)$$

und

$$\sum_{\nu=1}^{n} \left(\frac{\phi_\nu(\bar\sigma)\,\phi_\nu(\bar\tau)}{\lambda_\nu} - \frac{\phi_\nu(\sigma)\,\phi_\nu(\tau)}{\lambda_\nu} \right) = \sum_{\nu=1}^{n} \phi_\nu(\sigma)\, r_\nu(\bar\tau,\tau) + \sum_{\nu=1}^{n} \phi_\nu(\tau)\, r_\nu(\bar\sigma,\sigma) + \sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu r_\nu(\bar\sigma,\sigma)\, r_\nu(\bar\tau,\tau) \tag{6}$$

Nach der Schwarzschen Ungleichung ist:

$$\left| \sum_{\nu=1}^{n} \phi_\nu(\sigma)\, r_\nu(\bar\tau,\tau) \right| \leqq \left\{ \sum_{\nu=1}^{n} [\phi_\nu(\sigma)]^2 \cdot \sum_{\nu=1}^{n} [r_\nu(\bar\tau,\tau)]^2 \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Ferner liefert die Besselsche Ungleichung, Voraussetzung (1) und (4)

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=1}^{n} [r_\nu(\bar\tau,\tau)]^2 = \sum_{\nu=1}^{n} \left[\int_0^1 (K(\bar\tau,y) - K(\tau,y))\, \phi_\nu(y)\, dy \right]^2 &\leqq \int_0^1 [K(\bar\tau,y) - K(\tau,y)]^2 dy \\ &\leqq c(\bar\tau - \tau)^2 \leqq c l^2. \end{aligned}$$

Also wird

$$(7)\qquad \left|\sum_{\nu=1}^{n}\phi_\nu(\sigma)\,r_\nu(\tau,\tau)\right| \leqq \sqrt{c}\,l\left\{\sum_{\nu=1}^{n}[\phi_\nu(\sigma)]^2\right\}^{\frac{1}{2}}$$

und ebenso

$$(8)\qquad \left|\sum_{\nu=1}^{n}\phi_\nu(\tau)\,r_\nu(\bar\sigma,\sigma)\right| \leqq \sqrt{c}\,l\left\{\sum_{\nu=1}^{n}[\phi_\nu(\tau)]^2\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Außerdem ist

$$(9)\qquad \left|\sum_{\nu=1}^{n}\lambda_\nu r_\nu(\bar\sigma,\sigma)\,r_\nu(\bar\tau,\tau)\right| \leqq |\lambda_n|\left\{\sum_{\nu=1}^{n}[r_\nu(\bar\sigma,\sigma)]^2\sum_{\nu=1}^{n}[r_\nu(\bar\tau,\tau)]^2\right\}^{\frac{1}{2}} \leqq c\,|\lambda_n|\,l^2.$$

Aus (5) ergibt sich demnach in Rücksicht auf (6), (7), (8) und (9)

$$(10)\qquad \begin{aligned} \left|K_n(\sigma,\tau)\right| &\leqq \frac{1}{l\,|\lambda_{n+1}|} + \left|K(\bar\sigma,\bar\tau)-K(\sigma,\tau)\right| \\ &+ \sqrt{c}\,l\left\{\left(\sum_{\nu=1}^{n}[\phi_\nu(\sigma)]^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{\nu=1}^{n}[\phi_\nu(\tau)]^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\} + c\,|\lambda_n|\,l^2. \end{aligned}$$

Man betrachte nun die für $0 \leqq s \leqq 1$ stetige Funktion

$$f_n(s) = \frac{1}{|\lambda_n|}\left(\sum_{\nu=1}^{n}[\phi_\nu(s)]^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

welche in s_n ihren maximalen Wert S_n annehmen möge, so daß also

$$(11)\qquad S_n = f_n(s_n) \geqq f_n(s) > 0 \qquad \text{für } 0 \leqq s \leqq 1$$

ist. Es soll jetzt gezeigt werden, daß die Zahlenfolge S_n mit wachsendem n gegen 0 konvergiert. In der Tat läßt sich bei gegebenem $\varepsilon > 0$ zufolge der gleichmäßigen Konvergenz der Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty}\left[\frac{\phi_\nu(s)}{\lambda_\nu}\right]^2$ ein von s unabhängiges n_1 so bestimmen, daß für $n \geqq n_1$ und $0 \leqq s \leqq 1$

$$\sum_{\nu=n_1}^{n}\left[\frac{\phi_\nu(s)}{\lambda_\nu}\right]^2 < \frac{\varepsilon}{2}$$

wird. Zu diesem n_1 kann ein von s unabhängiges n_2 derart gewählt werden, daß für $n \geqq n_2$ und $0 \leqq s \leqq 1$

$$\frac{1}{|\lambda_n|^2}\sum_{\nu=1}^{n_1}[\phi_\nu(s)]^2 \leqq \frac{\varepsilon}{2}$$

ausfällt. Es ist also für $n > \operatorname{Max}(n_1, n_2)$ und $0 \leqq s \leqq 1$

$$[f_n(s)]^2 \leqq \frac{1}{|\lambda_n|^2}\sum_{\nu=1}^{n_1}[\phi_\nu(s)]^2 + \sum_{\nu=n_1+1}^{n}\left[\frac{\phi_\nu(s)}{\lambda_\nu}\right]^2 < \varepsilon,$$

was mit $s = s_n$ wie behauptet $\lim\limits_{n=\infty} S_n = 0$ nach sich zieht.

Endlich werde durch

$$q_n = \mathrm{Min}\,(S_n^{-\frac{1}{2}},\ |\lambda_n|^{\frac{1}{3}})$$

eine Zahlenfolge definiert, welche offenbar die Eigenschaften

$$(12)\quad \lim_{n=\infty} \frac{q_n}{|\lambda_n|} = 0, \quad \lim_{n=\infty} \frac{1}{q_n} = 0, \quad \lim_{n=\infty} q_n S_n = 0, \quad \lim_{n=\infty} \frac{q_n^2}{|\lambda_n|} = 0$$

besitzt. Da es gemäß der ersten ein n_3 derart gibt, daß für $n \geqq n_3$ die Ungleichung $0 < \frac{q_n}{|\lambda_n|} < \frac{1}{2}$ statthat, kann (10) für alle $n \geqq n_3$ mit $l = \frac{q_n}{|\lambda_n|}$ angewandt werden. Dann ergibt sich, wenn man (11) beachtet,

$$\left| K(\sigma, \tau) - \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\phi_\nu(\sigma)\,\phi_\nu(\tau)}{\lambda_\nu} \right| \leqq \frac{1}{q_n} \left| \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} \right| + \left| K(\bar\sigma, \bar\tau) - K(\sigma, \tau) \right| + 2\sqrt{c}\, q_n S_n + c\,\frac{q_n^2}{|\lambda_n|}.$$

Auf Grund von (12), (4) und dem Satz von der gleichmäßigen Stetigkeit folgt hieraus die Behauptung.

Es sei erwähnt, daß sich der Beweis ganz analog für den unsymmetrischen Kern führen läßt; man erhält so den Satz: $K(s, t)$ sei eine für $0 \leqq s \leqq 1$, $0 \leqq t \leqq 1$ stetige Funktion, die für $0 \leqq s_1 < s_2 \leqq 1$, $0 \leqq t_1 < t_2 \leqq 1$ den Bedingungen

$$\int_0^1 \left[\frac{K(s_1, t) - K(s_2, t)}{s_1 - s_2} \right]^2 dt \leqq c, \qquad \int_0^1 \left[\frac{K(s, t_1) - K(s, t_2)}{t_1 - t_2} \right]^2 ds \leqq c,$$

wo c eine von $s_1, s_2;\ t_1, t_2$ unabhängige Konstante bedeutet, genügt. Dieselbe läßt sich in eine gleichmäßig konvergente Reihe der Gestalt $\sum\limits_{(\nu)} \frac{\phi_\nu(s),\ \psi_\nu(t)}{\lambda_\nu}$ entwickeln, worin λ_ν die Eigenwerte, ϕ_ν, ψ_ν die zugehörigen Paare orthogonaler normierter Eigenfunktionen des unsymmetrischen Kerns $K(s, t)$ im Schmidtschen Sinn[1] durchläuft.

[1] Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen. § 15. (Math. Annalen, Bd. 63.)

Über Potenzreihen, die überkonvergente Abschnittsfolgen besitzen.

Von Dr. Alexander Ostrowski
in Hamburg.

(Vorgelegt von Hrn. Schmidt am 1. März 1923 [s. oben S. 52].)

1. Vor Jahresfrist habe ich in diesen Sitzungsberichten[1] den folgenden Lückensatz bewiesen, den ich damals als eine Verallgemeinerung des Hadamardschen Lückensatzes auffaßte: Besitzt eine Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{\lambda_n}$ mit dem Konvergenzradius 1 unendlich viele Lücken $\lambda_{n_\varkappa} \cdots \lambda_{n_\varkappa+1}$ mit den Quotienten $\frac{\lambda_{n_\varkappa+1}}{\lambda_{n_\varkappa}} > 1 + \vartheta$, $\vartheta > 0$, so konvergiert die Folge der Abschnitte $s_{n_\varkappa}(z)$

$$s_{n_\varkappa}(z) = \sum_{n=0}^{n_\varkappa} a_n z^{\lambda_n}$$

über jeden regulären Punkt des Konvergenzkreises hinaus, und zwar *gleichmäßig* in einem hinreichend kleinen Kreis um einen solchen Punkt[2].

Im Verlauf weiterer Untersuchungen habe ich nun erkannt, daß in dieser Tatsache in Wahrheit die Lösung des ganzen Problems der Überkonvergenz steckt. Es gilt nämlich der Satz I. Besitzt eine Potenzreihe $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ mit dem Konvergenzradius 1 eine Abschnittsfolge $s_{n_\varkappa}(z)$, wo

$$s_m(z) = \sum_{n=0}^{n=m} a_n z^n$$

gesetzt ist, die in einer Umgebung eines regulären Punktes des Konvergenzkreises gleichmäßig konvergiert, so kann man $f(z)$ als Summe zweier Potenzreihen darstellen, von denen die erste einen größeren Konvergenzradius als 1 hat, die zweite aber die Gestalt

[1] Über eine Eigenschaft gewisser Potenzreihen mit unendlich vielen verschwindenden Koeffizienten, diese Sitzber. 1921, Stück XXXIV, pp. 557—565.

[2] Daß es überhaupt Potenzreihen mit überkonvergenten Abschnittsfolgen gibt, hat als erster R. Jentzsch an zwei sehr elegant konstruierten Beispielen gezeigt (Acta math. Bd. **41** [1918]).

hat: $\sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu z^{\lambda_\nu}$, wo für eine Folge der Indizes $\nu_\varkappa$ $\frac{\lambda_{\nu_\varkappa+1}}{\lambda_{\nu_\varkappa}} > 1 + \vartheta$ für ein festes $\vartheta > 0$ und

$$\lambda_{\nu_\varkappa} \leq n_\varkappa < \lambda_{\nu_\varkappa+1}$$

ist[1].

Insbesondere folgt hieraus das überraschende Ergebnis, daß wenn eine Abschnittsfolge in der Umgebung eines regulären Punktes des Konvergenzkreises gleichmäßig konvergiert, dies in einer gewissen Umgebung eines jeden regulären Punktes des Konvergenzkreises gilt.

Haben die Polynome einer Polynomfolge in einer gewissen Umgebung eines Punktes eine gleichmäßig beschränkte Anzahl von Nullstellen, so werden wir sagen, die Polynomfolge habe im betreffenden Punkt die Eigenschaft J. Dann ist nach einem Satz, den ich an einem anderen Orte[2] bewiesen habe, dafür, daß eine Abschnittsfolge von $f(z)$ in der Umgebung eines regulären Punktes des Konvergenzkreises gleichmäßig konvergiert, notwendig und hinreichend, daß sie in diesem Punkt die Eigenschaft J besitzt. Unser Satz I zeigt daher, daß wenn eine Abschnittsfolge in einem regulären Punkt des Konvergenzkreises die Eigenschaft J besitzt, dies für *jeden* regulären Punkt zutrifft.

Die Theorie der Eigenschaft J für Abschnittsfolgen von Potenzreihen ist wesentlich verschieden, je nachdem ob der betreffende Punkt regulär oder singulär ist[3]. Immerhin werden wir beweisen, daß, wenn die Abschnittsfolge $s_{n_\varkappa}(z)$ in irgend einem (regulären oder singulären) Punkt des Konvergenzkreises die Eigenschaft J besitzt, die in Satz I behauptete Zerlegung möglich ist, so daß, wenn $f(z)$ über den Konvergenzkreis hinaus fortsetzbar ist, diese Abschnittsfolge $s_{n_\varkappa}(z)$ die Eigenschaft der Überkonvergenz besitzt.

[1] Den ersten auf dem Gebrauch von ganzen transzendenten Hilfsfunktionen beruhenden Beweis dieses Satzes habe ich am 9. Februar 1921 gefunden und am 10. Februar 1921 im Hamburger Mathem. Kränzchen (für den Fall der Relationen (1), (4)) vorgetragen. Später habe ich noch andere Beweisanordnungen für diesen Satz gefunden, von denen die in dieser Note dargestellte, die ich — für den Fall der Relationen (2), (3) — am 24. Februar 1921 im Hamburger Mathem. Kränzchen vorgetragen habe, wohl die einfachste sein dürfte. Bei anderer Gelegenheit werde ich auch den ersten Beweis dieses Satzes entwickeln, der insofern von Interesse ist, als er auch für gewisse Dirichletsche Reihen noch gilt — für allgemeine Dirichletsche Reihen ist der Satz I nicht mehr richtig, während der oben erwähnte Lückensatz, wie in der zitierten Abhandlung gezeigt wurde, auch für allgemeine Dirichletsche Reihen gilt.

[2] Über vollständige Gebiete gleichmäßiger Konvergenz von Folgen analytischer Funktionen, Hamb. Math. Abh. Bd. I, Heft 3/4, pp. 327—350. Vgl. insbesondere pp. 328, 346. Der dort bewiesene Satz läßt sich, wie ich kürzlich gefunden habe, dahin verschärfen, daß wenn $N(n_\varkappa)$ die Anzahl der in irgendeiner festen Umgebung eines Punktes liegenden Nullstellen von $s_{n_\varkappa}(z)$ ist, kein regulärer Punkt von $f(z)$ mit $N(n_\varkappa) = o(n_\varkappa)$ am Rande des mit dem Einheitskreis zusammenhängenden vollständigen Gebietes gleichmäßiger Konvergenz der $s_{n_\varkappa}(z)$ liegen kann. Ein ähnliches Resultat gilt auch für die Fälle $\mathrm{I}_{1,2}$, $\mathrm{II}_{1,2}$ des Satzes II der zitierten Abhandlung, wenn man die dortigen Voraussetzungen (1), (3) bzw. (4), (6) durch $\lg\lg M_n = o(\lg\lg m_n)$ bzw. $\lg\lg M_n = o(\lg\lg m_n)$ und $\lg\lg M_{n+1} = o(\lg\lg m_n)$ ersetzt; dann kann man beweisen, daß die Anzahl der Nullstellen der $f_n(z)$ in der Umgebung des Punktes P nicht $o(\lg m_n)$ sein kann.

[3] In der Umgebung eines singulären Punktes von $f(z)$ auf dem Konvergenzkreise kann, wie ich in der oben zitierten Abhandlung in den Hamb. Math. Abh. gezeigt habe, die Folge $s_{n_\varkappa}(z)$ sicher nicht nullstellenfrei sein, wenn $\lg n_{\varkappa+1} = o(n_\varkappa)$ ist. Man kann unter der Voraussetzung $\lg n_{\varkappa+1} = O(\lg n_\varkappa)$ sogar beweisen, daß die Relation $N(n_\varkappa) = o(n_\varkappa)$ nicht bestehen kann.

Wir beweisen im Folgenden die nachstehenden Tatsachen, von denen jede den Satz I enthält.

Satz II. Unter den Voraussetzungen des Satzes I gibt es ein $\delta > 0$ und ein $\rho < 1$ derart, daß von einem $\varkappa$ an die Relationen bestehen:

$$(1)\quad |a_n| < \rho^n,\quad (1-\delta)n_\varkappa < n \leqq n_\varkappa;\qquad (2)\quad |a_n| < \rho^n,\quad (1+\delta)n_\varkappa > n > n_\varkappa.$$

Hat aber die Abschnittsfolge $s_{n_\varkappa}(z)$ in einem Punkte des Konvergenzkreises die Eigenschaft J, so besteht (1) für ein $\delta > 0$ und ein $\rho < 1$[1]. Offenbar gestatten diese Tatsachen, das Kriterium aufzustellen: Gibt es eine Folge von verschiedenen Indizes $n_\varkappa$ mit

$$\frac{n_{\varkappa+1}}{n_\varkappa} \rightarrow 1, \qquad \sqrt[n_\varkappa]{|a_{n_\varkappa}|} \rightarrow 1$$

so kann keine Abschnittsfolge von $f(z)$ die Eigenschaft J haben. Jedenfalls kann die Abschnittsfolge $s_{n_\varkappa}(z)$ nicht die Eigenschaft J haben, wenn für eine Folge von Indizes $m_\varkappa \leqq n_\varkappa$

$$\frac{n_\varkappa}{m_\varkappa} \rightarrow 1, \qquad \sqrt[m_\varkappa]{|a_{m_\varkappa}|} \rightarrow 1\,.$$

2. Der Beweis der obigen Tatsachen beruht auf folgenden Überlegungen, die die Theorie der konformen Abbildung und die Majorantenmethode wesentlich benutzen — es erscheint mir sehr bemerkenswert, daß die klassische Majorantenmethode in unserem Falle für eine ganze Folge der Koeffizienten der betrachteten Ausdrücke sehr scharfe Abschätzungen liefert —: Es sei G_i ein einfach zusammenhängendes wenigstens zwei Randpunkte besitzendes Gebiet, das den Nullpunkt im Inneren enthält. Es läßt sich durch

$$u = \phi_i(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots$$

auf einen Kreis $|u| < r$ konform abbilden (die Zahl r heiße der Abbildungsradius von G_i), und $\phi_i(z)$ besitzt eine Majorante $\dfrac{z}{1-\dfrac{cz}{2r}}$, wo man für c eine Zahl > 2 und übrigens, wie aus bekannten Abschätzungen von Hrn. Bieberbach leicht folgt, die absolute Konstante 128 setzen kann[2]. Es sei nun $f(z) = c_n z^n + c_{n+1} z^{n+1} + \cdots$ die Nullpunktsentwicklung einer Funktion, die in G_i regulär und absolut $\leqq 1$ ist. Dann gilt für $n > 1000$ und $\dfrac{k}{n} = \sigma < \dfrac{1}{1000}$

[1] Die Bemerkung, daß unter den Bedingungen des Satzes I für $n = n_\varkappa, n_\varkappa + 1$ die Relationen (1), (2) bestehen, findet sich bei G. Szegö, Fabersche Polynome und nichtfortsetzbare Potenzreihen, Math. Ann. Bd. **87** (1922), pp. 90—111; ich verdanke sie brieflichen Mitteilungen von Hrn. Szegö aus Oktober 1921 und Januar 1922.

[2] Vgl. L. Bieberbach, Math. Zeitschrift Bd. **2**, pp. 161/162. Übrigens ist der Wert von c und die Tatsache, daß c eine absolute von G_i unabhängige Konstante ist, für das Folgende unwesentlich, so daß die Benutzung tiefer liegender Tatsachen der Theorie der konformen Abbildung und der genaue Wert — $\frac{1}{4}$ — der Koebeschen Konstante an dieser Stelle durchaus entbehrlich ist.

$$\sqrt[n+k]{|c_{n+k}|} \leqq \frac{c^\sigma e^{-8\sigma \lg \sigma}}{r} \leqq \frac{e^{-9\sigma \lg \sigma}}{r}\,[1]. \tag{3}$$

Denn geht $f(z)$ durch unsere Abbildung in $\bar{f}(u) = b_n u^n + b_{n+1} u^{n+1} + \cdots$ über, so folgt aus $|\bar{f}(u)| \leqq 1$ für $|u| < r$, daß $|b_m| \leqq r^{-m}$ ist, d. h. unter Benutzung der Poincaréschen Majorantenbezeichnung $\ll$[2], $\bar{f}(u) \ll \dfrac{u^n}{r^n\left(1 - \dfrac{u}{r}\right)}$.

Man erhält daher wegen $c > 2$ als Majorante für $\bar{f}(z) = f(\phi_i(z))$:

$$f(z) \ll \frac{z^n}{r^n} \frac{1}{\left(1 - \dfrac{cz}{2r}\right)^n} \frac{1}{1 - \left(\dfrac{z}{r\left(1 - \dfrac{cz}{2r}\right)}\right)} \ll \frac{z^n}{r^n}\left(1 - \frac{cz}{2r}\right)^{-(n-1)}\left(1 - \frac{cz}{r}\right)^{-1}$$

$$\ll \frac{z^n}{r^n}\left(1 - \frac{cz}{r}\right)^{-n}.$$

Daher folgt nach den Stirlingschen Ungleichungen:

$$\frac{m}{e} < \sqrt[m]{m!} < \frac{m}{e} e^{6\frac{\lg m}{m}} \quad (m \geqq 1):$$

$$|c_{n+k}| \leqq \frac{c^k \binom{n+k}{k}}{r^{n+k}} < \left(\frac{c^{\frac{\sigma}{1+\sigma}}}{r} \frac{1+\sigma}{\sigma^{\frac{\sigma}{1+\sigma}}} e^{6\frac{\lg(n+k)}{n+k}}\right)^{n+k} < \left(\frac{c^\sigma}{r} e^{-8\sigma \lg \sigma}\right)^{n+k},$$

woraus, wegen $128 < 1000 < e^{-\lg \sigma}$, die Abschätzung (3) folgt.

Es sei andererseits G_a ein einfach zusammenhängendes Gebiet, das den unendlich fernen Punkt im Innern enthält, wenigstens zwei Randpunkte hat und den Nullpunkt nicht enthält. Dann läßt es sich durch die analytische Fortsetzung einer für hinreichend große z konvergenten Potenzreihe ins Innere von G_a

$$u = \phi_a(z) = z + a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \cdots$$

auf das Äußere des Kreises $|u| = r$ abbilden, wo r wieder der Abbildungsradius von G_a genannt wird. Da die Potenzreihe

$$\frac{1}{\phi_a(z)} = \frac{1}{z} - \frac{a_0}{z^2} + \cdots = \phi\left(\frac{1}{z}\right)$$

das Innere des aus G_a durch Spiegelung am Einheitskreis und an der reellen

---

[1] Im Falle von Polynomen und für c_n, d. h. für $k = 0$, $\sigma = 0$ findet sich diese Relation bei G. Szegö, a. a. O.

[2] Es sei dabei noch für das Folgende an den Hilfssatz erinnert: Aus $\phi(z) \ll \dfrac{1}{1-z}$, $\phi(0) = 1$ folgt $\dfrac{1}{\phi(z)} \ll \dfrac{1}{1-2z}$, der im Text implizite benutzt wird.

Achse hervorgehenden Gebietes der $\frac{1}{z}$-Ebene auf das Innere des Kreises um den Nullpunkt mit dem Radius $\frac{1}{r}$ abbildet, folgt aus dem oben Gesagten

$$\frac{1}{\phi_a(z)} \ll \frac{1}{z}\left(\frac{1}{1-\frac{cr}{2z}}\right), \quad \frac{\phi_a(z)}{z} \ll \frac{1}{1-\left(\frac{1}{1-\frac{cr}{2z}}-1\right)}; \quad \frac{\phi_a(z)}{r} \ll \frac{\frac{z}{r}}{1-\frac{cr}{z}},$$

wo c wieder < 128 ist. Es sei nun $f(z) = c_n z^n + c_{n-1} z^{n-1} + \cdots + c_0 + \frac{c_{-1}}{z} + \cdots$ ein Polynom in z oder eine für hinreichend große z konvergente und in G_a bis auf den Pol im unendlich fernen Punkt reguläre Potenzreihe, und es sei $\overline{\lim}\,|f(z)|$ bei jeder Annäherung an den Rand von G_a nicht größer als 1. Dann geht $f(z)$ durch unsere Abbildung in $\bar{f}(u) = b_n u^n + \cdots + b_0 + \frac{b_{-1}}{u} + \cdots$ über. Aus $\overline{\lim}\,|\bar{f}(u)| \leqq 1$ bei jeder Annäherung an die Peripherie des Kreises $|u| = r$ folgt aber $|b_m| \leqq r^{-m}$ $(m = n, n-1, \cdots, 0, -1, \cdots)$, so daß $\bar{f}(u)$ die Majorante $\frac{u^n}{r^n}\left(\frac{1}{1-\frac{r}{u}}\right)$ hat. Daher folgt für $f(z)$:

$$f(z) = \bar{f}(\phi_a(z)) \ll \frac{z^n}{r^n}\left(1-\frac{cr}{z}\right)^{-n} \frac{1}{1-\frac{r}{z}\left(\frac{1}{1-\frac{cr}{z}}\right)} \ll \frac{z^n}{r^n}\left(1-\frac{2cr}{z}\right)^{-n}.$$

Nun ergibt aber eine der obigen genau analoge Rechnung für $n > 1000$, $\frac{k}{n} = \sigma < \frac{1}{1000}$ [1]:

$$(4) \quad \sqrt[n-k]{|c_{n-k}|} \leqq \frac{(2c)^{\frac{\sigma}{1-\sigma}}}{r} \sqrt[n-k]{\binom{n+k}{k}} \leqq \frac{(2c)^{\frac{\sigma}{1-\sigma}}}{r} \left(e^{-8\sigma \lg \sigma}\right)^{\frac{1+\sigma}{1-\sigma}} < \frac{(2c)^{\frac{10\sigma}{9}}}{r} e^{-11\sigma \lg \sigma} < \frac{e^{-12\sigma \lg \sigma}}{r}.$$

3. Um nun die Abschätzungen (3), (4) anzuwenden, bezeichne man durch Γ eine rektifizierbare, den Nullpunkt umlaufende JORDANsche Kurve, durch G_i, G_a die beiden durch sie begrenzten Gebiete, r_i, r_a ihre Abbildungsradien (innerer und äußerer Abbildungsradius), durch ω den Flächeninhalt von G_i, durch l die Bogenlänge von Γ. Dann gilt nach BIEBERBACH[2] und FABER[3]:

[1] Für Polynome und c_n, d. h. $k = 0$, $\sigma = 0$ sind diese Ungleichungen in den Untersuchungen von G. FABER über TSCHEBYSCHEFFsche Polynome enthalten, vgl. Crelles Journal, Bd. **150** (1920), pp. 79—106; Münch. Ber., math.-phys. Klasse 1920, p. 55. Vgl. auch G. SZEGÖ, Math. Zeitschrift Bd. **9**, pp. 218—270 und a. a. O.

[2] L. BIEBERBACH, Über die Koeffizienten derjenigen Potenzreihen, welche eine schlichte Abbildung des Einheitskreises vermitteln, diese Sitzungsber. 1916, pp. 946—949, insbesondere p. 943.

[3] G. FABER, Über Potentialtheorie und konforme Abbildung. Münch. Ber., math.-phys. Klasse 1920, p. 49—64, insbesondere p. 56. Es ist vielleicht von Interesse hervorzuheben, daß

$$(a)\quad \sqrt{\frac{\omega}{\pi}} \leq r_a \leq \frac{l}{2\pi}\,, \qquad (i)\quad \sqrt{\frac{\omega'}{\pi}} \leq \frac{1}{r_i} \leq \frac{l'}{2\pi}\,,$$

wenn ω', l' analoge Größen für die aus Γ durch Spiegelung am Einheitskreis entstehende Kurve Γ' bedeuten. Es sei nun $f_\varkappa(z)$ eine Folge von Polynomen mit Gradzahlen $n_\varkappa$

$$(5)\qquad f_\varkappa(z) = \sum_{\nu=0}^{n_\varkappa} a_\nu^{(\varkappa)} z^\nu\,, \quad n_\varkappa \to \infty$$

die in G_i gleichmäßig konvergent oder auch nur gleichmäßig beschränkt ist. Ist die gemeinsame Schranke der Polynome der Folge in G_i, also auch auf Γ etwa M, so folgt durch die Anwendung der Relation (4) auf das Gebiet G_a und das Polynom $f_\varkappa(z)$ von einem $\varkappa$ an:

$$(6)\qquad \sqrt[\nu]{\frac{|a_\nu^{(\varkappa)}|}{M}} < \frac{e^{-12\sigma\lg\sigma}}{r_a}\,, \qquad 0 \leq \sigma = \frac{n_\varkappa - \nu}{n_\varkappa} \leq \frac{1}{1000}\,.$$ [1]

Um dieses Resultat auf die überkonvergente Abschnittsfolge $s_{n_\varkappa}(z)$ anzuwenden, sei γ eine den Nullpunkt umlaufende Jordansche Kurve mit dem Flächeninhalt πr^2, in deren Innerem $s_{n_\varkappa}(z)$ gleichmäßig konvergieren. Man kann dabei offenbar $r > 1$ annehmen. Dann folgt aus (4) die Relation (1), in der man $\rho = \frac{1+\varepsilon}{r}$ mit beliebigem $\varepsilon > 0$ setzen kann, wenn δ hinreichend klein gewählt wird.

Ist über die Folge (5) nur bekannt, daß sie in jedem ganz im Innern von Γ liegenden abgeschlossenen Gebiet gleichmäßig beschränkt ist, so kann man bekanntlich Γ von innen durch geschlossene Jordansche Streckenzüge approximieren, deren entsprechende äußere Abbildungsradien gegen r_a konvergieren[2]. Es folgt dann für jedes $\varepsilon > 0$, unter $M(\varepsilon)$ die gemeinsamen Schranken der Polynome der Folge (5) auf entsprechenden Streckenzügen verstanden:

$$(7)\qquad \overline{\lim_{\varkappa=\infty}} \sqrt[\nu]{\frac{|a_\nu^{(\varkappa)}|}{M(\varepsilon)}} \leq \frac{e^{-12\sigma\lg\sigma}}{r_a - \varepsilon}\,, \quad \overline{\lim_{\varkappa=\infty}} \sqrt[\nu]{|a_\nu^{(\varkappa)}|} \leq \frac{e^{-12\sigma\lg\sigma}}{r_a} \quad 0 \leq \frac{n_\varkappa - \nu}{n_\varkappa} = \sigma \leq \frac{1}{1000}\,.$$

Wir betrachten nun andererseits die Folge von Potenzreihen $r_\varkappa(z) = f(z) - s_{n_\varkappa}(z)$. Man kann nach unseren Annahmen leicht einen geschlossenen Jordanschen Streckenzug Γ finden, dessen innerer Abbildungsradius $r_i > 1$ ist, und in dessen Innerem die Folge der $r_\varkappa(z)$ gleichmäßig gegen 0 konvergiert. Man

---

die Gegenüberstellung der Abschätzungen von Bieberbach und Faber einen neuen Beweis für die isoperimetrische Eigenschaft des Kreises liefert. Die Rektifizierbarkeit von Γ wird übrigens nur dann benutzt, wenn man von Ungleichungen, in denen l, l' vorkommt, Gebrauch macht. Daß zugleich mit Γ stets auch ihr Spiegelbild am Einheitskreis rektifizierbar ist, ist leicht einzusehen. Ist aber Γ nicht rektifizierbar, so ist für ω der äußere Flächeninhalt der Komplementärmenge $G_i + \Gamma$ von G_a zu setzen. — Es sei endlich bemerkt, daß r_i nicht nur von der Gestalt von G_i, sondern auch von der Lage des Nullpunktes abhängig ist, während r_a gegenüber zulässigen Verschiebungen des Nullpunktes invariant ist und nur von der Gestalt von G_a abhängt.

[1] Den Spezialfall $\nu = n_\varkappa$, also $\sigma = 0$ dieser Relation hat unter spezielleren Voraussetzungen über Γ Hr. G. Szegö in einer demnächst in den Gött. Nachr. erscheinenden Arbeit gefunden.

[2] Vgl. C. Carathéodory, Math. Ann. Bd. **72** (1912), pp. 107—144, insbesondere p. 126.

braucht nur dafür zu sorgen, daß $l' < 2\pi$ ausfällt, was offenbar möglich ist. Die Anwendung der Ungleichung (3) liefert dann (2), wo $\rho = \frac{1+\varepsilon}{r_i}$ für jedes $\varepsilon > 0$ gesetzt werden kann für hinreichend kleine δ.

Offenbar gelten auch allgemein für Folgen von Potenzreihen

$$R_\varkappa(z) = \sum_{\nu = n_\varkappa}^{\infty} a_\nu^{(\varkappa)} z^\nu, \qquad n_\varkappa \to \infty$$

die innerhalb einer festen rektifizierbaren JORDANschen Kurve um den Nullpunkt gleichmäßig beschränkte Funktionen darstellen, analoge Abschätzungen wie (6) und (7), was für die Theorie der Approximation von Potenzreihen durch rationale Funktionen von Bedeutung sein dürfte.

4. Wir nehmen nunmehr an, daß die Polynome der Folge $s_{n_\varkappa}(z)$ in einem Kreise $\mathfrak{k}$ um $z = 1$ höchstens l Nullstellen haben, und benutzen den folgenden Hilfssatz von JENTZSCH: Ist eine Folge $s_{n_\varkappa}(z)$ der Abschnitte von $f(z)$ in der Umgebung eines Punktes des Konvergenzkreises nullstellenfrei, so ist $\lim_{\varkappa = \infty} \sqrt[n_\varkappa]{|s_{n_\varkappa}(z)|} = 1$ gleichmäßig auf jeder abgeschlossenen Teilmenge eines Gebiets, das jenen Punkt im Innern enthält, und dessen Inneres und Rand von den Nullstellen der $s_{n_\varkappa}(z)$ frei ist[1].

Man beschreibe nun um $z = 1$ $2l+2$ in $\mathfrak{k}$ liegende Kreise $\mathfrak{k}_1, \cdots, \mathfrak{k}_{2l+2}$. Ist $s_{m_\varkappa}(z)$ die Teilfolge aller in einem der durch sie begrenzten Kreisringe (samt dem Rand) nullstellenfreien $s_{n_\varkappa}(z)$, so ist auf der Mittellinie jenes Kreisrings, daher auch im innersten der Kreise nach dem JENTZSCHschen Hilfssatz gleichmäßig $\sqrt[m_\varkappa]{|s_{m_\varkappa}(z)|} \to 1$; da aber jedes $s_{n_\varkappa}(z)$ in einem der Kreisringe (samt dem Rand) nullstellenfrei ist, folgt gleichmäßig in einer Umgebung von $z = 1$: $\sqrt[n_\varkappa]{|s_{n_\varkappa}(z)|} \to 1$. Daher gibt es einen geschlossenen JORDANschen Streckenzug Γ um $z = 0$ mit dem Flächeninhalt $\pi r^2 > \pi$, so daß $\operatorname{Max}_{z \text{ auf } \Gamma} |s_{n_\varkappa}(z)| = M_\varkappa$ mit $\overline{\lim}_{\varkappa = \infty} \sqrt[n_\varkappa]{M_\varkappa} \leqq 1$. Daher folgt aus (4) für hinreichend kleine $\sigma < \varepsilon$, $\nu > 1000$:

$$\sqrt[n_\varkappa]{\frac{|a_\nu|}{M_\varkappa}} < \frac{e^{-12\sigma \log \sigma}}{r} \left(0 \leqq \sigma = \frac{n_\varkappa - \nu}{n_\varkappa} < \frac{1}{1000}\right), \ \overline{\lim}_{\varkappa = \infty} \sqrt[\nu]{|a_\nu|} \leqq \rho,\ \rho < 1 \left(0 \leqq \sigma = \frac{n_\varkappa - \nu}{n_\varkappa} < \varepsilon\right),$$

womit offenbar auch der letzte Teil des Satzes II bewiesen ist[2]. — Wir bemerken endlich, daß ein analoger Satz auch für allgemeine Polynomenfolgen gilt: Konvergiert die Folge (5) gleichmäßig innerhalb einer JORDANschen Kurve Γ mit dem äußeren Abbildungsradius r_a gegen eine nicht identisch verschwin-

[1] Acta math. Bd. **41** (1918). Unsere Formulierung weicht von der dort p. 262 gegebenen etwas ab. Ihr Beweis ist jedoch mit Hilfe der von JENTZSCH a. a. O. pp. 227—228 angestellten Überlegungen ohne weiteres zu führen.

[2] Dieser Teil läßt sich (vgl. Fußnote 2, S. 186) noch dahin verschärfen, daß bereits aus $N(n_\varkappa) = o(n_\varkappa)$ das Bestehen von (1) folgt. Dasselbe gilt auch für den allgemeinen durch die Relationen (8) ausgedrückten Satz.

dende Funktion, und haben die Polynome (5) in einem Punkt von Γ die Eigenschaft J, so gelten von einem $\varkappa$ an die Relationen

$$(8) \qquad \sqrt[\nu]{|a_\nu^{(\varkappa)}|} < \frac{\rho}{r_a}, \quad 0 \leqq \frac{n_\varkappa - \nu}{n_\varkappa} < \delta$$

für gewisse $\delta > 0$, $\rho < 1$. Der Beweis ist sofort zu führen mit Hilfe einer entsprechenden Verallgemeinerung des oben benutzten Hilfssatzes von Jentzsch, die bis auf geringfügige Modifikationen genau so wie dieser Hilfssatz bewiesen wird, und des folgenden leicht — z. B. mit Hilfe der Relation (a) — beweisbaren Hilfssatzes: Enthält eine Jordansche Kurve Γ das Innere einer Jordanschen Kurve Γ' und einen außerhalb Γ' liegenden Punkt im Innern, so ist der äußere Abbildungsradius von Γ größer als der von Γ'. — Und genau analoge Ungleichungen (8) gelten auch dann, wenn über die Folge (5) nur bekannt ist, daß sie in jedem abgeschlossenen Bereich, der ganz im Innern von Γ liegt, gleichmäßig gegen eine nicht identisch verschwindende Funktion konvergiert.

Hamburg, Mathematisches Seminar der Universität, Oktober 1922.

Ausgegeben am 7. August.

SITZUNGSBERICHTE

DER PREUSSISCHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

1923

XXII. Gesamtsitzung. 12. Juli.

Vorsitzender Sekretar: Hr. Lüders.

1. Hr. F. W. K. Müller sprach über zwei manichäische Bruchstücke in soghdischer Sprache aus den Turfan-Funden. (Ersch. später.)

Das eine in manichäischer Schrift enthält die »Parabel vom Perlen-Bohrer« aus der Vorrede einer älteren Fassung des indischen Fürstenspiegels, die u. a. noch erhalten ist in der alten Ulmer Übersetzung des 15. Jahrhunderts: dem »Buch der Beispiele der alten Weisen«. — Das zweite in soghdischer Schrift enthält eine Predigt, die sich an die »Auditores« wendet. In ihr kommen interessante Anführungen von Widersachern Adams, Zoroasters, Buddhas und Christi vor.

2. Hr. von Harnack überreichte seine Schrift »Neue Studien zu Marcion« (Texte und Untersuchungen hrsg. von A. von Harnack und Carl Schmidt, 44. Band, Heft 4) (Leipzig 1923) sowie die Schrift von Otto Bauernfeind »Der Römerbrieftext des Origenes nach dem Codex von der Goltz (ebendort 44. Band, Heft 3) (Leipzig 1923).

3. Hr. Engler legte das 84. Heft (IV 105) des Werkes »Das Pflanzenreich« vor: O. E. Schulz »*Cruciferae-Brassiceae*, Pars secunda« (Leipzig 1923); Hr. Heider die 46. Lieferung des Werkes »Das Tierreich«: Fr. Nieden »*Amphibia*, Anura I« (Berlin und Leipzig 1923).

4. Das korrespondierende Mitglied Hr. Wilhelm Caland in Utrecht übersandte seine Schrift »Zur Übersetzung der Taittirīyasaṃhitā« (Sonderabdr. aus den Acta Orientalia vol. II).

5. Vorgelegt wurden Monumenta Germania historica, Poetarum latinorum medii aevi tom. IV, pars II 2 (Berolini 1923) und Epistolae selectae tom. II, fasc. II (Berolini 1923).

6. Die Erben des verstorbenen ordentlichen Mitgliedes Hrn. August Dillmann haben der Akademie dessen handschriftlichen Nachlaß, darunter das Handexemplar seines »Lexicon linguae Aethiopicae cum indice latino« (Lipsiae 1865), als Geschenk überwiesen.

7. Das korrespondierende Mitglied Hr. Karl von Amira in München hat am 28. Juni sein fünfzigjähriges Doktorjubiläum gefeiert. Die Akademie hat dem Jubilar eine Adresse gewidmet, die in diesem Stück abgedruckt ist.

Die Akademie hat das ordentliche Mitglied ihrer physikalisch-mathematischen Klasse Hrn. Ernst Beckmann am 12. Juli durch den Tod verloren.

Adresse an Hrn. Karl von Amira zum fünfzigjährigen Doktorjubiläum am 28. Juni 1923.

Hochgeehrter Herr!

Noch ist uns glücklicherweise mit dem Golde der Währung nicht auch das Gold der Wissenschaft entschwunden. Davon legt Ihre Forschung gerade der allerletzten Zeit so beredt Zeugnis ab, daß es der Preußischen Akademie der Wissenschaften, die Sie seit dem Jubiläum von 1900 zu ihren Mitgliedern zählen darf, eine besonders angenehme Pflicht ist, Ihnen zur fünfzigsten Wiederkehr des Tages Ihrer Promotion ihre Grüße zu entbieten und die besten Wünsche auszusprechen. In jeder Hinsicht sind Sie unter den Meistern der deutschen historischen Rechtswissenschaft ein homo tantum sui similis. Zwar ging Ihnen in der Bevorzugung des nordischen Rechts, in dessen Kennerschaft Sie auch außerhalb Deutschlands keiner übertrifft, Ihr Lehrer Konrad Maurer voran, haben Sie in der Führung auf dem weiten Gebiete der vergleichenden germanischen Rechtsgeschichte, wenn man so will, Wilhelm Eduard Wilda als fernen Vorläufer, und sind Sie, indem Sie die Rechtsaltertümer zum ersten Male wieder seit Jacob Grimm in großem Stile bearbeiteten, in gewissem Sinne dessen Erbe. Aber nicht nur stehen Sie in der Vereinigung dieser drei Meisterschaften in einer Person auf einsamer Höhe. Vielmehr haben Sie vor allem jene Wissenszweige samt und sonders aus dem Jugendzustande naiv-divinatorischer Erschließung zu der vollen Mannesreife rein verstandesmäßiger Erkenntnis und streng methodischer Behandlung emporgeführt.

In Ihrem nordgermanischen Obligationenrechte stellten Sie einen bis dahin vernachlässigten Teil des alten skandinavischen, insbesondere auch des altschwedischen Privatrechts erstmals und zugleich erschöpfend dar. Indem Sie dabei das Verhältnis von Schuld und Haftung aufhellten, gaben Sie den Anstoß zu der späteren fruchtbaren Erörterung dieser germanistischen Grundfrage, und zwar nicht bloß für das alte, sondern darüber hinaus auch für das neuere und neueste Recht.

Dank der besonders engen Fühlung, die Sie von jeher mit der Sprachwissenschaft, der deutschen wie der vergleichenden, hatten, übersahen Sie schon in Ihrer berühmten Freiburger Antrittsrede von 1875 über Zweck und Mittel der germanischen Rechtsgeschichte diese in all ihren weiten Verästelungen und konnten Sie alsbald für deren Erforschung ein Programm entwerfen, in dessen Rahmen vermöge der Erweiterung ihres Gesichtskreises auch die deutsche Rechtsgeschichte trotz eines gewissen Zurücktretens neue Förderung

erhoffen durfte. Die Ausführung brachte dann zu einem guten Teile der ebenso ausgezeichnete wie eigenartige Grundriß des germanischen Rechtes, den Sie zu dem Sammelwerke Ihres Freundes Hermann Paul beisteuerten.

Zugleich bildet er den Übergang zu der neuesten Periode Ihres unermüdlichen Schaffens. Sie leiteten Sie ein mit der Veröffentlichung der Dresdener Bilderhandschrift des Sachsenspiegels. Damit und mit der Ausgabe der Bilder zu Wolframs Willehalm haben Sie die Geschichte der Buchillustration, aber auch weite Bereiche des Daseins im Mittelalter erst recht erschlossen. Und außerdem ist mit der Anschauung ein ganz neues Leben in die Wissenschaft der deutschen Rechtsaltertümer gekommen, wie am besten Ihre völliges Neuland anbauenden Untersuchungen über die Handgebärden und über den Stab als Rechtssymbol lehren, vor allem aber Ihr jüngstes Werk über die germanischen Todesstrafen, in dem der Jurist und der Philolog, der Historiker und der Antiquar in Ihnen zusammengewirkt haben, um ein bis zu den indogermanischen Anfängen zurückgreifendes Monumentum aere perennius unserer ältesten Strafrechtsgeschichte zu schaffen.

Wer sich mit vaterländischen Stoffen beschäftigt, leidet heute unter der deutschen Not doppelt, hilft aber auch den Mitlebenden und dem kommenden Geschlecht über sie sich emporheben. Möchte es Ihnen noch lange vergönnt sein, mit berechtigtem Stolz auf das von Ihnen Geleistete zurückzublicken und zugleich als hochragender Führer an dieser geistigen Wiederaufrichtungsarbeit mitzuwirken!

Die Preußische Akademie der Wissenschaften.

Ausgegeben am 7. August.

SITZUNGSBERICHTE
DER PREUSSISCHEN
AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.
1923

XXIII. Sitzung der physikalisch-mathematischen Klasse. 19. Juli.

Vorsitzender Sekretar: Hr. Planck.

*1. Hr. Müller-Breslau sprach über Knickfestigkeit gegliederter Stäbe.

Die vom Vortragenden entwickelten Formeln über exzentrisch gedrückte gegliederte Stäbe werden weiter ausgebaut und erheblich vereinfacht.

2. Hr. Zimmermann legte eine Arbeit vor über »die Formänderungen gekrümmter Stäbe durch Druck«.

Darin wird die Gleichung der Biegelinie auf Druck beanspruchter Stäbe für den Fall abgeleitet, daß die Stäbe schon vor der Belastung nicht ganz gerade sind. Die Integration der zugehörigen Differentialgleichung ist selbst bei einer großen Mannigfaltigkeit solcher Anfangsformen ausführbar; sie liefert geschlossene Formeln, die den Einfluß der Krümmungen sowohl bei achsrechter Belastung, wie auch beim Vorhandensein von Fehlerhebeln erkennen lassen.

3. Hr. Nernst legte eine Mitteilung von Prof. Dr. E. Gehrcke und Dr. E. Lau in Charlottenburg vor: »Das Viellinienspektrum des Wasserstoffs, zweite Mitteilung, mit Zusatz: Das kontinuierliche Spektrum«. (Ersch. später.)

Das Spektrum eines gebremsten Kathodenstrahles in Wasserstoff zeigt eine neue Bande im Blau, die mit den Fulcherbanden Ähnlichkeit besitzt. Gasdruck und Entladungsbedingungen ändern die relative Intensität der Linien. Die Anregungsspannung aller Bandenlinien wird unabhängig von der Wellenlänge gefunden; das gleiche gilt für das kontinuierliche Spektrum.

Die Formänderungen gekrümmter Stäbe durch Druck.

Von H. ZIMMERMANN.

Im zwölften Stück der Sitzungsberichte von 1922 sind die wichtigsten bei Knickversuchen auftretenden Fehlerquellen besprochen. Man kann sie einteilen in solche, die aus der Versuchsführung entspringen, wie zum Beispiel Fehlerhebel und Reibungen, und in solche, die dem Versuchsstab anhaften, wie Ungleichmäßigkeit im Gefüge des Stoffes und Abweichungen der Achse von der geraden Linie. Es ist bei den Knickversuchen des Deutschen Eisenbauverbandes bis zu einem gewissen Grade gelungen, die Fehler der ersten Art zu ermitteln oder herabzumindern. Es hat sich aber auch gezeigt, daß dann die zuerst von ihnen überdeckten Fehler der zweiten Art um so mehr hervortreten. Diese Erfahrungen lassen es wünschenswert und nicht ganz aussichtslos erscheinen, nunmehr auch eine scharfe und allgemeine theoretische Untersuchung des Einflusses der Krümmungen vorzunehmen. Den in der Wirklichkeit obwaltenden Umständen gemäß soll dabei vorausgesetzt werden, daß die Abweichungen der Stabachse von der Geraden nur klein sind und annähernd stetig verlaufen.

I. Die Art der Krümmung.

Alle möglichen Krümmungen durch einen mathematischen Ausdruck wiederzugeben, geht natürlich nicht an. Immerhin wird man die verschiedenen Fälle dadurch mit einiger Wahrscheinlichkeit zusammenfassen können, daß man die Anfangsform der Stabachse als eine durch die Schwerpunkte der Endquerschnitte gehende Wellenlinie mit beliebiger Länge, Höhe und Lage der Wellen gegen die Stabsehne betrachtet.

Wir wählen dafür eine Kosinuslinie mit der Gleichung

$$Y = y_0 \cos \pi \frac{x_m + x}{l}, \tag{1}$$

die die Form der Linie bestimmt und sie zugleich gegen die Stabsehne festlegt. Ihre Wellenlänge ist l, ihre Scheitelhöhe y_0. Die Höhen Y werden also von einer durch die Wendepunkte gelegten X-Achse aus gemessen. Mit x_m ist der Abstand des Fußpunktes der Scheitelhöhe von dem Fußpunkte des von der Mitte der Stabsehne auf die X-Achse gefällten Lotes bezeichnet. Dieser letztere Punkt ist mithin der Nullpunkt der x. Die so erklärte Kosinuslinie wollen wir fernerhin kurz Fehlerlinie, und die X-Achse ihre Hauptachse nennen, zum Unterschied von den anderen Achsen, auf die sie im Laufe der Untersuchung noch bezogen werden muß.

Die Lage der Hauptachse gegen die Sehne eines gegebenen, schwach gekrümmten Stabes ist zunächst nicht bekannt. Wir nehmen aber an, daß beide annähernd gleich gerichtet sind, daß also der Unterschied zwischen der Länge der Stabsehne und ihrer Projektion auf die Hauptachse vernachlässigt werden darf. Dann stellen wir uns die Aufgabe, aus (1) eine auf die Stabsehne bezogene Gleichung für den die Anfangsform der Stabachse bildenden Teil der Fehlerlinie abzuleiten. Das ist deswegen leicht zu machen, weil die Fehlerlinie der Natur der Sache nach durch die Endpunkte 1 und 2 der Stabsehne geht. Bezeichnet man wie in beistehendem Bild 1 die Höhen dieser Punkte

Bild 1. Anfangsform der Stabachse.

gegen die Hauptachse mit Y_1 und Y_2, ferner die laufenden Höhen der Stabsehne gegen dieselbe Achse mit h, so ergibt sich aus (1) für den

Punkt 1 Punkt 2

$$(2) \qquad Y_1 = y_0 \cos \pi \left(\frac{x_m}{l} - \frac{a}{2l}\right); \quad Y_2 = y_0 \cos \pi \left(\frac{x_m}{l} + \frac{a}{2l}\right),$$

und danach die Gleichung der h-Linie:

$$(3) \qquad h = \frac{Y_1 + Y_2}{2} - \frac{Y_1 - Y_2}{a} x .$$

Der an derselben Stelle vorhandene Abstand der Stabachse von der Stabsehne sei η. Dann lautet die Gleichung der Anfangsform der Stabachse bezogen auf die Stabsehne mit deren Mitte als Nullpunkt der x:

$$(4) \qquad \eta = Y - h = y_0 \cos \pi \frac{x_m + x}{l} + \frac{Y_1 - Y_2}{a} x - \frac{Y_1 + Y_2}{2} .$$

Die Y_1 und Y_2 lassen sich hieraus mit Hilfe von (2) entfernen. Es wird

$$(5) \quad \eta = y_0 \left[\cos \pi \frac{x_m + x}{l} + \left(\sin \pi \frac{x_m}{l} \sin \pi \frac{a}{2l}\right) \frac{2x}{a} - \cos \pi \frac{x_m}{l} \cos \pi \frac{a}{2l}\right].$$

Hierin treten außer den Veränderlichen x und η und der Stablänge a nur noch die die Gestalt und Lage der Fehlerlinie bestimmenden festen Werte

y_0, l und x_m auf[1]. Es ist nützlich, sich klarzumachen, welche Rolle sie dabei spielen. Das geschieht am bequemsten, indem man sich die Fehlerlinie in größerer Erstreckung aufgezeichnet und die Stabsehne so eingetragen denkt, daß ihre Endpunkte in die Fehlerlinie fallen. Wird dann die Stabsehne mit diesen Punkten auf der Fehlerlinie verschoben, so ergibt das von ihnen eingeschlossene Stück der Fehlerlinie die zu jeder einzelnen Lage gehörige Anfangsform der Stabachse. Im Bild 2 sind drei solche Lagen dargestellt. In der

Bild 2. Verschiedene Lagen der Stabsehne gegen die Fehlerlinie.

ersten fällt die Stabmitte in die Y-Achse der Fehlerlinie. Es ist $x_m = 0$ und die Stabsehne ist gleichlaufend zur Hauptachse, die Stabform symmetrisch zur Mitte. Wird die Stabsehne nach rechts verschoben, so dreht sie sich gegen die Hauptachse; die Höhen der Fehlerlinie gegen die Stabsehne nehmen links ab und rechts zu, die Stabform wird unsymmetrisch. In welchem Maße, das hängt von der Größe der Verschiebung x_m ab. Wird $x_m = {}^1/_2 l$, so rückt die Mitte der Stabsehne in den Wendepunkt der Fehlerlinie und die Stabform wird gegensymmetrisch. Wächst x noch weiter, so kehrt die Drehung der Stabsehne ihren Sinn um; die Form der Stabachse nähert sich wieder der Symmetrie und erreicht sie bei $x_m = l$. Die Mitte der Stabsehne liegt nun ebensoweit über der Hauptachse, wie sie bei Beginn der Bewegung darunter lag. Sie hat eine Kosinuslinie beschrieben mit derselben

---

[1] Die drei Größen würden sich im Bedarfsfalle aus den in der Stabmitte und in den beiden Viertelpunkten zu messenden Abständen der Stabachse von der Stabsehne berechnen lassen. Bezeichnet man diese Abstände mit η_2, η_m und η_4 und zur Abkürzung ${}^1/_2(Y_1 + Y_2)$ mit Y_m, so ist zunächst

$$Y_m = \frac{\eta_m^2 - {}^1/_2\,(\eta_2 + \eta_4)^2}{-\,3\eta_m + 2\;(\eta_2 + \eta_4)}.$$

Ferner

$$\cos\pi\frac{a}{2l} = \frac{Y_m}{\eta_m + Y_m},$$

wodurch l bestimmt ist. Sodann wird

$$\operatorname{tang}\pi\frac{x_m}{l} = \frac{\eta_2 - \eta_4}{\eta_2 + \eta_4}\;\frac{\cos\pi\frac{a}{4l} - \cos\pi\frac{a}{2l}}{\sin\pi\frac{a}{4l} - {}^1/_2\sin\pi\frac{a}{2l}},$$

woraus sich x_m ergibt. Schließlich ist

$$y_0 = \frac{{}^1/_2\,(\eta_2 + \eta_4)}{\cos\pi\frac{x_m}{l}\left(\cos\pi\frac{a}{4l} - \cos\pi\frac{a}{2l}\right)} = \frac{{}^1/_2\,(\eta_2 - \eta_4)}{\sin\pi\frac{x_m}{l}\left(\sin\pi\frac{a}{4l} - {}^1/_2\sin\pi\frac{a}{2l}\right)}.$$

Hauptachse und denselben Wendepunkten, wie die Fehlerlinie. Ihre Scheitelhöhe h ergibt sich aus der weiterhin folgenden Gleichung (8). Im Bild 2 ist dieser Weg der Stabsehnenmitte gestrichelt angegeben. Nimmt x_m noch weiter zu, so wiederholt sich der ganze Verlauf, jedoch mit entgegengesetztem Ausschlag der Stabsehnenrichtung.

Die den hiermit der Art nach beschriebenen Vorgang der Größe nach bestimmenden Werte ergeben sich aus den oben abgeleiteten Gleichungen. Bei

$$x_m = 0 \tag{6}$$

folgt aus (2)

$$\frac{Y_1 + Y_2}{2} = y_0 \cos \pi \frac{a}{2l}; \quad Y_1 - Y_2 = 0. \tag{7}$$

Die Stabsehne hat also nach (3) überall den gleichen Abstand

$$h = y_0 \cos \pi \frac{a}{2l} \tag{8}$$

von der Hauptachse der Fehlerlinie. Die Gleichung der Anfangsform der Stabachse bezogen auf die Stabsehne wird nach (4)

$$\eta = y_0 \left(\cos \pi \frac{x}{l} - \cos \pi \frac{a}{2l} \right). \tag{9}$$

Mit $x = 0$ ergibt sich hieraus der Abstand der Fehlerlinie von der Stabsehne für die Mitte des Stabes

$$\eta_m = y_0 \left(1 - \cos \pi \frac{a}{2l} \right). \tag{10}$$

Im weiteren Fortgang der geschilderten Verschiebung, also bei

$$x_m > 0$$

gelten die allgemeineren Gleichungen (2) bis (5). Zu ihrer Ergänzung fügen wir nur noch die aus ihnen folgende Gleichung für den Verdrehungswinkel w der Stabsehne gegen die Hauptachse hinzu. Es ist

$$\operatorname{tang} w = -\frac{Y_1 - Y_2}{a} = \frac{2 y_0}{a} \sin \pi \frac{x_m}{l} \sin \pi \frac{a}{2l}. \tag{11}$$

Wir schließen den Abschnitt mit einigen Worten über den Einfluß des Verhältnisses der Wellenlänge l der Fehlerlinie zur Stablänge a bei $x_m = 0$.

Es sei

$$\frac{a}{l} = n. \tag{12}$$

Ist n eine ungerade ganze Zahl, so enthält die Stablänge a ebensoviel Wellen und $n + 1$ sie begrenzende in der Stabsehne liegende Wendepunkte der Fehlerlinie. Ist dagegen n eine gerade ganze Zahl, so enthält die Stablänge zwar ebenfalls n Wellen; die Stabsehne geht aber nicht mehr durch

die Wendepunkte, sondern sie berührt eine um die andere Welle im Scheitel; und zwar findet eine solche Berührung an den Stabenden immer statt. Bei ungeradem n ist der Abstand der Wellenscheitel von der Stabsehne nach (10) überall

$$\eta_m = y_0 .$$

Bei geradem n dagegen ist abwechselnd

$$\eta_m = 0 \quad \text{und} \quad \eta_m = 2 y_0 .$$

Ist n keine ganze Zahl, so ergeben sich Formen, die zwischen den beschriebenen liegen.

Diese Erörterungen könnten vielleicht etwas breit erscheinen. Ich habe geglaubt, sie nicht unterlassen zu sollen, weil die Einschätzung des noch zu entwickelnden Rechnungsverfahrens wesentlich von dem Urteil darüber abhängt, ob die Annahmen bezüglich der Fehlerlinie zu einer näherungsweisen Wiedergabe der in der Wirklichkeit auftretenden Fehler hinreichend erscheinen oder nicht.

II. Die Gleichung der Biegelinie.

Soviel bekannt, sind die Formänderungen gedrückter Stäbe mit Anfangskrümmungen bisher noch nicht allgemein untersucht worden. So erklärt es sich, daß der herkömmliche Begriff der Biegelinie für die vorliegende Untersuchung nicht paßt. Wir müssen also angeben, was wir darunter verstehen wollen, nämlich: die Form, die die Stabachse unter dem Einfluß äußerer Kräfte annimmt. Es ist das nicht die Linie, die man erhält, wenn man die elastischen Ausbiegungen aller Punkte der Stabachse von einer Geraden aus aufträgt. Eine solche Linie würde beim Wegfall der äußeren Kräfte in jene Gerade übergehen. Die hier als Biegelinie bezeichnete Kurve dagegen ergibt beim Verschwinden der Kräfte die Anfangsform der Stabachse, also die Fehlerlinie.

Der Stab, dessen gekrümmte Anfangsform durch (4) oder (5) gegeben ist, werde nun an den Enden 1 und 2 mit den an den Fehlerhebeln f_1 und f_2 angreifenden Kräften S auf Druck belastet. Wir betrachten f_1 und f_2 als positiv, wenn sie so liegen, daß S die Anfangskrümmung vergrößert, oder genauer ausgedrückt den Krümmungshalbmesser ρ_0 verkleinert. Ist der Stab im unbelasteten Zustande — wie wir voraussetzen — nur wenig gekrümmt, und ist auch die Zunahme der Krümmung nur gering, so steht das dadurch hervorgerufene Moment der inneren Kräfte in geradem Verhältnis zur Änderung des Wertes $1 : \rho_0$. Für den Anfangszustand ist

$$\frac{1}{\rho_0} = \frac{d^2 \eta}{dx^2} ,$$

nach der Belastung

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d^2 y}{dx^2} ,$$

wenn y die Höhe des betreffenden Punktes der Stabachse gegen eine noch zu bestimmende X-Achse bedeutet. Daraus ergibt sich das Moment M' der inneren Kräfte bei der üblichen Wahl des Vorzeichens

$$M' = -EJ\left(\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{d^2\eta}{dx^2}\right). \tag{13}$$

Wird nun als X-Achse die Wirklinie der Stabkraft S, also eine durch die Endpunkte der Fehlerhebel gehende Gerade gewählt, so ist das Moment M'' der äußeren Kräfte

$$M'' = Sy. \tag{14}$$

Im Gleichgewichtszustande muß $M' = M''$ sein. Damit ergibt sich nach Ableitung von $d^2\eta : dx^2$ aus (4) oder (5) die Differentialgleichung der Biegelinie:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{S}{EJ}y = -y_0\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \cos\pi\frac{x_m + x}{l}. \tag{15}$$

Diese Gleichung ist integrierbar. Wir gehen auf die etwas weitläufigen Rechnungen nicht ein, sondern setzen alsbald die Gleichung der Biegelinie in endlicher Form hierher:

$$y = A_1 \sin\frac{x}{L} + A_2\cos\frac{x}{L} + \frac{\pi^2}{\pi^2 - \left(\frac{l}{L}\right)^2} y_0 \cos\pi\frac{x_m + x}{l}\,[1]. \tag{16}$$

Die zur Abkürzung eingeführte Größe L — eine Länge — ist durch die Gleichung

$$L = \sqrt{\frac{EJ}{S}} \tag{17}$$

bestimmt.

Es bleiben noch die Integrationsfestwerte A_1 und A_2 zu ermitteln. Da die X-Achse durch die Endpunkte der Fehlerhebel gelegt ist, muß sich y an den Stabenden gleich diesen Hebeln ergeben. So folgt mit $x = -{}^1/_2 a$ und $x = +{}^1/_2 a$ — d. h. bei Wahl der Stabsehnenmitte als Nullpunkt der x — aus (16):

$$\left\{\begin{aligned} A_1 &= \left[\frac{f_2 - f_1}{2} + \frac{\pi^2}{\pi^2 - \left(\frac{l}{L}\right)^2} y_0 \sin\pi\frac{x_m}{l}\sin\pi\frac{a}{2l}\right] : \sin\frac{a}{2L}; \\ A_2 &= \left[\frac{f_2 + f_1}{2} - \frac{\pi^2}{\pi^2 - \left(\frac{l}{L}\right)^2} y_0 \cos\pi\frac{x_m}{l}\cos\pi\frac{a}{2l}\right] : \cos\frac{a}{2L}. \end{aligned}\right. \tag{18}$$

[1] Von der Richtigkeit überzeugt sich der Leser am einfachsten durch Differenzieren.

Der eigenartige Ausdruck vor dem dritten Gliede von (16) und den zweiten Gliedern von (18) verdient eine nähere Betrachtung. Teilt man Zähler und Nenner mit π^2, und setzt man für L seinen Wert aus (17), so wird

$$\text{(19)} \qquad \frac{\pi^2}{\pi^2 - \left(\frac{l}{L}\right)^2} = \frac{1}{1 - \frac{Sl^2}{\pi^2 EJ}} = \frac{1}{1 - \frac{S}{K_l}},$$

wenn unter

$$\text{(20)} \qquad K_l = \frac{\pi^2 EJ}{l^2}$$

diejenige Kraft verstanden wird, die einen geraden Stab von einer Länge gleich der Wellenlänge l der Fehlerlinie und mit einem Querschnitt gleich dem des gegebenen Stabes bei freier Drehbarkeit der Enden und achsrechtem Angriff an die Knickgrenze bringen würde. Wir wollen den Ausdruck fernerhin in dieser dem Verständnis näher liegenden Form anwenden.

Schreiben wir noch zur Vereinfachung

$$\frac{x}{L} = \xi \text{ und } \frac{a}{L} = \alpha,$$

so erhalten wir die vollständige Gleichung der Biegelinie wie folgt:

$$\text{(21)} \qquad \begin{aligned} y = &\left[\frac{f_2 - f_1}{2} + \frac{y_0}{1 - \frac{S}{K_l}} \sin \pi \frac{x_m}{l} \sin \pi \frac{a}{2l}\right] \frac{\sin \xi}{\sin \frac{\alpha}{2}} \\ &+ \left[\frac{f_2 + f_1}{2} - \frac{y_0}{1 - \frac{S}{K_l}} \cos \pi \frac{x_m}{l} \cos \pi \frac{a}{2l}\right] \frac{\cos \xi}{\cos \frac{\alpha}{2}} \\ &+ \frac{y_0}{1 - \frac{S}{K_l}} \cos \pi \left(\frac{x_m}{l} + \frac{x}{l}\right). \end{aligned}$$

Setzen wir hierin zur Probe

$$S = 0,$$

so muß die Gleichung der Fehlerlinie erscheinen, aber bezogen auf eine durch die Endpunkte der Fehlerhebel gehende X-Achse. Die Umrechnung auf die Hauptachse der Fehlerlinie ließe sich zwar leicht in bekannter Weise ausführen. Es lohnt aber nicht, darauf einzugehen. Wenn $S = 0$ ist, haben die Fehlerhebel keine Bedeutung mehr; wir können sie also gleich Null setzen. Dann müssen wir die auf die Stabsehne bezogene Gleichung der Fehlerlinie erhalten.

Mit $S = 0$ wird

$$\frac{\sin \xi}{\sin \frac{\alpha}{2}} = \frac{2x}{a} \text{ und } \frac{\cos \xi}{\cos \frac{\alpha}{2}} = 1.$$

Setzt man diese Werte in (21) ein und $f_1 = f_2 = 0$, so ergibt sich für y in der Tat derselbe Ausdruck, wie für η nach Gleichung (5). Die Gleichung (21)

entspricht mithin dem Begriff der Biegelinie, wie wir ihn im Eingange dieses Abschnittes aufgestellt haben. Sie ist aber für manche Zwecke noch nicht ganz geeignet, weil man Abstände der Stabachse von der Wirklinie der Kräfte S nicht gut messen kann. Deshalb empfiehlt es sich, aus (21) die entsprechende, auf die Stabsehne bezogene Gleichung der Biegelinie abzuleiten.

Es sei f der Abstand eines beliebigen Punktes (x, f) der Stabsehne von der Wirklinie der S. Dann ist die Gleichung der Sehne, bezogen auf die Wirklinie, offenbar

$$f = \frac{f_1 + f_2}{2} - \frac{f_1 - f_2}{a} x. \tag{22}$$

Zieht man diese Gleichung von (21) ab, so stellt $y - f$ die von der Stabsehne aus gemessene Höhe des zu x gehörigen Punktes der Biegelinie dar. Die Größe $y - f$ enthält noch den zu demselben Punkte gehörigen Abstand der Fehlerlinie von der Stabsehne. In der Regel wird man nur die elastische Formänderung messen können. Um diese auch zu berechnen, muß der Anfangsfehler η, wie er sich aus (4) oder (5) ergibt, von $y - f$ abgezogen werden. So gelangt man endlich zu einer Formel für die elastische Ausbiegung δ eines beliebigen Punktes der Stabachse:

$$\begin{aligned} \delta &= y - f - \eta \qquad (23) \\ &= \frac{f_2 - f_1}{2}\left(\frac{\sin \xi}{\sin \frac{\alpha}{2}} - \frac{2x}{a}\right) + y_0 \left[\frac{1}{1 - \frac{S}{K_l}} \frac{\sin \xi}{\sin \frac{\alpha}{2}} - \frac{2x}{a}\right] \sin \pi \frac{x_m}{l} \sin \pi \frac{a}{2l} \\ &+ \frac{f_2 + f_1}{2}\left(\frac{\cos \xi}{\cos \frac{\alpha}{2}} - 1\right) - y_0 \left[\frac{1}{1 - \frac{S}{K_l}} \frac{\cos \xi}{\cos \frac{\alpha}{2}} - 1\right] \cos \pi \frac{x_m}{l} \cos \pi \frac{a}{2l} \\ &+ y_0 \left[\frac{1}{1 - \frac{S}{K_l}} - 1\right] \cos \pi \left(\frac{x_m}{l} + \frac{x}{l}\right). \end{aligned}$$

Die Anwendung dieser Formeln bedarf noch weiteren Studiums. Ich hoffe an anderer Stelle darauf zurückkommen zu können. Je nach dem erstrebten Zweck wird man (21) oder (23) benutzen. Handelt es sich etwa um die Berechnung der Spannungen in den Stabquerschnitten, so ergibt (14) mit Einsetzen von y aus (21) das dazu nötige Biegungsmoment. Einige ganz einfache Fälle mögen als Beispiel dienen.

Die Fehlerhebel seien Null, die Stabform symmetrisch mit

$$x_m = 0.$$

Die Wellenlänge l der Fehlerlinie sei gleich der Stablänge a. Dann verschwinden die beiden ersten Zeilen von (21) und es bleibt nur übrig

$$y = \frac{y_0}{1 - \frac{S}{K_a}} \cos \pi \frac{x}{a}. \tag{24}$$

Die Biegelinie ist also eine einfache Kosinuslinie, die aus der Fehlerlinie hervorgeht, wenn man deren Höhen im Verhältnis von 1 zu $1 - S:K_a$ vergrößert. Für die Stabmitte wird

$$(25) \qquad y_m = \frac{y_0}{1 - \frac{S}{K_a}} = y_0 \frac{\frac{K_a}{S}}{\frac{K_a}{S} - 1}.$$

Dies Ergebnis ist bekannt[1].

Es sei nun weiter

$$x_m = \frac{l}{2}$$

und die Wellenlänge l der Fehlerlinie gleich der Hälfte der Stablänge a. Die Stabachse ist jetzt vor der Belastung eine Sinuslinie mit Wendepunkten in der Mitte und an den Enden, also S-förmig gekrümmt. In (21) verschwinden wieder die beiden ersten Zeilen und es bleibt

$$(26) \qquad y = \frac{y_0}{1 - \frac{S}{K_l}} \cos \pi \left(\frac{1}{2} + \frac{x}{l} \right) = - \frac{y_0}{1 - \frac{S}{K_l}} \sin \pi \frac{x}{l}.$$

Die Biegelinie ist jetzt eine einfache Sinuslinie, die zur Fehlerlinie in demselben Verhältnis steht, wie im vorhergehenden Falle die Kosinuslinie. Dies Ergebnis ist noch nicht bekannt. Für die Stabmitte wird im allgemeinen $y_m = 0$. Ist aber die Stabkraft

$$(27) \qquad S = K_l = \frac{\pi^2 EJ}{l^2} = 4\pi^2 \frac{EJ}{a^2},$$

so erscheint y_m in der unbestimmten Form

$$y_m = \frac{0}{0}.$$

Es tritt Knicken ein. Die Tragkraft des Stabes wird also durch die S-förmige Anfangskrümmung gegen den EULER-Wert auf das Vierfache erhöht. Voraussetzung ist dabei natürlich, daß die angegebenen Bedingungen mathemathisch genau erfüllt sind und daß y_0 verschwindend klein ist. Der Stab befindet sich dann aber in unsicherem Gleichgewicht.

[1] Es findet sich bei ELWITZ in dessen Lehre von der Knickfestigkeit auf Seite 117 als Gleichung (3).

Ausgegeben am 7. August.

Berlin, gedruckt in der Reichsdruckerei

1923 XXIV

SITZUNGSBERICHTE

DER PREUSSISCHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

Physikalisch-mathematische Klasse

MIT TAFEL I—III

BERLIN 1923

VERLAG DER AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

IN KOMMISSION BEI WALTER DE GRUYTER U. CO.

Aus dem Reglement für die Redaktion der akademischen Druckschriften

Aus § 1.

Die Akademie gibt gemäß § 41, 1 der Statuten zwei fortlaufende Veröffentlichungen heraus: »Sitzungsberichte der Preußischen Akademie der Wissenschaften« und »Abhandlungen der Preußischen Akademie der Wissenschaften«.

Aus § 2.

Jede zur Aufnahme in die Sitzungsberichte oder die Abhandlungen bestimmte Mitteilung muß in einer akademischen Sitzung vorgelegt werden, wobei in der Regel das druckfertige Manuskript zugleich einzuliefern ist. Nichtmitglieder haben hierzu die Vermittelung eines ihrem Fache angehörenden ordentlichen Mitgliedes zu benutzen.

§ 3.

Der Umfang einer aufzunehmenden Mitteilung soll in der Regel in den Sitzungsberichten bei Mitgliedern 32, bei Nichtmitgliedern 8 Seiten in der gewöhnlichen Schrift der Sitzungsberichte, in den Abhandlungen 12 Druckbogen von je 8 Seiten in der gewöhnlichen Schrift der Abhandlungen nicht übersteigen.

Überschreitung dieser Grenzen ist nur mit Zustimmung der Gesamtakademie oder der betreffenden Klasse statthaft und ist bei Vorlage der Mitteilung ausdrücklich zu beantragen. Läßt der Umfang eines Manuskripts vermuten, daß diese Zustimmung erforderlich sein werde, so hat das vorlegende Mitglied es vor dem Einreichen von sachkundiger Seite auf seinen mutmaßlichen Umfang im Druck abschätzen zu lassen.

§ 4.

Sollen einer Mitteilung Abbildungen im Text oder auf besonderen Tafeln beigegeben werden, so sind die Vorlagen dafür (Zeichnungen, photographische Originalaufnahmen usw.) gleichzeitig mit dem Manuskript, jedoch auf getrennten Blättern, einzureichen.

Die Kosten der Herstellung der Vorlagen haben in der Regel die Verfasser zu tragen. Sind diese Kosten aber auf einen erheblichen Betrag zu veranschlagen, so kann die Akademie dazu eine Bewilligung beschließen. Ein darauf gerichteter Antrag ist vor der Herstellung der betreffenden Vorlagen mit dem schriftlichen Kostenanschlage eines Sachverständigen an den vorsitzenden Sekretar zu richten, dann zunächst im Sekretariat vorzuberaten und weiter in der Gesamtakademie zu verhandeln.

Die Kosten der Vervielfältigung übernimmt die Akademie. Über die voraussichtliche Höhe dieser Kosten ist — wenn es sich nicht um wenige einfache Textfiguren handelt — der Kostenanschlag eines Sachverständigen beizufügen. Überschreitet dieser Anschlag für die erforderliche Auflage 200000 M., so ist Vorberatung durch das Sekretariat geboten.

Aus § 5.

Nach der Vorlegung und Einreichung des **vollständigen druckfertigen** Manuskripts an den zuständigen Sekretar oder an den Archivar wird über Aufnahme der Mitteilung in die akademischen Schriften, und zwar, wenn eines der anwesenden Mitglieder es verlangt, verdeckt abgestimmt.

Mitteilungen von Verfassern, welche nicht Mitglieder der Akademie sind, sollen der Regel nach nur in die Sitzungsberichte aufgenommen werden. Beschließt eine Klasse die Aufnahme der Mitteilung eines Nichtmitgliedes in die Abhandlungen, so bedarf dieser Beschluß der Bestätigung durch die Gesamtakademie.

Aus § 6.

Die an die Druckerei abzuliefernden Manuskripte müssen, wenn es sich nicht bloß um glatten Text handelt, ausreichende Anweisungen für die Anordnung des Satzes und die Wahl der Schriften enthalten. Bei Einsendungen Fremder sind diese Anweisungen von dem vorlegenden Mitgliede vor Einreichung des Manuskripts vorzunehmen. Dasselbe hat sich zu vergewissern, daß der Verfasser seine Mitteilung als vollkommen druckreif ansieht.

Die erste Korrektur ihrer Mitteilungen besorgen die Verfasser. Fremde haben diese erste Korrektur an das vorlegende Mitglied einzusenden. Die Korrektur soll nach Möglichkeit nicht über die Berichtigung von Druckfehlern und leichten Schreibversehen hinausgehen. Umfängliche Korrekturen Fremder bedürfen der Genehmigung des redigierenden Sekretars vor der Einsendung an die Druckerei, und die Verfasser sind zur Tragung der entstehenden Mehrkosten verpflichtet. Übersteigen die Kosten der Korrektur einen gewissen Prozentsatz der Satzkosten, so fallen die Mehrkosten den Verfassern selbst ganz oder teilweise zur Last.

Aus § 8.

Von allen in die Sitzungsberichte oder Abhandlungen aufgenommenen wissenschaftlichen Mitteilungen, Reden, Adressen oder Berichten werden für die Verfasser, von wissenschaftlichen Mitteilungen, wenn deren Umfang im Druck 4 Seiten übersteigt, auch für den Buchhandel Sonderabdrucke hergestellt, die alsbald nach Erscheinen ausgegeben werden.

Von Gedächtnisreden werden ebenfalls Sonderabdrucke für den Buchhandel hergestellt, indes nur dann, wenn die Verfasser sich ausdrücklich damit einverstanden erklären.

§ 9.

Von den Sonderabdrucken aus den Sitzungsberichten erhält ein Verfasser, welcher Mitglied der Akademie ist, zu unentgeltlicher Verteilung ohne weiteres 50 Freiexemplare; er ist indes berechtigt, zu gleichem Zwecke auf Kosten der Akademie weitere Exemplare bis zur Zahl von noch 100 und auf seine Kosten noch weitere bis zur Zahl von 200 (im ganzen also 350) abziehen zu lassen, sofern er dies rechtzeitig dem redigierenden Sekretar angezeigt hat; wünscht er auf seine Kosten noch mehr Abdrucke zur Verteilung zu erhalten, so bedarf es dazu der Genehmigung der Gesamtakademie oder der betreffenden Klasse. — Nichtmitglieder erhalten 50 Freiexemplare und dürfen nach rechtzeitiger Anzeige bei dem redigierenden Sekretar weitere 200 Exemplare auf ihre Kosten abziehen lassen.

Von den Sonderabdrucken aus den Abhandlungen erhält ein Verfasser, welcher Mitglied der Akademie ist, zu unentgeltlicher Verteilung ohne weiteres 30 Freiexemplare; er ist indes berechtigt, zu gleichem Zwecke auf Kosten der Akademie weitere Exemplare bis zur Zahl von noch 100 und auf seine Kosten noch weitere bis zur Zahl von 100 (im ganzen also 230) abziehen zu lassen, sofern er dies rechtzeitig dem redigierenden Sekretar angezeigt hat; wünscht er auf seine Kosten noch mehr Abdrucke zur Verteilung zu erhalten, so bedarf es dazu der Genehmigung der Gesamtakademie oder der betreffenden Klasse. — Nichtmitglieder erhalten 30 Freiexemplare und dürfen nach rechtzeitiger Anzeige bei dem redigierenden Sekretar weitere 100 Exemplare auf ihre Kosten abziehen lassen.

(Fortsetzung auf S. 3 des Umschlags.)

SITZUNGSBERICHTE

DER PREUSSISCHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

1923

XXIV. Gesamtsitzung. 26. Juli.

Vorsitzender Sekretar: Hr. Lüders.

1. Hr. Johnsen sprach über die Anwendung einer kinematischen Betrachtungsweise auf eutektische Kristallisation und auf die Bildung der sog. Carlsbader Feldspatzwillinge.

Die Wachstumsgeschwindigkeiten zweier verschiedenartiger, gleichaltriger Kristalle können zur Folge haben, daß das langsamer wachsende von dem andern völlig umschlossen wird und eine scheinbare Automorfie annimmt. Die komplizierte Verwachsungsfläche der Carlsbader Zwillinge erklärt sich aus einer Änderung der einzelnen Flächengeschwindigkeiten während der magmatischen Kristallisation.

2. Hr. Schur legte eine Mitteilung des Hrn. Prof. Dr. H. Rademacher in Hamburg vor: Über die Anwendung der Viggo Brunschen Methode auf die Theorie der algebraischen Zahlkörper.

Hr. Viggo Brun hat bewiesen, daß jede hinreichend große gerade Zahl sich als Summe zweier Zahlen darstellen läßt, deren jede höchstens neun Primfaktoren enthält. Der Verfasser zeigt, daß ein ähnlicher Satz auch für gewisse, den geraden Zahlen analoge Zahlen eines algebraischen Zahlkörpers gilt.

3. Hr. Wilcken überreichte die 2. Lieferung des I. Bandes der von ihm herausgegebenen »Urkunden der Ptolemäerzeit« (Berlin und Leipzig 1923).

4. Hr. Goldschmidt überreichte das in Verbindung mit ihm und anderen von Paul Clemen herausgegebene Werk über »Belgische Kunstdenkmäler«, 2 Bände (München 1923).

5. Das korrespondierende Mitglied Hr. Felix Klein in Göttingen übersandte den 3. Band seiner »Gesammelten mathematischen Abhandlungen« (Berlin 1923).

6. Vorgelegt wurde, als Geschenk der Diltheyschen Erben, »Wilhelm Diltheys Gesammelte Schriften«, I. Band (2. Auflage) und II. Band (3. Auflage) (Leipzig und Berlin 1923).

Zur Kinematik der eutektischen Kristallisation.

Von A. Johnsen.

Nach Nikolaus Steno[1] ist ein Mineralindividuum, das in einem anderen eingeschlossen ist, älter als dieses. Später hat man Stenos Satz auf partielle Umschließungen ausgedehnt und von zwei miteinander verwachsenen Mineralien dasjenige für jünger erklärt, das längs der Verwachsungsfläche einspringende Winkel aufweist; die ausspringenden Winkel des zweiten Individuums betrachtete man stillschweigend als seine normale Kristalltracht und nannte dieses Individuum »automorph«, während das andre als »xenomorph« bezeichnet wurde[2]. Diese Auffassungen sind nicht allgemeingültig. Durch Zersetzung wie durch Entmischung und auch durch allotrope Umwandlung können sekundäre Kristallisationen in einem Kristall auftreten; auch vermögen Fremdstoffe hineinzudiffundieren wie z. B. nach den Versuchen von F. Grandjean[3] Jod bei + 300° C. in entwässerten Chabasit, der hierdurch pleochroïtisch wird.

Auch abgesehen von solchen sekundären Vorgängen stimmt der Satz von Steno nicht immer. Freilich, wenn die Kristallisationsbahn die Grenze zweier Ausscheidungsfelder durchschneidet und somit ein Mineralindividuum wächst, nachdem ein andersartiges zu wachsen aufgehört hat, dann kann dieses von jenem umschlossen werden. Fallen aber die beiden Wachstumszeiten teilweise oder ganz zusammen, dann entscheiden die Wachstumsgeschwindigkeiten über die Art der gegenseitigen Abgrenzung.

Scheiden sich aus einem flüssigen Gemisch zwei Kristallarten mit den Massen m_1 und m_2 und den Dichten ρ_1 und ρ_2 ab und liefern sie auf Grund ihres »spontanen Kristallisationsvermögens«[4] z_1 und z_2 Individuen, so ist deren durchschnittliche Größe gleich v_1 und v_2, wo

$$(1) \qquad v_1 = \frac{m_1}{\rho_1 \cdot z_1} \text{ und } v_2 = \frac{m_2}{\rho_2 \cdot z_2}.$$

Dabei kann ein größeres Individuum I ein kleineres II nicht nur dann umschließen, wenn es jünger ist, sondern auch, wenn es gleichzeitig oder sogar vor dem andern zu wachsen beginnt und zugleich mit diesem sein Wachstum

[1] Nicolai Stenonis De solido intra solidum naturaliter contento Dissertationis prodromus. Neudruck des Verlages von W. Junk, Berlin 1904, S. 15—16.

[2] Carl E. M. Rohrbach, Min. Mitt. **7**. 18. 1886; vgl. auch H. Rosenbusch, Mikroskop. Physiographie d. Mineralien u. Gesteine II. S. 11. 1887 (2. Aufl.).

[3] F. Grandjean, Compt. rend. **149**. 866. Paris 1909.

[4] G. Tammann, Kristallisieren u. Schmelzen S. 148. Leipzig 1903.

beendet. Fallen Anfang und Ende des Wachstums für I und II vollkommen zusammen, dann sind ihre räumlichen Wachstumsgeschwindigkeiten gleich w_1 und w_2, wo

(2) $$w_1 : w_2 = v_1 : v_2 .$$

Einen derartigen Fall stellt die beistehende Figur dar. Zwei verschiedenartige Individuen I und II beginnen gleichzeitig zu wachsen, und zwar wächst I

$V = 20$, $V' = 12.5$, $v = 5$, $v' = 2.5$.

schneller als II, nämlich mit den Flächengeschwindigkeiten V und V' gegenüber v und v'. Im Moment des Zusammenstoßens erscheinen sie in der Figur als zwei Rechtecke[1] mit den Seiten $2V$ und $2V'$ sowie $2v$ und $2v'$. Jetzt beginnt die Umwachsung. Nach einiger Zeit hat I die Form des gestrichelten Rechtecks, während II ein Trapez darstellt. Nachdem die Umwachsung vollendet ist, erscheint I als das äußerste Rechteck, II als bilateralsymmetrisches Fünfeck. Individuum II zeigt also eine scheinbare Automorphie. — Die Konstruktion der Figur fußt auf folgenden drei Gleichungen:

(3) $$s = \frac{2v^2}{V - v} .$$

(4) $$\operatorname{tg} \phi = \frac{v'}{V} ,$$

(5) $$\operatorname{tg} \phi' = \frac{vV}{V'(V - v)} .$$

[1] Die dritte Dimension wird hier und im folgenden vernachlässigt.

Setzt man $V = 20$, $V' = 12.5$, $v = 5$ und $v' = 2.5$, so folgt aus (3), (4) und (5) $s = 3.3$, $\phi = 7°7'$, $\phi' = 28°4'$.

Offensichtlich sind die Grenzflächen zwischen I und II »Kompromißflächen«, die weder von I allein noch von II allein erzeugt werden; sie sind weder in bezug auf I noch in bezug auf II rational, jedoch sind sie ebenflächig, in der Projektion also geradlinig. Diese Kompromißflächen, die durch die Größen s, ϕ und ϕ' charakterisiert sind, weichen mehr oder weniger von denjenigen Flächen ab, die sich bei unbehinderter Kristallisation des Individuums II an diesem ausbilden würden. Aus den Gleichungen (3), (4) und (5) folgt, daß, wenn v und v' gegen Null konvergieren, auch s, ϕ und ϕ' sich der Null nähern und somit II seiner normalen Form zustrebt, in der Figur also einem Rechteck mit dem Seitenverhältnis $v:v'$.

Die vorausgesetzte Konstanz von V, V', v und v' besteht nur dann, wenn Temperatur und Konzentration der Mutterlauge sich während der Kristallisation nicht ändern; das trifft nur für eutektische Systeme zu. Andernfalls entstehen anstatt der ebenen Grenzflächen gekrümmte; wenn sich während der Ausscheidung beispielsweise V gegenüber v' beschleunigt, so nimmt nach (4) der Winkel ϕ dauernd ab.

Die Struktur eutektischer Aggregate ist also im Gegensatz zu nicht-eutektischen durch ebene Grenzflächen ausgezeichnet, was erfahrungsmäßig für die schriftgranitartigen Verwachsungen von 28 Prozent Quarz mit 72 Prozent Orthoklas oder von 13 Prozent Antimon mit 87 Prozent Blei zutrifft. Dabei gehorcht die Umschließung mehrerer Individuen II durch ein Individuum I dem Gesetz der Gleichung (1).

Die skelettartige Ausbreitung der Quarze in den Feldspäten des Schriftgranites und ähnliche Strukturen künstlicher Metall-Eutektika bedürfen noch besonderer Untersuchung.

Über die Anwendung der Viggo Brunschen Methode auf die Theorie der algebraischen Zahlkörper.

Von Prof. Dr. H. Rademacher
in Hamburg.

(Vorgelegt von Hrn. Schur.)

Hr. Viggo Brun hat durch eine völlig elementare Methode den Satz bewiesen, daß jede hinreichend große gerade Zahl sich als die Summe zweier Zahlen darstellen läßt, deren jede aus höchstens neun (verschiedenen oder gleichen) Primfaktoren besteht[1]. Die folgenden Untersuchungen zeigen, wie eine sinngemäße Verallgemeinerung der Methode zu einem entsprechenden Satz der additiven Theorie der algebraischen Zahlkörper führt.

1. Es sei n der Grad des Körpers K. Wir stellen zunächst zwei Hilfssätze auf.

Hilfssatz I. Es sei $\mathfrak{a}$ ein beliebiges Ideal des Körpers. Dann gibt es stets eine Basis $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_n)$ dieses Ideals derart, daß $|\alpha_i^{(p)}| \leq C\sqrt[n]{N(\mathfrak{a})}$ $(i, p = 1, 2, \cdots n)$, wo $\alpha_i^{(p)}$ die Konjugierten von α_i bedeutet und C eine nur vom Körper abhängende Konstante ist.

Beweis: Es sei $\mathfrak{c}$ ein Ideal aus einer herausgegriffenen Klasse und $(\gamma_1, \gamma_2, \cdots \gamma_n)$ eine Basis dieses Ideals. Irgendein anderes Ideal $\mathfrak{a}$ derselben Klasse geht aus $\mathfrak{c}$ durch Multiplikation mit einer (ganzen oder gebrochenen) Zahl ρ des Körpers hervor, und $(\rho\gamma_1, \rho\gamma_2, \cdots \rho\gamma_n)$ bildet offenbar eine Basis von $\mathfrak{a}$. Die Zahl ρ ist bis auf einen Einheitsfaktor bestimmt. Ist $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots \varepsilon_r$ ein System von Grundeinheiten, so gibt es reelle Zahlen $c_1, c_2, \cdots c_r$, so daß

$$\left|\frac{\rho^{(p)}}{\sqrt[n]{N(\rho)}}\right| = \exp\sum_{q=1}^{r} c_q \log|\varepsilon_q^{(p)}| \qquad p = 1, 2, \cdots n$$

ist. Durch Multiplikation von ρ mit einer passenden Einheit kann man erreichen, daß $0 \leq c_q < 1$ für $q = 1, 2, \cdots r$ wird, also $|\rho^{(p)}| \leq M\left|\sqrt[n]{N(\rho)}\right|$ für alle p, wo M ein gewisses durch Angabe der Grundeinheiten völlig bestimmtes Maximum ist. Ist ferner $m\sqrt[n]{N(\mathfrak{c})}$ die größte der Zahlen $|\gamma_i^{(p)}|$, so ist

$$|\alpha_i^{(p)}| = |\rho^{(p)}\gamma_i^{(p)}| \leq Mm\sqrt[n]{N(\mathfrak{c})}\left|\sqrt[n]{N(\rho)}\right| = Mm\sqrt[n]{N(\mathfrak{a})}.$$

[1] Viggo Brun, Le crible d'Ératosthène et le théorème de Goldbach, Kristiania, Videnskapsselskapets Skrifter I. Mat.-Naturw. Klasse 1920. No. 3.

Dies gilt für alle Ideale aus der $\mathfrak{c}$ enthaltenden Klasse. Wegen der Endlichkeit der Klassenanzahl ist der Hilfssatz damit bewiesen.

Hilfssatz II. Es sei ζ *eine ganze Zahl aus* K *von der Eigenschaft*

$$(1) \qquad \left|\frac{\zeta^{(p)}}{\sqrt[n]{N(\zeta)}}\right| \leqq M \qquad p = 1, 2, \cdots n$$

(wo M *die eben angegebene Bedeutung hat). Ferner sei* $\mathfrak{a}$ *ein beliebiges Ideal und* β *irgendeine ganze Zahl aus* K *(die auch gleich* ζ *sein kann). Es sei* $P(\mathfrak{a}, \zeta)$ *die Anzahl der Zahlen* ξ *mit den Eigenschaften*

$$(2) \qquad \xi \equiv \beta \pmod{\mathfrak{a}},$$

$$(3) \qquad |\xi^{(p)}| \leqq |\zeta^{(p)}|, \quad |\xi^{(p)} - \zeta^{(p)}| \leqq |\zeta^{(p)}|. \qquad p = 1, 2, \cdots n$$

Dann gibt es zwei von $\mathfrak{a}, \zeta, \beta$ *unabhängige Zahlen* A *und* B, *so daß*

$$P(\mathfrak{a}, \zeta) = A\frac{|N(\zeta)|}{N(\mathfrak{a})} + t\left(1 + B\left(\frac{|N(\zeta)|}{N(\mathfrak{a})}\right)^{1-\frac{1}{n}}\right). \qquad |t| \leqq 1$$

Der Beweis verläuft etwa folgendermaßen. Es sei $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_n)$ eine Basis von $\mathfrak{a}$ von der im Hilfssatz I angegebenen Art. Die Zahlen ξ, die (2) und (3) erfüllen, müssen durch ganze rationale Zahlen $x_1, x_2, \cdots x_n$ so bestimmt werden können, daß

$$\xi^{(p)} = \sum_{l=1}^{n} x_l \alpha_l^{(p)} + \beta^{(p)},$$

$$\left|\sum_{l=1}^{n} x_l \alpha_l^{(p)} + \beta^{(p)}\right| \leqq |\zeta^{(p)}|,$$

$$\left|\sum_{l=1}^{n} x_l \alpha_l^{(p)} + \beta^{(p)} - \zeta^{(p)}\right| \leqq |\zeta^{(p)}| \qquad p = 1, 2, \cdots n$$

gelten. Von den konjugierten Körpern seien $K^{(1)}, \cdots K^{(r_1)}$ reell, und für $r_1 + 1 \leqq p \leqq r_1 + r_2$ stets $K^{(p)}$ konjugiert komplex zu $K^{(p+r_2)}$. Die Bestimmung der $x_1, x_2, \cdots x_n$ wird dann auch durch folgendes System von Ungleichungen zwischen reellen Größen geleistet:

$$\left|\sum_{l=1}^{n} x_l \alpha_l^{(p)} + \beta^{(p)}\right| \leqq |\zeta^{(p)}|, \quad \left|\sum_{l=1}^{n} x_l \alpha_l^{(p)} + \beta^{(p)} - \zeta^{(p)}\right| \leqq |\zeta^{(p)}|, \qquad p = 1, 2, \cdots r$$

$$(4) \quad \left(\sum_{l=1}^{n} x_l \Re(\alpha_l^{(p)}) + \Re(\beta^{(p)})\right)^2 + \left(\sum_{l=1}^{n} x_l \Im(\alpha_l^{(p)}) + \Im(\beta^{(p)})\right)^2 \leqq |\zeta^{(p)}|^2, \qquad p = r_1 + 1, \cdots, r_1 + r^2$$

$$\left(\sum_{l=1}^{n} x_l \Re(\alpha_l^{(p)}) + \Re(\beta^{(p)}) - \Re(\zeta^{(p)})\right)^2 + \left(\sum_{l=1}^{n} x_l \Im(\alpha_l^{(p)}) + \Im(\beta^{(p)}) - \Im(\zeta^{(p)})\right)^2 \leqq |\zeta^{(p)}|^2.$$

Die Repräsentation der $(x_1, \cdots x_n)$ als Gitterpunkte im n-dimensionalen Raum führt zu der Abschätzung

$$P(\mathfrak{a}, \zeta) = \int \cdots \int_G dx_1 \cdots dx_n + tV, \qquad |t| \leqq 1$$

wo G das durch (4) bestimmte Gebiet der nun als reelle Variabeln aufgefaßten $x_1, \cdots x_n$ ist und V der Inhalt des Gebietes aller Punkte, die von der Begrenzung von G höchstens den Abstand $\frac{1}{2}\sqrt{n}$ besitzen. Nach Einführung neuer Koordinaten

$$u_p = \sum_{l=1}^{n} x_l \alpha_l^{(p)} + \beta^{(p)}, \qquad p = 1, 2, \cdots r_1$$

$$u_p = \sum_{l=1}^{n} x_l \Re(\alpha_l^{(p)}) + \Re(\beta^{(p)}), \qquad p = r_1 + 1, \cdots r_1 + r_2$$

$$u_p = \sum_{l=1}^{n} x_l \Im(\alpha_l^{(p)}) + \Im(\beta^{(p)}) \qquad p = r_1 + r_2 + 1, \cdots n$$

findet man unter Benutzung der Transformationsdeterminante

$$(5) \qquad P(\mathfrak{a}, \zeta) = \frac{1}{\sqrt{d}} \left(\frac{4\pi}{3} - \sqrt{3} \right)^{r_2} \frac{|N(\zeta)|}{N(\mathfrak{a})} + tV.$$

Das Gebiet G hat im Raum der $u_1, \cdots u_n$ ein Bild G', das durch

$$|u_p| \leqq |\zeta^{(p)}|, \quad |u_p - \zeta^{(p)}| \leqq |\zeta^{(p)}|, \qquad p = 1, 2, \cdots r_1$$

$$u_p^2 + u_{p+r_2}^2 \leqq |\zeta^{(p)}|^2, \quad (u_p - \Re(\zeta^{(p)}))^2 + (u_{p+r_2} - \Im(\zeta^{(p+r_2)}))^2 \leqq |\zeta^{(p)}|^2 \quad p = r_1 + 1, \cdots r_1 + r_2$$

angegeben wird. Die Bilder der Einheitswürfel des $(x_1, x_2, \cdots x_n)$ Raumes sind Parallelepipede, deren Durchmesser wegen der in Hilfssatz I hervorgehobenen Eigenschaft der $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_n$ höchstens gleich $Cn^{\frac{3}{2}} \sqrt[n]{N(\mathfrak{a})}$ ist. Unter abermaliger Heranziehung der Transformationsdeterminante erhält man $V \leqq \frac{2^{r_2}}{N(\mathfrak{a})\sqrt{d}} V'$, wo V' der Inhalt des Gebietes aller Punkte ist, die von der Begrenzung von G' höchstens die Entfernung $\frac{1}{2} Cn^{\frac{3}{2}} \sqrt[n]{N(\mathfrak{a})}$ besitzen. Für die Berechnung von V' sind nun die Ungleichungen (1) von Wichtigkeit, die der »Breite« des konvexen Bereiches G' eine untere Schranke $b \cdot \sqrt[n]{|N(\zeta)|}$ setzen, wo b eine feste, durch M bestimmte Zahl ist. Man findet dann, indem man einfach V' durch die Differenz zweier zu G' ähnlicher und ähnlich gelegener Bereiche abschätzt,

$$V < C' \left| \frac{N(\zeta)}{N(\mathfrak{a})} \right|^{1 - \frac{1}{n}} \left(1 + C'' \left| \frac{N(\mathfrak{a})}{N(\zeta)} \right|^{\frac{1}{n}} \right)^{n-1}.$$

Für $N(\mathfrak{a}) \leqq 2^n |N(\zeta)|$ kann man eine neue Konstante B einführen, so daß

$$V < B \left| \frac{N(\zeta)}{N(\mathfrak{a})} \right|^{1 - \frac{1}{n}}$$

ist. Wegen (5) wäre der Hilfssatz II dann schon bewiesen, wenn seine Richtigkeit noch für $N(\mathfrak{a}) > 2^n |N(\zeta)|$ nachgewiesen ist. Nun kann es im Falle dieser

Ungleichung, wie man leicht einsieht, höchstens eine Lösung ξ von (3) geben, so daß $P(\mathfrak{a}, \zeta) = 0$ oder 1 sein muß. Da sich in diesem Falle zugleich aber auch $A \frac{|N(\zeta)|}{N(\mathfrak{a})} < 1$ herausstellt, kann man in der Tat durch passende Wahl von t die linke Seite der behaupteten Formel zu 0 oder 1 machen, womit auch dieser Fall erledigt ist.

2. Nun sei $\mathfrak{l}$ das Ideal, das aus allen Primfaktoren ersten Grades von 2 zusammengesetzt ist, jeden in der ersten Potenz genommen[1]. Es sei ζ eine durch $\mathfrak{l}$ teilbare Zahl, die außerdem (1) erfüllt. Ferner sei $\mathfrak{m}$ ein gewisses durch $\mathfrak{l}$ teilbares Ideal, über das wir noch verfügen wollen. Dann gibt es, da jeder nicht in ζ aufgehende Primidealteiler $\mathfrak{p}$ von $\mathfrak{m}$ die Eigenschaft $N(\mathfrak{p}) \geqq 3$ hat, offenbar eine Zahl β, die zugleich $(\beta, \mathfrak{m}) = 1$ und $(\zeta - \beta, \mathfrak{m}) = 1$ erfüllt.

Nun seien $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \cdots \mathfrak{p}_k$ verschiedene und zu $\mathfrak{m}$ teilerfremde Primideale und $P(\mathfrak{m}, \zeta; \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \cdots \mathfrak{p}_k)$ sei die Anzahl der Zahlen ξ, die den Bedingungen

$$\xi \equiv \beta \pmod{\mathfrak{m}} \tag{2}$$

$$|\xi^{(p)}| \leqq |\zeta^{(p)}|, \quad |\xi^{(p)} - \zeta^{(p)}| \leqq |\zeta^{(p)}| \tag{3}$$

genügen und für die weder

$$\xi \equiv 0 \quad \text{noch} \quad \xi \equiv \zeta \pmod{\mathfrak{p}_j} \qquad j = 1, 2, \cdots k \tag{6}$$

gelten. (Für die in ζ aufgehenden $\mathfrak{p}_j$ fallen diese beiden Forderungen (6) in eine zusammen.) Da diejenigen Zahlen ζ, die (6) nur für $j = 1, 2, \cdots (k-1)$ erfüllen, in zwei gewissen Restklassen mod $\mathfrak{m}\mathfrak{p}_k$ liegen müssen (die für $\zeta \equiv 0$ mod $\mathfrak{p}_k$ in eine zusammenfallen), so leitet man die Rekursionsformeln her:

$$P(\mathfrak{m}, \zeta; \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \cdots \mathfrak{p}_k) = P(\mathfrak{m}, \zeta; \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \cdots \mathfrak{p}_{k-1}) - P(\mathfrak{m}\mathfrak{p}_k, \zeta; \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \cdots \mathfrak{p}_{k-1})$$

für den Fall $\zeta \equiv 0$ mod $\mathfrak{p}_k$, und

$$P(\mathfrak{m}, \zeta; \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \cdots \mathfrak{p}_k) = P(\mathfrak{m}, \zeta; \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \cdots \mathfrak{p}_{k-1}) - 2P(\mathfrak{m}\mathfrak{p}_k, \zeta; \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \cdots \mathfrak{p}_{k-1})$$

für den Fall $\zeta \not\equiv 0$ mod $\mathfrak{p}_k$, wobei der Faktor 2 zur Zusammenfassung zweier gleichartiger Ausdrücke gebraucht ist, die sich in den ausgeschriebenen Argumenten nicht unterscheiden, sich aber auf verschiedene Restklassen mod $\mathfrak{m}\mathfrak{p}_k$ beziehen. Setzen wir f_k gleich 1 oder 2, je nachdem $\mathfrak{p}_k$ Teiler von ζ ist oder nicht, so können wir schreiben:

$$P(\mathfrak{m}, \zeta; \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \cdots \mathfrak{p}_k) = P(\mathfrak{m}, \zeta; \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \cdots \mathfrak{p}_{k-1}) - f_k P(\mathfrak{m}\mathfrak{p}_k, \zeta; \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \cdots \mathfrak{p}_{k-1}).$$

Hieraus folgt durch Iteration

$$P(\mathfrak{m}, \zeta; \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \cdots \mathfrak{p}_k) = P(\mathfrak{m}, \zeta) - \sum_{1 \leqq j_0 \leqq k} f_{j_0} P(\mathfrak{m}\mathfrak{p}_{j_0}, \zeta; \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \cdots \mathfrak{p}_{j_0 - 1})$$

und durch Anwendung dieser Formel auf jeden Summanden unter dem Summenzeichen nach Annahme einer Zahl $k_1 < k$

$$\begin{aligned} P(\mathfrak{m}, \zeta; \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \cdots \mathfrak{p}_k) &\geqq P(\mathfrak{m}, \zeta) - \sum_{j_0 \leqq k} f_{j_0} P(\mathfrak{m}\mathfrak{p}_{j_0}, \zeta) \\ &+ \sum_{\substack{j_0 \leqq k \\ j_0 > j_1}} \sum_{j_1 \leqq k_1} f_{j_0} f_{j_1} P(\mathfrak{m}\mathfrak{p}_{j_0}\mathfrak{p}_{j_1}, \zeta; \mathfrak{p}_1, \cdots \mathfrak{p}_{j_1 - 1}), \end{aligned} \tag{7}$$

---

[1] Wenn 2 kein Primideal ersten Grades enthält, sei $\mathfrak{l}$ gleich dem Hauptideal (1) gesetzt.

worin das Ungleichheitszeichen durch Unterdrückung der etwaigen Summanden mit $k_1 < j_1 < j_0$ auftritt. Sei nun $k = k_0 > k_1 > k_2 > \cdots > k_v$ eine Folge von natürlichen Zahlen, so ergibt die wiederholte Anwendung von (5) auf die positiven Summanden:

$$(8) \qquad \begin{aligned} P(\mathfrak{m}, \zeta; \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \cdots \mathfrak{p}_k) \geqq\ & P(\mathfrak{m}, \zeta) - \sum_{j_0} f_{j_0} P(\mathfrak{m}\mathfrak{p}_{j_0}, \zeta) + \sum_{j_0} \sum_{j_1} f_{j_0} f_{j_1} P(\mathfrak{m}\mathfrak{p}_{j_0}\mathfrak{p}_{j_1}, \zeta) \\ & - + \cdots + \sum_{j_0} \sum_{j_1} \cdots \sum_{j_{2v-1}} f_{j_0} f_{j_1} \cdots f_{j_{2v-1}} P(\mathfrak{m}\mathfrak{p}_{j_0}\mathfrak{p}_{j_1} \cdots \mathfrak{p}_{j_{2v-1}}, \zeta) \\ & - \sum_{j_0} \sum_{j_1} \cdots \sum_{j_{2v-1}} \sum_{j_{2v}} f_{j_0} f_{j_1} \cdots f_{j_{2v-1}} f_{j_{2v}} P(\mathfrak{m}\mathfrak{p}_{j_0}\mathfrak{p}_{j_1} \cdots \mathfrak{p}_{j_{2v-1}}\mathfrak{p}_{j_{2v}}, \zeta), \end{aligned}$$

worin die Indizes nur den Einschränkungen $j_u \leqq k_{\left[\frac{u+1}{2}\right]}$ und $j_0 > j_1 > j_2 > \cdots > j_{2v}$ unterworfen sind.

3. Die Anwendung von Hilfssatz II auf (8) ergibt

$$(9) \qquad \begin{aligned} P(\mathfrak{m}, \zeta; \mathfrak{p}_1, \cdots \mathfrak{p}_k) \geqq\ & A \frac{|N(\zeta)|}{N(\mathfrak{m})} \left\{ 1 - \sum_{j_0} \frac{f_{j_0}}{N(\mathfrak{p}_{j_0})} + \sum_{j_0} \sum_{j_1} \frac{f_{j_0}}{N(\mathfrak{p}_{j_0})} \frac{f_{j_1}}{N(\mathfrak{p}_{j_1})} - + \cdots \right\} \\ & - \left\{ 1 + \sum_{j_0} f_{j_0} + \sum_{j_0} \sum_{j_1} f_{j_0} f_{j_1} + + \cdots \right\} \\ & - B \left(\frac{|N(\zeta)|}{N(\mathfrak{m})} \right)^{1-\frac{1}{n}} \left\{ 1 + \sum_{j_0} \frac{f_{j_0}}{N(\mathfrak{p}_{j_0})^{1-\frac{1}{n}}} + \sum_{j_0} \sum_{j_1} \frac{f_{j_0}}{N(\mathfrak{p}_{j_0})^{1-\frac{1}{n}}} \frac{f_{j_1}}{N(\mathfrak{p}_{j_1})^{1-\frac{1}{n}}} + \cdots \right\}. \end{aligned}$$

Diese Formel wollen wir abgekürzt

$$(9a) \qquad P(\mathfrak{m}, \zeta; \mathfrak{p}_1, \cdots \mathfrak{p}_k) \geqq A \frac{|N(\zeta)|}{N(\mathfrak{m})} E - R - B \left(\frac{|N(\zeta)|}{N(\mathfrak{m})} \right)^{1-\frac{1}{n}} S$$

schreiben.

Es seien nun h und h_0 zwei reelle Zahlen, $h_0 > h > 1$, und über $\mathfrak{m}$ treffen wir jetzt die Fortsetzung, daß es das Produkt aller der Primideale ist, die nicht den beiden Bedingungen

$$\frac{1}{N(\mathfrak{p})} \leqq \log h_0, \quad 1 - \frac{2}{N(\mathfrak{p})} \geqq \frac{1}{h_0^2}$$

genügen[1].

Es sei z eine positive Zahl, und $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \cdots \mathfrak{p}_k$ seien die zu $\mathfrak{m}$ teilerfremden Primideale mit $N(\mathfrak{p}) \leqq z$, nach wachsender Norm geordnet. Durch eine Teilfolge $l_0, l_1, l_2, \cdots l_t, \cdots$ ihrer Indizes sollen sie nun so in Gruppen geordnet werden, daß für jede Gruppe

$$(10) \qquad \sum_{l_{t-1} < j \leqq l_t} \frac{2}{N(\mathfrak{p}_j)} \leqq 2 \log h_0, \quad \prod_{l_{t-1} < j \leqq l_t} \left(1 - \frac{2}{N(\mathfrak{p}_j)} \right) \geqq \frac{1}{h_0^2} \ (t = 0, 1, \cdots; \ l_{-1} = 0)$$

gilt. Da

[1] Da kein Primteiler des früher definierten Ideals $\mathfrak{l}$ der zweiten Bedingung genügt, ist $\mathfrak{l}$ von selbst ein Teiler von $\mathfrak{m}$.

$$(11)\qquad \sum_{N(\mathfrak{p})\leq x} \frac{1}{N(\mathfrak{p})} = \log\log x + c + o(1)$$

ist[1], so gibt es ein x_0, so daß für $x \geq x_0$

$$(12)\qquad \sum_{x<N(\mathfrak{p})\leq x^h} \frac{2}{N(\mathfrak{p})} < 2 \log h_0 \text{ und } \prod_{x<N(\mathfrak{p})\leq x^h} \left(1 - \frac{2}{N(\mathfrak{p})}\right) > \frac{1}{h_0^2}$$

wird. Die Primideale $\mathfrak{p}_j$ mit $N(\mathfrak{p}_j) \leq x_0$ sollen nun die ersten Gruppen bilden, etwa bis $j \leq l_{t'}$, wobei die Verteilung irgendwie unter Erfüllung von (10) geschieht. Dann sei, $z > x_0$ angenommen, v die größte natürliche Zahl, für die

$$(13)\qquad x_0 < z^{\left(\frac{1}{h}\right)^{v-(t'+1)}}$$

ist, und l_u sei für $u = t'+1, t'+2, \cdots v$ die Anzahl derjenigen zu $\mathfrak{m}$ teilerfremden Primideale, die $N(\mathfrak{p}_j) \leq z^{\left(\frac{1}{h}\right)^{v-u}}$ erfüllen. Die so bestimmten l_u liefern wegen (12) eine Einteilung von der Beschaffenheit (10). Wir setzen noch $k_u = l_{v-u}$ zur Bestimmung der in (8) und (9) auftretenden Indizes k_u. Nach diesen Fortsetzungen gilt erst recht

$$(14)\qquad \sum_{k_{u+1}<j\leq k_u} \frac{f_j}{N(\mathfrak{p}_j)} \leq 2 \log h_0 \text{ und } \prod_{k_{u+1}<j\leq k_u} \left(1 - \frac{f_j}{N(\mathfrak{p}_j)}\right) \geq \frac{1}{h_0^2} \quad (k_{v+1}=0).$$

4. Nach diesen Verfügungen sind die Summen E, R und S in (9) völlig festgelegt, und man beweist nun durch genau die gleichen elementaren Rechnungen, wie sie Hr. Viggo Brun im rationalen Falle angestellt hat und wobei es nur auf Ungleichungen von dem Typ (14) ankommt,

$$(15)\qquad E > C_1 \prod_{j\leq k_0} \left(1 - \frac{f_j}{N(\mathfrak{p}_j)}\right) > C_2 \frac{1}{(\log z)^2},$$

wo C_1 und C_2 noch von h_0 abhängen. Und zwar hat Hr. Brun gezeigt, daß C_1 noch positiv ist, wenn man $h_0 = 1.2501$ wählt[2]; ich habe nachgewiesen, daß man sogar noch für $h_0 = 1.29$ ein positives C_1 erhält[3]. Eine Anwendung von (11) liefert dann auch ein positives C_2.

Ferner ist nach (9)

$$R \leq (1+2k_0)\,(1+2k_1)^2\,(1+2k_2)^2 \cdots (1+2k_v)^2$$

$$R \leq (1+2l_0)^2 \cdots (1+2l_{t'})^2\,(1+2l_{t'+1})^2 \cdots (1+2l_{v-1})^2\,(1+2l_v).$$

Das Produkt $(1+2l_0)^2 \cdots (1+2l_{t'})^2$ hängt nur von h, h_0 und x_0 ab. Da es eine positive Konstante C_3 gibt, so daß die Anzahl der Primideale mit $N(\mathfrak{p}) \leq w$ nicht größer als $C_3 w$ ist, so folgt

[1] Folgt z. B. aus der von Hrn. Landau ohne Benutzung der Dedekindschen ζ_k-Funktion bewiesenen Formel $\sum_{N(\mathfrak{p})\leq x} \frac{\log N(\mathfrak{p})}{N(\mathfrak{p})} = \log x + O(1)$, s. Journal f. d. reine u. ang. Math. Bd. 125 (1903), S. 117, Formel (67).

[2] A. a. O. S. 30. Die Zahl h_0 ist dort mit α_0 bezeichnet.

[3] Beiträge zur Viggo Brunschen Methode in der Zahlentheorie, Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität Bd. 3, 1923.

$$R \leqq C_4 \cdot C_3^2 z^{2\left(\frac{1}{h}\right)^{v-t'-1}} \cdot C_3^2 z^{2\left(\frac{1}{h}\right)^{v-t'-2}} \cdots\cdot C_3^2 z^{2\left(\frac{1}{h}\right)} \cdot C_3 z,$$

$$R \leqq C_5 \cdot C_3^{2(v-t'-1)} z^{\frac{h+1}{h-1}}.$$

Wegen (13) ist, unter der gewiß statthaften Annahme $\log\log x_0 > 0$:

$$v - t' - 1 < \frac{\log\log z}{\log h}, \tag{16}$$

also

$$R \leqq C_5 (\log z)^{C_6} z^{\frac{h+1}{h-1}}, \tag{17}$$

worin C_5 und C_6 nicht von z abhängen.

Ferner liest man aus (9) ab:

$$S \leqq \left(1 + \sum_{j \leqq k_0} \frac{2}{N(\mathfrak{p}_j)^{1-\frac{1}{n}}}\right)\left(1 + \sum_{j \leqq k_1} \frac{2}{N(\mathfrak{p}_j)^{1-\frac{1}{n}}}\right)^2 \cdots\cdots \left(1 + \sum_{j \leqq k_v} \frac{2}{N(\mathfrak{p}_j)^{1-\frac{1}{n}}}\right)^2,$$

oder

$$S \leqq \left(1 + \sum_{j \leqq l_0}\right)^2 \cdots \left(1 + \sum_{j \leqq l_{t'}}\right)^2 \left(1 + \sum_{j \leqq l_{t'+1}}\right)^2 \cdots\cdots \left(1 + \sum_{j \leqq l_{v-1}}\right)^2 \left(1 + \sum_{j \leqq l_v}\right),$$

wo überall unter dem Summenzeichen der Ausdruck $\dfrac{2}{N(\mathfrak{p}_j)^{1-\frac{1}{n}}}$ zu denken ist.

Das Produkt $\left(1 + \sum_{j \leqq l_0}\right)^2 \cdots \left(1 + \sum_{j \leqq l_{t'}}\right)^2$ ist von z unabhängig und werde gleich C_7 gesetzt. Ferner gibt es eine Konstante C_8, so daß für alle $w \geqq x_0$

$$1 + \sum_{N(\mathfrak{p}) \leqq w} \frac{2}{N(\mathfrak{p}_j)^{1-\frac{1}{n}}} < C_8 w^{\frac{1}{n}}$$

ist[1]. Wegen der Bestimmung der $l_{t'+1}, l_{t'+2}, \cdots l_v$ ergibt dies

$$S < C_7 C_8^2 z^{\frac{2}{n}\left(\frac{1}{h}\right)^{v-t'-1}} \cdot C_8^2 z^{\frac{2}{n}\left(\frac{1}{h}\right)^{v-t'-2}} \cdots\cdot C_8^2 z^{\frac{2}{n}\left(\frac{1}{h}\right)} \cdot C_8 z^{\frac{1}{n}}$$

und unter Berücksichtigung von (16)

$$S < C_9 (\log z)^{C_{10}} \cdot z^{\frac{1}{n}\frac{h+1}{h-1}}. \tag{18}$$

Schließlich folgt aus (9), (15), (17) und (18) zusammen

$$P(\mathfrak{m}, \zeta; \mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_k) > C_{11} |N(\zeta)| \left\{ \frac{1}{(\log z)^2} - C_{12} \frac{(\log z)^{C_6} z^{\frac{h+1}{h-1}}}{|N(\zeta)|} - C_{13} \frac{(\log z)^{C_{10}} z^{\frac{1}{n}\frac{h+1}{h-1}}}{|N(\zeta)|^{\frac{1}{n}}} \right\}, \tag{19}$$

---

[1] Siehe z. B. LANDAU a. a. O. Formel (66).

worin $C_{11} > 0$ ist. Dies gilt für jedes $h < h_0$; wir wählen, entsprechend unserer Verfügung über h_0, $h = \frac{89}{69} < 1.29$; das ergibt $\frac{h+1}{h-1} = \frac{79}{10}$. Endlich setzen wir $z = |N(\zeta)|^{\frac{1}{8}}$, was für $|N(\zeta)| > x_0^8$ gestattet ist. Dann geht (19) über in

$$P(\mathfrak{m}, \zeta; \mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_k) > C_{11} |N(\zeta)| \times$$

$$\left\{\frac{64}{(\log|N(\zeta)|)^2} - C_{14}(\log|N(\zeta)|)^{C_6}|N(\zeta)|^{\frac{79}{80}-1} - C_{15}(\log|N(\zeta)|)^{C_{10}}|N(\zeta)|^{\frac{1}{n}\left(\frac{79}{80}-1\right)}\right\}.$$

Für hinreichend große Werte von $|N(\zeta)|$ ist die rechte Seite positiv und wächst sogar von der Ordnung $\frac{|N(\zeta)|}{(\log|N(\zeta)|)^2}$ ins Unendliche.

5. Nun ist aber $P(\mathfrak{m}, \zeta; \mathfrak{p}_1 \ldots \mathfrak{p}_k)$ die Anzahl aller Zahlen $\xi \equiv \beta \pmod{\mathfrak{m}}$, die $|\xi^{(p)}| \leqq |\zeta^{(p)}|$, $|\zeta^{(p)} - \xi^{(p)}| \leqq |\zeta^{(p)}|$ erfüllen und von der Beschaffenheit sind, daß weder ξ noch $\eta = \zeta - \xi$ durch $\mathfrak{p}_1, \cdots \mathfrak{p}_k$ teilbar sind. Da β so gewählt ist, daß ξ und η auch zu $\mathfrak{m}$ teilerfremd sind, so können die Primideale, die in ξ oder η aufgehen, nur solche sein, deren Norm größer als $z = |N(\zeta)|^{\frac{1}{8}}$ ist. Von solchen Primidealen können aber ξ und η wegen $|N(\xi)| \leqq |N(\zeta)|$ und $|N(\eta)| \leqq |N(\zeta)|$ höchstens je sieben (gleiche oder verschiedene) enthalten. Damit haben wir den Satz erhalten:

Ist $\mathfrak{l}$ das Produkt aller Primideale ersten Grades von 2, und ist ζ eine durch $\mathfrak{l}$ teilbare Zahl von hinreichend großer Norm, die außerdem mit ihren Konjugierten die Eigenschaft

$$|\zeta^{(p)}| \leqq M \sqrt[n]{|N(\zeta)|}$$

besitzt, wo M eine gewisse Körperkonstante ist, so gibt es stets additive Zerlegungen $\zeta = \xi + \eta$ von der Art, daß $|\xi^{(p)}| \leqq |\zeta^{(p)}|$, $|\eta^{(p)}| \leqq |\zeta^{(p)}|$ und ξ und η je höchstens sieben Primidealfaktoren besitzen.

Hierin kann man die Einschränkung $|\zeta^{(p)}| \leqq M\sqrt[n]{|N(\zeta)|}$ noch beseitigen. Für den imaginär quadratischen Körper ist sie von selbst erfüllt. Ist ζ eine beliebige Zahl in einem Körper mit Einheiten, so gibt es stets eine Einheit ε, so daß $\zeta' = \varepsilon\zeta$ die Bedingung erfüllt. Ist nun noch $|N(\zeta)|$ hinreichend groß, so gibt es die behauptete Zerlegung $\zeta' = \xi' + \eta'$. Dann ist offenbar $\zeta = \xi + \eta$, wenn $\xi = \varepsilon^{-1}\xi'$, $\eta = \varepsilon^{-1}\eta'$ gesetzt ist, eine Zerlegung der gleichen Art.

Daß ζ als durch $\mathfrak{l}$ teilbar angenommen wird, ist notwendig, denn wenn ξ und η nur durch Primideale hoher Norm teilbar, also auch zu 2 teilerfremd sein sollen, so ist offenbar $\xi + \eta$ durch $\mathfrak{l}$ teilbar. Nennen wir noch eine durch $\mathfrak{l}$ teilbare Zahl »gerade«, so folgt durch Spezialisation unseres Satzes:

Jede gerade und totalpositive Zahl von hinreichend großer Norm läßt sich als Summe zweier totalpositiver Zahlen von höchstens ebenso großer Norm darstellen, die je höchstens sieben verschiedene oder gleiche Primidealteiler besitzen.

Über die Maßverhältnisse der Hand mit Angaben über die Hände von W. v. Waldeyer-Hartz †.

Von R. Fick.

Aus der Anatomischen Anstalt der Universität Berlin.
(Vorgetragen am 23. März 1922 [s. oben S. 92].)

Hierzu Taf. I und II.

Wie ich in meinem Nachruf auf unseren verewigten Meister der Anatomie W. Waldeyer mitteilte, wünschte Waldeyer — so recht ein Beweis dafür, wie ganz verwachsen mit der anatomischen Forschung er war —, daß das Knochengerüst seiner Hände in der hiesigen anatomischen Anstalt untersucht und aufbewahrt würde, weil er sah, daß Verschiedenheiten zwischen seiner rechten und linken Hand vorhanden waren, die er »auf die viele Schreibarbeit«, wie er sagte, zurückführte[1]. Durch diese Untersuchung wurde ich veranlaßt, auch an anderen Händen genauere Messungen auszuführen und mich überhaupt mit den Größenverhältnissen der Hände und ihrer einzelnen Teile näher zu beschäftigen. Über die dabei erhaltenen Ergebnisse will ich hier kurz berichten.

Zunächst über die Größe:

Jedem ist bekannt, daß meist große Leute große Hände und Füße haben, kleine umgekehrt, daß also Beziehungen zwischen der Handgröße und der Körperlänge bestehen. Namentlich die Künstler, weniger die Anatomen, haben sich schon lange bemüht, bestimmte Größenverhältnisse zwischen den einzelnen Körperteilen als Regel, oder als Schönheitsideal aufzustellen.

Aber es ist sicher, daß die Form- und Größenverhältnisse der verschiedenen Körperteile des Menschen nicht ganz unbedeutenden Schwankungen unterworfen sind, die im allgemeinen um eine »goldene Mitte« herumliegen, ohne daß man denjenigen Körperteil schon als regelwidrig oder gar als »krank« bezeichnen kann, der nicht gerade der »Mittelform« besonders nahe kommt.

Von verschiedenen Forschern, namentlich von Zeising[2] seinerzeit in Halle, ist behauptet worden, daß in den Größenverhältnissen der sog. »goldene

[1] Näheres über Waldeyers letzten Willen s. in: R. Fick, Gedächtnisrede auf W. v. Waldeyer-Hartz nebst einem Verzeichnis seiner Schriften, Sitzgber. d. Preuß. Akad. d. Wiss. 1921. XXXIII. S. 13, und in: H. Virchow, Die Hände von W. v. Waldeyer-Hartz, Ztschr. f. Anat. und Entwicklungsgesch. 1923. Bd. 68. Heft 1. S. 1f.

[2] Bei der Aufsuchung der kunstanatomischen Schriften erfreute ich mich der kundigen Hilfe meines Assistenten Hrn. Dr. Friedel, Dozent an der hiesigen Kunstgewerbeschule. Zeising: Über die Metamorphose in den Verhältn. d. menschl. Gestalt, von der Geburt bis zur Vollendung des Längenwachstums. Verhdlg. d. Kais. Leop. Karolin. Akad. d. Natf. Breslau und Bonn 1858.

Schnitt« die Hauptrolle spiele, doch trifft das sicher nur für einige Körperteile und auch da nur annähernd zu. Die Hauptrolle spielt in Wahrheit natürlich die Anpassung an die Tätigkeit, wie namentlich aus der vergleichend anatomischen Untersuchung der verschiedenen Körperteilmaße hervorgeht. Über diese Beziehungen besitzen wir eine hervorragend gründliche Untersuchung am höchststehenden Säugerstamm von Mollison[1].

Für die Vergleichung der Länge und der Breite der einzelnen Körperteile beim Menschen ist es entschieden am zweckmäßigsten, als Einheit die Gesamtkörperlänge zugrunde zu legen. Das wurde schon von Dürer getan, während von Lionardo die Kopflänge bzw. Kopfhöhe, von Lavater, Schadow[2] u. a.[3] die Gesichtslänge oder die Fußlänge als Maßstab benutzt wurden.

Die ganze Handlänge, von den Handgelenkfalten bis zur Mittelfingerspitze, beträgt nun beim Lebenden im Mittel aus den bisherigen Messungen der Anatomen und Künstler 10.4 Hundertstel, d. i. also rund $^1/_{10}$ der Körperlänge. Gerade so viel beträgt aber auch im Mittel die Gesichtslänge »vom Haaransatz bis zum Kinn«.

Audran[4], der alle Körperteile nach Vierteln der Kopflänge mißt, gibt für die Hand der medicäischen Venus $^3/_4$ der Kopflänge an. C. Schmidt[5] sagt, die Handlänge betrage 9 Fingerbreiten.

Ich will erwähnen, daß die entsprechenden Handlängen bei den in der Berliner Anatomie aufgestellten beiden Riesenskeletten sich folgendermaßen verhalten:

Riese I. 216 cm hoch, Handlänge:
R. 24 cm = 11.1 %. L. 23.5 cm = 10.9 %.

Riese II. 223 cm hoch, Handlänge:
R. 22.3 cm = 10 %. L. 21.5 cm = 9.06 %.

Die Länge des ganzen knöchernen Mittelfingers mitsamt seinem Mittelhandknochen, also die Länge des namentlich von den vergleichenden Anatomen sog. 3. »Strahles« der Hand, also ohne Handwurzel, ist nach den sehr genauen Messungen Pfitzners (Zeitschr. f. Morph. u. Anthropol. 1900) an 80 von 200 Fällen im Mittel 9.1 Hundertstel der Körperlänge, sie schwankte nämlich zwischen 8.56 bis 10.06 % bei einer Körperlänge von 161—175 cm.

Außer der Länge der ganzen Hand ist offenbar auch das Verhältnis zwischen der Länge der eigentlichen Hand und der Fingerlänge kennzeichnend für die Form der Hand. Dieses Verhältnis soll nach Preissler[6], einem Kunstschriftsteller im Anfang des 18. Jahrh., = 1 : $^1/_2$ sein, d. h. die eigentliche Hand, wir sagen vielleicht am besten: die »Fleischhand«, soll gerade so lang sein wie der Mittelfinger. Nach Zeising ist das Verhältnis

[1] Mollison, Th., Die Körperproportionen der Primaten. In Morphol. Jahrb. Bd. 42. Heft 1/2. 1910.
[2] Schadow, Polyklet, oder von den Maßen des Menschen. 2. Aufl. Berlin 1866.
[3] Giard, Die Proportionen des menschl. Körpers nach den berühmten Antiken.
[4] Audran, Les proportions du corps humain. 1683. Neue Ausg. Paris 1855.
[5] C. Schmidt, Proportionslehre d. menschl. Körpers. Tübingen 1882.
[6] Preissler, Theoret. prakt. Unterr. im Zeichnen. 3. Ausgabe von Geissler. Nürnberg 1834.

aber ein ganz anderes; nach ihm soll die Fleischhand nur 3.94, die Fingerlänge aber 6.38 Hundertstel der Körperlänge betragen. Bei Messung der Fingerlänge kommt es übrigens sehr darauf an, ob man auf der Hohlhand oder auf dem Handrücken mißt, da die sog. Schwimmhaut zwischen den Fingern auf der Hohlhandseite viel weiter nach vorn reicht und dadurch die Finger kürzer erscheinen läßt als auf der Rückseite. Am besten erkennt man diesen Unterschied, wenn man zuerst die Fingerlänge von der Hohlhand betrachtet und dann an den gebeugten Fingern von ihrer Rückseite her. Wesentlich für die Handform ist auch ihre Breite, namentlich gegenüber der Handgelenkbreite. Die »Handbreite« messen wir entschieden am besten am vorderen Ende der »Fleischhand« und verstehen darunter die größte Entfernung der Zeige- und Kleinfinger-Mittelhandköpfchen; es ist das Maß, das die passende Handschuhnummer bestimmt. Nach C. Schmidt, der für die ganze Handlänge, wie eben bemerkt, 9 Fingerbreiten angibt, müßte die Handbreite um $^1/_2$ Fingerbreite kürzer sein als die Hälfte der ganzen Handlänge, da die Handbreite über den Wurzeln der langen Finger natürlich »4 Fingerbreiten« mißt.

Die Handgelenkbreite soll nach Zeising und auch nach den Mittelwerten anderer Messungen 3.4 Hundertstel der Körperlänge betragen, also etwa $^1/_3$ der ganzen Handlänge, die ja etwas über 10 Hundertstel beträgt. Für den Handgelenkumfang, die Handschuhnummer und die Mittelfingerlänge, die wohl auf dem Fingerrücken gemessen ist, sollen nach hundertjähriger Erfahrung der Kunsthandwerker folgende Größen als Mittelgrößen gelten können, wie Bertillon angibt (s. Pfeiffer, L. Handbuch der angewandten Anatomie für Maler und Bildhauer, Leipzig 1809):

	Handschuh-nummer	Handwurzel-umfang	Mittelfinger-länge
♀	7	18.7	8.5
♀	$7^1/_4$	19.4	8.8
♀	$7^1/_2$	20.0	9.2
♂	$7^3/_4$	20.7	9.5
♂	8	21.4	9.8
♂	$8^1/_4$	22,0	10.2
♂	$8^1/_2$	22.7	10.5
♂	$8^3/_4$	23.4	10.8
♂	9	24.0	11.2
♂	$9^1/_4$	24.7	11.5
	$9^1/_2$	25.0	11.8
	$9^3/_4$	25.4	12.2
	10	26.7	12.5

Waren die bisher besprochenen Maße leicht mit ziemlicher Genauigkeit beim Lebenden, einem Bild oder einer Bildsäule zu bestimmen, ist das ganz anders bei dem Vergleich der Finger untereinander, wie wohl zuerst W. Braune weiland in Leipzig, erkannt oder wenigstens zuerst klar auseinandergesetzt hat.

Wenn man nämlich die Länge der einzelnen Finger ohne weiteres beim Lebenden miteinander vergleicht, ist man groben Täuschungen ausgesetzt. Daß der Daumen der kürzeste Finger ist, auf den dann in der Größe der Kleinfinger folgt, und daß der Mittelfinger der längste Finger ist, das kann man freilich ohne jede Täuschungsmöglichkeit leicht feststellen.

Wie sich aber der Zeigefinger und Ringfinger in der Größe zueinander verhalten, das ist nicht so einfach zu entscheiden.

Wenn man die Finger einer Hand aneinanderlegt und in ungezwungener geschlossener Haltung auf den Tisch legt oder sich vor Augen stellt und dabei z. B. sieht, daß der Zeigefinger um $1^1/_2$ cm weniger weit am Mittelfinger hinaufreicht wie der Ringfinger, so ist damit durchaus noch nicht gesagt, daß der Ringfinger wirklich $1^1/_2$ cm länger ist als der Zeigefinger. Die Finger stehen nämlich wohl bei der Mehrzahl der Menschen schief zu ihrer Ausgangsebene, d. h. zur Ebene durch ihre Grundfläche, und zwar gewöhnlich ellenwärts, d. h. kleinfingerwärts geneigt. Je stärker die Finger ellenwärts geneigt stehen, um so mehr bleibt natürlich der Zeigefinger gegen den Mittelfinger zurück, um so mehr schiebt sich der Ringfinger am Mittelfinger nach vorn vor, d. h. also um so kürzer erscheint der Zeigefinger gegenüber dem Ringfinger. Umgekehrt »wächst« der Zeigefinger gegenüber dem Mittelfinger und dem Ringfinger scheinbar, wenn man die Finger nach der Daumenseite verschiebt. Man beobachtet oft Hände, bei denen in der einen Stellung, wenn die Finger nach der Kleinfingerseite zu etwas schräg gerichtet sind, der Zeigefinger fast um ein ganzes Fingerglied kürzer wie der Ringfinger erscheint, in der anderen Stellung, wenn die Finger nach der Daumenseite zu geschoben werden, gerade so lang oder sogar noch etwas länger wie der Ringfinger ist. — Aber auch wenn man nicht nur nach dem bloßen Augenmaß, nach dem gegenseitigen Überragen der Fingerspitzen urteilt, sondern genauer messend vorgehen will, ist die Länge der einzelnen Finger bei gestreckten Fingern an der lebenden Hand nicht leicht oder überhaupt gar nicht genau auszuführen, weil die Grenze der Finger gegen die Mittelhand nicht leicht zu erkennen ist. Höchstens wenn man die Finger »knacken« läßt und dadurch die Gelenkspalte der Grundgelenke sichtbar macht (vgl. R. Fick, Handbuch der Gelenklehre Bd. III S. 407), ist eine scharfe Feststellung des sog. »proximalen«, d. h. dem Rumpfe zugekehrten Randes des Fingergrundgliedes gut möglich. Sonst ist eine Messung der gestreckten Finger nur am Röntgenschirm oder auf der Röntgenplatte möglich. Anders wenn man die in sich gestreckten Finger gegen die Mittelhand beugt; dann kann man die Gelenkspalte sehr deutlich abtasten und dadurch die Fingerlänge sicher bestimmen. Ich möchte Ihnen die Täuschungsmöglichkeit durch die verschiedene Fingerstellung an meinen eigenen Händen im Röntgenbild zeigen. Ich verdanke die Aufnahmen dem liebenswürdigen Entgegenkommen des Hrn. Kollegen His, der mir auch zahlreiche andere Röntgenbilder zu Messungen zur Verfügung stellte.

Im Bild 1 und 2 sehen wir meine auf eine Röntgenplatte aufgelegte linke und rechte Hand in zwangloser Fingerhaltung. Wir erkennen, daß der Zeigefinger weit kürzer als der Ringfinger ist. Die Messung ergibt einen Unterschied von 11 mm; der Zeigefinger bleibt nämlich um 18, der Ringfinger nur um 7 mm hinter der Mittelfingerkuppe zurück.

Bild 3 zeigt meine rechte Hand in gezwungener Stellung, bei der ich den Zeigefinger gegenüber dem Mittelhandknochen absichtlich geradeaus gestellt hatte. Und siehe da, nun ist der Zeigefinger erheblich länger als der

Ringfinger. Jetzt steht der Ringfinger um 15.5 mm, der Zeigefinger aber nur um 6.5 mm hinter der Mittelfingerkuppe zurück, er ist also um 9 mm länger als der Ringfinger. Am Röntgenbild können wir uns nun aber davon überzeugen, daß das nur eine Täuschung ist, daß das Knochengerüst meines Zeigefingers in Wahrheit vielmehr fast um einen ganzen Zentimeter kürzer ist als das meines Ringfingers. Meine Zeigefingerknochen sind auf beiden Platten (die als Schattenbilder natürlich etwas vergrößert sind) 8.5 cm, während die des Ringfingers 9.4 cm messen. Das ist nun nach den bereits erwähnten Messungen Pfitzners an über 200 Händen, die er selbst mazerierte, um ganz sicher zu sein, daß keine Knochenverwechselungen vorkommen konnten, mit wenigen Ausnahmen der Fall. Nach Pfeifer (vgl. S. 221) soll der Zeigefinger beim Lebenden durchschnittlich um 1.15 cm, der Ringfinger um 0.9 cm, der Kleinfinger um 4.0 cm, der Daumen um 6.5 cm kürzer sein als der Mittelfinger.

Trotzdem finden wir nun auf den Bildern und Bildsäulen der Künstler, namentlich bei Darstellung von Idealgestalten sehr oft, ja vielleicht meist, den Zeigefinger länger als den Ringfinger. Die »Idealhand« der Künstler hat jedenfalls einen langen Zeigefinger, der nur wenig hinter dem Mittelfinger an Länge zurücksteht. Ein langer Zeigefinger ist übrigens, nebenbei bemerkt, auch das Ideal der »Langfinger«, der Taschendiebe, da sie dann mit dem Zeige- und Mittelfinger besonders gut die sog. »Schere« machen können, d. h. mit diesen beiden Fingern in die Tasche des Opfers fahren und, ohne die Finger krümmen zu müssen, etwas aus der Tasche herausfischen können. Bekannt sind die langen Zeigefinger der schönen Hände Rafaels oder Carlo Dolcis. Warum die Künstler mit Vorliebe den Zeigefinger ebenso lang oder beinahe solang darstellen wie den Ringfinger, hat meiner Ansicht nach zwei Gründe. Erstens muß wohl jeder zugeben, daß es »schöner« ist, wenn die Fingerspitzen des Zeige- und des Ringfingers etwa in gleicher Höhe stehen, die Linie der Fingerspitzen also mehr Gleichmaß zeigt. Der zweite Grund ist aber offenbar der, daß bei der jugendlichen und bei der wohlgepflegten Hand, die niemals schwere Arbeit verrichtet hat, der Zeigefinger gewöhnlich länger erscheint als bei der »abgearbeiteten« Hand, die auch sonst die Spuren des starken Gebrauches, z. B. gerade sehr oft am Nagelglied und Nagel des Zeigefingers aufweist und dadurch ein unschönes, oft ein teilweise fast zerstörtes Aussehen erhalten hat.

W. Braune hat zuerst den Grund für die Schiefstellung erkannt: er ist nämlich offenbar darin gegeben, daß die Fingerbeuger am Unterarm fast ganz auf der Ellenseite entspringen. Dadurch werden die Finger bei zwangloser Beugung, die nicht darauf ausgeht, die Finger genau parallel der Mittellinie des Unterarmes zu beugen, immer etwas nach der Kleinfingerseite hinbewegt. So ist es denn leicht erklärlich, daß die Finger bei Leuten, die ihre Hände und Finger sehr viel beanspruchen, allmählich dauernd mehr oder weniger nach der Kleinfingerseite abgedrängt werden, je älter sie werden, um so mehr.

Schon seit jeher habe ich daher in der Vorlesung die Hand mit ausgeprägter Abdrängung der Finger nach der Kleinfingerseite, bei der also der

Fig. 1. Strichpause des Röntgenbildes der L. Hand R. Ficks bei zwangloser Fingerhaltung. (Aufnahme in der I. mediz. Klinik d. Univ. Berlin, Vorstand W. His.)

Fig. 2. Strichpause des Röntgenbildes der R. Hand R. Ficks bei zwangloser Fingerhaltung.
(Aufnahme in der I. mediz. Klinik d. Univ. Berlin, Vorstand W. His.)

Fig. 3. Strichpause des Röntgenbildes der R. Hand R. Ficks bei »geradeaus gestelltem Zeigefinger«. (Aufnahme in der I. mediz. Klinik d. Univ. Berlin, Vorstand W. His.)

Zeigefinger gegen den Ringfinger sehr kurz erscheint, »Arbeitshand«[1] genannt und ihr die »Feierhand« oder »geschonte Hand«, bei der die Finger weniger oder gar nicht abgedrängt sind, entgegengestellt.

Wie stark die Abbiegung der Finger, ohne daß eine Krankheit vorliegt, ausgeprägt sein kann, sehen wir auf einem Bild (Fig. 4), das ich Hrn. Oberarzt Dr. Pichler in Klagenfurt verdanke, einem besonders scharfen Beobachter der anatomischen Abarten beim Lebenden. Hr. Dr. Pichler fand diese Hände bei einem Zimmermann, und zwar bei durchaus gesunden Gelenken. Da er dem

Fig. 4. Arbeitshände eines Zimmermannes.
(Aufnahme durch Hrn. Oberarzt Dr. K. Pichler in Klagenfurt.)

Fall zum ersten Mal begegnete, bat er mich um Auskunft. Nachdem ich Hrn. Dr. Pichler die bei den Ärzten bisher wenig bekannte Tatsache und ihre Erklärung mitgeteilt, richtete er sein Augenmerk auf diesen Punkt und stellte nun bei seinen Kranken leichtere Grade der Abweichung sehr häufig fest, vor allem, d. h. in höherem Grade bei alten männlichen und weiblichen Schwerarbeitern, namentlich vom Lande, aber auch bei fleißigen städtischen Hausfrauen.

Als Vorkommnis bei der »entstellenden Gelenkentzündung«, die von den Laien meist mit der Gicht verwechselt wird, ist die Fingerabweichung seit langem bekannt. K. Pichler glaubt, daß das besonders häufige Vorkommen stark ausgeprägter Schrägstellung hier darauf beruhe, daß die Gelenke bei dieser Krankheit schlaffer, nachgiebiger geworden seien, und die

[1] W. Braune hat diesen Namen übrigens noch nicht gebraucht, was ich hier erwähnen möchte, da K. Pichler in der Überschrift seiner dankenswerten Untersuchung: Die Stellung der Finger bei veralteten Gelenkleiden und die Arbeitshand (W. Braune). Mitteilungen aus d. Grenzgeb. d. Mediz. u. Chirurg. 33. Bd., 1921, S. 249, dem Ausdruck »Arbeitshand« W. Braunes Namen in Klammern zufügte. Ich erwähne diesen Umstand hier, damit sich nicht etwa jemand vergeblich bemüht, den Namen in Braunes Schriften zu finden.

Schiefstellung daher schon in jüngeren Jahren und in höherem Grade auftrete wie gewöhnlich. W. His[1], ein Hauptforscher auf diesem Gebiet, tritt dagegen, wohl mit Recht, für die Anschauung ein, daß Muskellähmungen dabei im Spiele seien. Er denkt dabei namentlich an die sogenannten Spulwurmmuskeln, die nämlich an der Speichenseite der Grundgelenke vorbeiziehen und dem ellenwärts gerichteten Teil des Zuges der Fingerbeuger bis zu einem gewissen Grad entgegenwirken. Man könnte vielleicht daran denken, daß gerade von der Mitbeteiligung dieser Muskeln an der Erkrankung es abhängt, ob bei dem Leiden sich eine stärkere Schiefstellung ausbildet oder nicht. Vorbedingung ist aber wohl immer die gut erhaltene lebhafte Tätigkeit der Hauptfingerbeuger mit ihrem ellenwärts gerichteten Zug.

Unter den persönlichen Kennzeichen der Hand ist auch die verschiedene Länge des Daumens zu nennen, die seinerzeit bei den Wahrsagern eine große Rolle spielte. D. h. ich darf eigentlich nicht sagen, »seinerzeit«, denn leider wagt sich die Handwahrsagekunst auch heutzutage wieder an das Licht, und selbst weitverbreitete Blätter scheuen sich nicht, die abenteuerlichsten Behauptungen über die Bedeutung der Handlinien in ihre Spalten aufzunehmen, wie jüngst das Berliner Tageblatt über die Handlinien Max Liebermanns. Nach der alten Handwahrsagekunst sollte ein langes Nagelglied am Daumen auf starken Willen hinweisen, ein langes Grundglied auf besondere logische Veranlagung, ein langer Mittelhandknochen auf Sinnlichkeit. Sokrates, Galilei, Newton, Leibniz und Fourier sollen sehr kleine Daumen besessen haben, Voltaire hingegen einen besonders langen Daumen.

Einen auffällig langen Daumen zeigt, wie ich feststellte, auch der angeblich echte Gipsabguß der Hand Luthers in der Stadtkirche zu Halle. Auch Albrecht Dürer besaß offenbar einen besonders langen Daumen, wie aus seinen Selbstbildnissen, sowohl dem von 1493 in Paris, wie dem von 1500 in München hervorgeht. Dürers Daumen reichte nach diesen Bildern sehr wesentlich über das erste Zwischengelenk des Zeigefingers hinaus.

Mit vollem anatomischen Recht weist übrigens Gg. Jac. Wolf (Die Kunst, Jahrgang 1919, Heft 5) auf die hervorragende Bedeutung der Hände für die Kennzeichnung der Persönlichkeit hin. Natürlich spielen als Kennzeichen nicht nur die Größenverhältnisse der einzelnen Teile der Hand, sondern auch die Beschaffenheit der Haut mit ihren Falten oder ihrer Glätte, die Entwickelung des Fettpolsters, der Füllungszustand und die persönlich ungemein wechselnde, sogar beim selben Menschen rechts und links ganz verschiedene Verlaufsweise der Blutadern sowie das Verhalten der Sehnen und nicht zum wenigsten die Art der Handhaltung und Bewegungen eine wesentliche Rolle.

Ganz wechselnd ist auch das Größenverhältnis zwischen den einzelnen Fingergliedern. Es läßt sich da keineswegs eine bestimmte Regel dafür aufstellen, wie das einige Künstler und auch Anatomen behauptet haben. W. Braune und O. Fischer gaben z. B. an, daß im allgemeinen immer das

[1] W. His, Wesen und Form der chronischen Arthritiden. B. klin. Wochschr. 1921 S. 4525.

Mittelglied und das Nagelglied größer seien als das Grundglied, und Langer hatte behauptet, beim Mittelfinger stünden die einzelnen Glieder des ganzen »Strahl's« in der Regel genau im Verhältnis von 8 : 5 : 3 : 2, so daß Grund- und Mittelglied genau so groß wie der Mittelhandknochen wären, und andrerseits Mittel- und Nagelglied zusammen gerade so groß wie das Grundglied. Nach Pfitzner ist das aber durchaus nicht als Regel hinzustellen — denn dieses Verhältnis liegt keineswegs etwa gerade in der Mitte der Abweichungen von ihm.

Form der Nagelglieder.

Noch gar nicht genauer anatomisch untersucht scheint mir die Form der Nagelglieder, obwohl doch die Betrachtung der lebenden Hand mehrere auffällig voneinander verschiedene Formen erkennen läßt, nämlich vor allem plumpe, dicke und schlanke, schmale Nagelglieder. Medizinisch wäre also eine pachy- und eine leptodactyle Form zu unterscheiden. Die Mittelform wäre vielleicht »Mesotelodactylie« zu nennen.

Die plumpen Nagelglieder haben wohl immer auch breite Nägel, die anderen schmale Nägel.

Die Bestimmung des Grades der Plump- oder Schmalheit ist natürlich sehr einfach durch das Verhältnis zwischen Breite und Länge z. B. in Hundertsteln der Länge gegeben. Wir brauchen also nur den »Längen-Breiten-Index« im Sinne der anthropologischen Bezeichnungsweise zu bestimmen. Nach meinen, freilich noch nicht sehr zahlreichen Messungen schwankt er an Lebenden mit der Schubleere Martins gemessen zwischen 50 % und fast 100 %. Die Grenze zwischen der plumpen und schmalen Form möchte ich für den Lebenden etwa bei 63 % setzen. Jedenfalls ist ein Nagelglied, bei dem die Breite 70 Hundertstel der Länge beträgt, als plump zu bezeichnen, eine Breite von weniger als 60 % hingegen als schmal. Der Unterschied zwischen den schmalen und breiten Fingern ist offenbar nicht nur in verschiedener Dicke und Länge der Weichteile begründet, denn auch bei den Knochen finden sich ähnliche Unterschiede. Die absoluten Knochenmaße der Nagelglieder sind natürlich bei derselben Person immer etwas kleiner als die Maße der lebenden oder ganzen Nagelglieder mitsamt den Weichteilen.

Überraschenderweise fand ich beim Vergleich der Maße der ganzen Nagelglieder mit denen am Knochenpräparat die Abnahme der Maße nicht gleichmäßig oder, was wohl noch näher läge, an der Fingerkuppe, d. h. »in der Länge« stärker, sondern im Gegenteil, die Breitenabnahme größer als die Abnahme der Länge. Daher sind die Hundertstelzahlen der Breite, die sog. »Breitenindizes« bei den Knochenfingern nicht größer, wie man erwarten sollte, sondern kleiner als bei den lebenden Fingern. Mit anderen Worten: die knöchernen Nagelglieder sind schlanker als die ganzen Nagelglieder, weil ihre Breite beim Mazerieren mehr abgenommen hat als ihre Länge. Diese Tatsache hängt wohl damit zusammen, daß die Breite durch die Weichteile auf beiden Seiten wächst, die Länge aber nur an der Spitze.

Bei den Knochenfingern möchte ich die Grenze zwischen den Schmal- und Plumpfingern (der Lepto- und der Pachyphalangie) etwa bei einer Breite von 60 % der Länge setzen.

Außer Skelettnagelgliedern sicherer, vor dem Mazerieren mit Nummern versehener Nagelglieder maß ich auch die Knochen bei frischen noch zusammenhängenden Bänderpräparaten, die ich auf dem Präpariersaal aufheben ließ, und Knochen am Lebenden. Durch das liebenswürdige Entgegenkommen der Hrn. Kollegen W. His und Axhausen konnte ich nämlich auch eine größere Zahl von Röntgenbildern untersuchen, die meist wegen Dauergelenkentzündungen aufgenommen wurden; wir wählten zur Messung natürlich diejenigen aus, an denen an den Nagelgliedern keine Verbildungen der Nagelgliedknochen eingetreten waren. Beim Daumen ist wegen seiner Schrägstellung zur Röntgenplatte bei den gewöhnlichen Aufnahmen natürlich keine Messung des Breite-Längeverhältnisses möglich; sehr oft steht auch der Kleinfinger so schräg zur Platte, daß sich die Breite nicht sicher feststellen läßt. Derartige Fälle habe ich eingeklammert.

Längen-Breitenverhältnis der Nagelglieder.

Rudolf Fick (Aufnahme aus der Klinik W. His).

	Linke Hand	Rechte Hand
	Länge : Basisbreite in %	Länge : Basisbreite in %
Daumen	22.0 : —	22.0 : —
Zeigefinger	18.0 : 12.0 = 66.6	18.0 : 12.0 = 66.6
Mittelfinger	18.0 : 13.0 = 72.2	18.0 : 13.0 = 72.2
Ringfinger	18.0 : 13.0 = 72.2	18.0 : 13.0 = 72.2
Kleinfinger	16.5 : 10.0 = 60.6	16.5 : 10.5 = 63.5

»Normalhand« eines 16jährigen der Chirurg. Charité-Poliklinik, Vorst. Prof. Dr. Axhausen.

Handlänge 188 mm von der Mittelfingerspitze bis zur proximalen Mondbeinberührungslinie.

	Linke Hand	Rechte Hand
Daumen	20.0 : —	20.0 : —
Zeigefinger	16.0 : 9.0 = 56.2	15.0 : 9.0 = 60.0
Mittelfinger	17.0 : 9.5 = 55.8	16.0 : 10.0 = 62.5
Ringfinger	17.0 : 8.5 = 50.0	17.0 : 9.0 = 55.8
Kleinfinger	15.0 : 8.0 = 53.3	15.0 : 8.0 = 53.3

Klinik W. His. »Tuberkulöser«, Bild v. C. Wüest, Aarau.

Zeigefinger	15.0 : 7.5 = 50.0	Die Nagelglieder besonders schlank, vielleicht durch Ernährungsmangel
Mittelfinger	15.5 : 9.0 = 58.1	
Ringfinger	16.5 : 9.0 = 54.5	
Kleinfinger	15.0 : 8.0 = 53.3	

Klinik His. Nr. 1635 Z. (spinale Kinderl.).

Zeigefinger	17.5 : 11.0 = 62.1	16.0 : 10.6 = 62.5
Mittelfinger	15.5 : 11.5 = 68.0	17.5 : 11.7 = 62.1
Ringfinger	18.5 : 11.5 = 62.2	18.5 : 10.0 = 54.1
Kleinfinger	17.5 : 11.0 = 62.1	16.5 : 8.5 = 51.5

Klinik His. Nr. 1976 Frau E. (Gicht).

Zeigefinger	14.5 : 10.0 = 68.9	13.5 : 9.5 = 70.3
Mittelfinger	15.0 : 10.5 = 70.0	15.0 : 10.0 = 66.6
Ringfinger	17.5 : 10.0 = 57.1	17.0 : 9.5 = 55.9
Kleinfinger	16.5 : 8.0 = 48.4	15.0 : 8.0 = 53.3

Klinik His. Nr. 593 (K.).

	Linke Hand	Rechte Hand
	Länge : Basisbreite = %	Länge : Basisbreite = %
Zeigefinger	17.0 : 11.0 = 64.7	17.0 : 11.5 = 70.3
Mittelfinger	16.0 : 12.0 = 75.0	16.0 : 11.5 = 71.5
Ringfinger	17.0 : 11.0 = 64.7	17.0 : 11.0 = 64.7
Kleinfinger	17.0 : 10.0 = 61.7	16.0 : 11.0 = 68.7

Klinik His. (»Arthrit. chron. Spindelform ohne Veränderung«.)

Zeigefinger	16.0 : 10.0 = 62.5	17.0 : 11.0 = 64.7
Mittelfinger	19.0 : 11.0 = 57.8	18.0 : 12.0 = 66.6
Ringfinger	17.0 : 10.0 = 58.7	17.0 : 10.5 = 61.7

Klinik His. Nr. 396 (Schl.).

Zeigefinger	15.0 : 10.0 = 64.5	17.0 : 10.0 = 58.7
Mittelfinger	17.0 : 12.0 = 70.6	16.0 : 11.0 = 68.7
Ringfinger	19.0 : 11.0 = 57.8	18.0 : 11.0 = 61.1
(Kleinfinger)	(17.5 : 9.0 = 51.4)	(17.0 : 8.5 = 50.0)

Klinik His (G.) nur Linke Hand.

Zeigefinger	16.5 : 11.0 = 66.6
Mittelfinger	20.0 : 12.0 = 60.0
Ringfinger	19.5 : 11.5 = 58.9
Kleinfinger	15.0 : 9.5 = 63.3

Klinik His. Aug. B. Nr. 76/10.

Zeigefinger	15.0 : 12.5 = 83.3	18.0 : 12.5 = 69.4
Mittelfinger	15.0 : 14.0 = 93.3	18.5 : 14.0 = 75.1
Ringfinger	17.5 : 13.0 = 74.2	19.5 : 12.0 = 61.5
Kleinfinger	16.5 : 8.0 = 48.6	(16.5 : 9.0 = 54.5)

Klinik His. Nr. 238 Frau M. (Heberdaissche Knoten).

Zeigefinger	18.5 : 14.0 = 75.1	15.0 : 15.0 = 100.0 krank
Mittelfinger	18.5 : 12.0 = 64.1	18.0 : 13.0 = 72.2
Ringfinger	18.5 : 12.0 = 64.1	17.5 : 11.0 = 65.7
(Kleinfinger)	(16.0 : 11.0 = 68.7)	(17.0 : 11.0 = 64.7) krank

Klinik His. »Primäre Arthrit.«.

Zeigefinger	— —	17.5 : 12.0 = 68.6
Mittelfinger	18.5 : 12.0 = 64.1	18.5 : 12.0 = 64.1
Ringfinger	19.0 : 12.0 = 63.2	19.5 : 11.0 = 56.4
Kleinfinger	(17.0 : 10.0 = 58.7)	17.5 : 10.0 = 57.1

Klinik His.	Nr. 190 (Sch.).	Nr. 161 (Frau H.).
	Rechte Hand	Rechte Hand
Zeigefinger	16.0 : 11.0 = 68.7	16.0 : 10.0 = 65.6
Mittelfinger	17.0 : 11.0 = 61.7	17.5 : 11.0 = 62.1
Ringfinger	18.0 : 10.5 = 58.3	18.5 : 11.0 = 59.4
Kleinfinger	(16.0 : 9.0 = 56.2)	16.0 : 10.0 = 62.5 gute Lage

Klinik His.	Nr. 188 (Frau S.).	Nr. 173.
	Linke Hand	Rechte Hand
Zeigefinger	13.0 : 10.0 = 76.9	16.0 : 10.3 = 65.6
Mittelfinger	14.0 : 10.0 = 71.4	17.0 : 11.0 = 64.7
Ringfinger	15.5 : 10.0 = 64.5	17.5 : 11.0 = 62.1
Kleinfinger	14.0 : 8.5 = 67.1	16.0 : 9.5 = 59.4

Klinik His.	Nr. 125 (Se.).	Nr. 111 (So.).
	Linke Hand	Rechte Hand
	Länge : Basisbreite = %	Länge : Basisbreite = %
Zeigefinger	18.5 : 12.0 = 64.1	19.0 : 12.0 = 63.2
Mittelfinger	18.5 : 12.5 = 67.5	19.5 : 12.5 = 64.1
Ringfinger	20.0 : 12.0 = 60.0	21.0 : 13.0 = 61.9
Kleinfinger	18.0 : 10.0 = 61.1	18.0 : 10.5 = 61.1

Klinik His.	Nr. 92 (St.).	Nr. 116 (Le.).
Zeigefinger	13.5 : 9.0 = 66.6	16.5 : 11.0 = 66.6
Mittelfinger	15.0 : 10.5 = 70.0	17.0 : 12.0 = 70.6
Ringfinger	15.0 : 9.5 = 63.3	19.0 : 11.0 = 57.8
(Kleinfinger)	(14.0 : 7.0 = 50.0)	(17.0 : 9.0 = 52.9)

Klinik His.	Nr. 85 (Gu.).	Nr. 146.
	Linke Hand	Linke Hand
Zeigefinger	18.0 : 11.0 = 61.1	15.0 : 10.0 = 66.6
Mittelfinger	19.5 : 12.0 = 61.5	15.5 : 10.0 = 64.5
Ringfinger	19.5 : 10.5 = 53.8	18.0 : 9.5 = 52.8
Kleinfinger	16.0 : 8.5 = 53.1	(14.5 : 8.0 = 55.2)

Nach diesen Messungen schwankte die Nagelgliedbreite

beim	Zeigefinger	zwischen	50.2%	und	83.3%	der	Länge,
»	Mittelfinger	»	55.8 »	»	93.3 »	»	» ,
»	Ringfinger	»	52.8 »	»	74.2 »	»	» ,
»	Kleinfinger	»	51.5 »	»	67.1 »	»	» .

Man kann danach wohl sagen, daß im allgemeinen der Kleinfinger das schlankeste Nagelglied hat, dann der Ringfinger, während der Mittelfinger das plumpeste besitzt.

Außer der Plumpheit (Kürze) oder Schmalheit (Länge) im allgemeinen sehen wir bei den Nagelgliedern aber auch, wie jeder weiß, noch zwei andere besondere Formarten, die allerdings häufig in gewissem Zusammenhang mit der ersten Unterscheidung stehen. Die einen Nagelglieder sind nämlich mehr abgerundet viereckig, vorne rundkuppig, manchmal förmlich »klumpig«, andere hingegen mehr »kegelförmig«, vorn fast »spitz zulaufend«. Medizinisch wären die ersteren vielleicht als »bolodactyle«, die anderen als »oxydactyle« Form zu benennen. Die letztere ist bekanntlich beim ♀ Geschlecht häufiger. Für den verschiedenen Grad der Klump- oder Spitzfingrigkeit eine einfache, beim Lebenden leicht anzuwendende Meßart anzugeben, scheint mir nicht möglich.

Es ist nun die Frage, ob die spitze Form immer nur bei schmalen, die klumpige bei breiten Fingern vorkommt, und ob der Unterschied hier nur in den Weichteilen begründet ist oder auch hier im Knochen, wie wir es bei der »Breit-« und »Schmalform« im allgemeinen sehen. Jedenfalls finden wir aber auch an den Skeletten nicht nur breite und schmale Nagelglieder, sondern auch einerseits mehr gleichmäßig breite, also zylindrische, und andererseits vorn mehr zugespitzte.

Aber auch bei den Knochen ist eine ganz einwandfreie, einfache Meßart für den Grad der Klump- oder Spitzfingrigkeit wohl kaum anzugeben. Immerhin möchte ich glauben, daß wir dadurch einen Anhalt für die Beurteilung gewinnen können, daß wir die Breite des Nagelgliedes an seiner Grundfläche vergleichen mit seiner größten vorderen Breite, d. h. der größten Breite der sog. »hufförmigen Rauhigkeit«, an der sich der tiefe Fingerbeuger ansetzt.

An denselben Skeletthänden und Röntgenbildern von lebenden Händen, an denen ich das Längen-Breitenverhältnis der Nagelglieder maß, untersuchte ich auch das Verhältnis zwischen der Breite der Grundfläche und der Hufrauhigkeit. Ich fand an Knochenhänden folgende Werte:

Daumen	Zeigefinger	Mittelfinger	Ringfinger	Kleinfinger
Grundfläche : Hufrauhigkeit = Hufbreite beträgt % der Grundflächenbreite	Grundfläche : Hufrauhigkeit = Hufbreite beträgt % der Grundflächenbreite	Grundfläche : Hufrauhigkeit = Hufbreite beträgt % der Grundflächenbreite	Grundfläche : Hufrauhigkeit = Hufbreite beträgt % der Grundflächenbreite	Grundfläche : Hufrauhigkeit = Hufbreite beträgt % der Grundflächenbreite
14.0 : 8.5 = 67.1	10.0 : 5.0 = 50.0		10.0 : 6.0 = 60.0	9.0 : 4.5 = 50.0
15.0 : 9.0 = 60.0	12.0 : 7.0 = 58.3	12.0 : 9.0 = 75.0	12.0 : 9.0 = 75.0	10.0 : 5.0 = 50.0
15.0 : 10.0 = 66.6	11.0 : 8.0 = 72.7	12.0 : 9.0 = 75.0	10.0 : 6.0 = 60.0	9.0 : 6.0 = 66.6
12.5 : 8.0 = 64.0	9.0 : 5.5 = 61.1		9.5 : 8.2 = 86.3	9.0 : 6.0 = 66.6
15.0 : 11.0 = 73.3		10.0 : 6.0 = 60.0	11.0 : 6.0 = 54.5	8.0 : 5.0 = 62.5
16.0 : 10.0 = 62.5	11.0 : 6.5 = 59.1	12.5 : 7.0 = 56.0	12.5 : 7.0 = 56.0	10.0 : 6.0 = 60.0
16.0 : 9.5 = 59.4	11.5 : 7.0 = 60.7	12.0 : 6.5 = 54.2	12.0 : 6.5 = 54.2	9.5 : 4.5 = 47.2
15.0 : 7.5 = 50.0	13.0 : 7.0 = 53.8	12.0 : 7.0 = 58.3	12.0 : 7.5 = 62.5	9.5 : 6.0 = 63.1
14.5 : 9.5 = 65.5				8.0 : 5.0 = 62.5
14.5 : 10.0 = 68.9				11.0 : 5.0 = 45.4
15.0 : 9.0 = 60.0				9.0 : 5.5 = 61.1
15.0 : 9.0 = 60.0				8.0 : 5.0 = 62.5
15.0 : 10.5 = 70.0				9.5 : 7.0 = 73.6
15.0 : 11.0 = 73.3				9.5 : 6.5 = 68.4
				8.5 : 5.0 = 58.8
				9.0 : 6.0 = 66.6
				9.5 : 6.0 = 63.1
				10.0 : 6.5 = 65.0
				10.0 : 8.0 = 60.0

An Röntgenbildern maß ich folgende Werte:

Rudolf Fick (Aufnahme aus der Klinik W. His).

	Linke Hand	Rechte Hand
	Breite der Grundfläche : Breite der Hufrauhigkeit = %	Breite der Grundfläche : Breite der Hufrauhigkeit = %
Daumen	12.0 : 8.0 = 66.6	12.0 : 8.0 = 66.6
Zeigefinger	12.0 : 8.0 = 66.6	12.0 : 8.0 = 66.6
Mittelfinger	13.0 : 8.0 = 61.5	13.0 : 8.0 = 61.5
Ringfinger	13.0 : 8.0 = 61.5	13.0 ; 8.0 = 61.5
Kleinfinger	10.0 : 6.0 = 60.0	11.0 : 6.0 = 54.5

16jähriger Jüngling (Chirurg. Poliklinik der Charité, Vorstand Prof. Axhausen).

(Daumenstellung für Messungen ungünstig.)

	Linke Hand	Rechte Hand
Zeigefinger	9.0 : 6.0 = 66.6	9.0 : 6.0 = 66.6
Mittelfinger	9.5 : 6.0 = 68.1	10.0 : 6.0 = 60.0
Ringfinger	8.5 : 5.5 = 64.7	9.0 : 5.5 = 61.1
Kleinfinger	8.0 : 4.5 = 56.2	8.0 : 4.5 = 56.2

Tuberkulöser (C. Wüest), Klinik W. His. Nr. x (Gr.)

	Linke Hand Breite der Grundfläche : Breite der Hufrauhigkeit = %	Linke Hand Breite der Grundfläche : Breite der Hufrauhigkeit = %
Zeigefinger	7.5 : 6.0 = 80.0	11.0 : 8.0 = 72.7
Mittelfinger	9.0 : 6.5 = 72.2	12.0 : 9.5 = 79.2
Ringfinger	9.0 : 6.0 = 66.6	11.5 : 8.5 = 73.0
Kleinfinger	8.0 : 4.0 = 50.0	9.5 : 6.5 = 68.4

Nr. 1635 (Z.) Klinik His.

	Linke Hand	Rechte Hand
Zeigefinger	11.0 : 7.5 = 68.2	10.0 : 6.0 = 60.0
Mittelfinger	11.5 : 9.5 = 82.6	11.0 : 7.0 = 63.6
Ringfinger	11.5 : 8.5 = 73.0	10.0 : 6.5 = 65.0
Kleinfinger	11.0 : 5.0 = 45.4	8.0 : 5.0 = 62.5

Nr. 1976 Frau E. (Gicht).

Zeigefinger	10.0 : 7.0 = 70.0	9.5 : 6.0 = 63.1
Mittelfinger	10.5 : 8.0 = 76.2	10.0 : 7.0 = 70.0
Ringfinger	10.0 : 8.0 = 80.0	9.5 : 6.5 = 68.4
Kleinfinger	8.0 : 5.5 = 68.7	8.0 : 5.0 = 62.5

Nr. 593 (K.).

Zeigefinger	11.0 : 9.0 = 81.8	11.5 : 9.5 = 82.6
Mittelfinger	12.0 : 10.0 = 83.3	11.5 : 9.5 = 82.6
Ringfinger	11.0 : 10.0 = 90.9	11.0 : 10.0 = 90.9
Kleinfinger	10.5 : 8.5 = 80.5	11.0 : 8.0 = 72.7

Nr. x (Arthrit. chron.).

Zeigefinger	10.0 : 7.0 = 70.0	11.0 : 8.0 = 72.7
Mittelfinger	11.0 : 8.0 = 72.7	12.0 : 8.0 = 66.6
Ringfinger	10.0 : 7.0 = 70.0	10.5 : 7.5 = 71.4
Kleinfinger	steht ungünstig	steht ungünstig

Nr. 396 (Schl.).

Zeigefinger	10.0 : 6.5 = 65.0	10.0 : 7.0 = 70.0
Mittelfinger	12.0 : 6.5 = 54.2	11.0 : 8.0 = 72.7
Ringfinger	11.0 : 7.0 = 63.6	11.0 : 7.5 = 68.2
Kleinfinger	9.0 : 6.0 = 66.6	8.5 : 6.0 = 70.6

Nr. 76/10 (A. Bl.).

Zeigefinger	12.5 : 9.0 = 72.0	12.5 : 9.0 = 72.0
Mittelfinger	14.0 : 10.0 = 71.4	14.0 : 10.5 = 75.0
Ringfinger	13.0 : 10.0 = 76.9	12.0 : 10.0 = 83.3
Kleinfinger	8.0 : 6.0 = 75.0	9.0 : 6.0 = 66.6

Nr. 238 (Frau M.).

Zeigefinger	14.0 : 7.5 = 53.6	15.0 : 8.0 = 53.3
Mittelfinger	12.0 : 9.0 = 75.0	13.0 : 9.0 = 69.1
Ringfinger	12.0 : 8.5 = 70.8	11.0 : 8.0 = 69.6
Kleinfinger	krank	11.0 : 6.0 = 54.5

Nr. x (Prim. Arthr.).

Zeigefinger	fehlt	12.0 : 9.5 = 79.2
Mittelfinger	12.0 : 9.0 = 75.0	12.0 : 9.0 = 75.0
Ringfinger	12.0 : 9.0 = 75.0	11.0 : 9.0 = 81.8
Kleinfinger	10.0 : 6.5 = 65.0	10.0 : 6.0 = 60.0

	Nr. 190 (Sch.).	Nr. 161 (Frau H.).
	Rechte Hand	Rechte Hand
	Breite der Grundfläche : Breite der Hufrauhigkeit = %	Breite der Grundfläche : Breite der Hufrauhigkeit = %
Zeigefinger	11.0 : 7.5 = 68.2	10.0 : 8.0 = 80.0
Mittelfinger	11.5 : 8.0 = 69.6	11.0 : 8.5 = 77.3
Ringfinger	10.5 : 7.0 = 66.6	11.0 : 9.0 = 81.8
Kleinfinger	9.0 : 5.0 = 55.5	10.0 : 9.0 = 90.0

	Nr. 188 (Frau Sch.).	Nr. 17 (Schw.).
	Linke Hand	
Zeigefinger	10.0 : 7.0 = 70.0	10.5 : 7.0 = 66.6
Mittelfinger	10.0 : 8.5 = 85.0	11.0 : 7.5 = 68.2
Ringfinger	10.0 : 8.5 = 85.0	11.0 : 8.0 = 72.7
Kleinfinger	8.5 : 6.0 = 70.6	9.5 : 6.0 = 63.1

	Nr. 125 (S.).	Nr. 111 (L.).
	Rechte Hand	Rechte Hand
Zeigefinger	12.0 : 8.0 = 66.6	12.0 : 7.5 = 62.5
Mittelfinger	12.5 : 8.5 = 68.0	12.5 : 8.0 = 64.0
Ringfinger	12.0 : 9.5 = 79.2	13.0 : 8.0 = 61.5
Kleinfinger	10.0 : 7.0 = 70.0	10.5 : 6.0 = 57.1

	Nr. 116 (L.).	Nr. 92 (St.).
	Rechte Hand	Linke Hand
Zeigefinger	11.0 : 7.0 = 62.6	9.0 : 6.0 = 66.6
Mittelfinger	12.0 : 7.0 = 58.5	10.5 : 7.0 = 66.6
Ringfinger	11.0 : 7.0 = 62.6	9.5 : 6.5 = 68.4
Kleinfinger	9.0 : 5.5 = 61.1	7.0 : 4.0 = 56.9

	Nr. 85 (G.).	Nr. 146 (E.).
		Linke Hand
Zeigefinger	11.0 : 8.0 = 72.7	10.0 : 7.0 = 70.0
Mittelfinger	12.0 : 9.0 = 75.0	10.0 : 7.0 = 70.0
Ringfinger	10.5 : 8.0 = 76.2	9.5 : 7.0 = 73.6
Kleinfinger	8.5 : 5.5 = 64.7	8.0 : 5.0 = 62.5

Nach diesen Messungen schwankte die Breite der »Hufrauhigkeit« des Nagelgliedes zwischen 45.4 % und 93.3 % der Breite der Grundfläche des Nagelgliedes, d. h. sie kann offenbar weniger als die Hälfte und andererseits fast ebensoviel wie die Grundfläche messen. Die Schwankungen bei den einzelnen Fingern sind folgende:

Beim Daumen von 50.0—78.6 %,
» Zeigefinger » 50.0—83.3 » ,
» Mittelfinger » 54.2—93.3 » ,
» Ringfinger » 54.2—90.9 » ,
» Kleinfinger » 45,4—90.0 » .

Die gefundenen Zahlen zeigen, wie man sieht, sehr deutliche persönliche Unterschiede in den Maßverhältnissen, so daß man nicht nur die »Plump-« und »Schmalfingrigkeit« (s. oben), sondern auch die »Klump- oder Rundfingrig-

keit« und die »Spitzfingrigkeit« zahlenmäßig unterscheiden kann. Und man kann nach den Messungen nach dem aus den Zahlentafeln hervorgehenden Häufigkeitsverhältnis der verschiedenen Werte bei den verschiedenen Fingern wohl sagen, daß der Zeigefinger, wie es auch die tägliche Erfahrung ohne genaue Messung schon lehrt, der am häufigsten spitzeste Finger ist, dann der Kleinfinger und der Daumen, während der Ringfinger meist mehr gleichmäßig dick, also walzenförmig (zylindrisch) gefunden wurde.

Die Grenze der Meso(Oxy-, Bolo-)daktylie zwischen den »Spitz-« und »Klumpfingern«, also der Oxy- und der Bolodaktylie, dürfte etwa bei 70% der Grundbreite liegen, d. h. Nagelglieder, bei denen die Breite der Hufrauhigkeit wesentlich mehr als 70% ihrer Grundbreite beträgt, dürften im Leben »klumpig« oder »rundkuppig« erschienen sein, solche, deren Hufrauhigkeitsbreiten weniger als 70% der Grundbreite besitzen, dürften wohl »spitz« erschienen sein.

Es ist aber sehr zu betonen, daß die Schmalheit der Finger durchaus keine Spitzheit bedingt, wie wir namentlich am Ringfinger erkennen, der meist ein sehr schlankes, schmales Nagelglied hat, das aber weit seltener als »spitz« bezeichnet werden kann, als das des Zeigers, das sehr häufig ziemlich kurz, aber deutlich spitz ist. Nur beim Kleinfinger ist meist Schlankheit und Spitzigkeit vereinigt.

Nach diesen Angaben über die Größenverhältnisse der Hände und ihrer Teile im allgemeinen, wollen wir sehen, wie die Hände W. Waldeyers in Hinsicht auf die besprochenen Punkte gestaltet waren.

Zunächst noch ein Wort über die Gewinnung der Maße: Nach Waldeyers Wunsch wurden die mazerierten Knochen der Hände nach dem von H. Virchow ausgebildeten Verfahren aufgestellt, nämlich auf Grund der vorher von der ganzen mit Formol gehärteten Hand angefertigten Gipsabgüsse[1]. Die erste Gipsform wurde bei der am Unterarm senkrecht herabhängenden Hand genommen. Die Form, die dabei die Hand zeigt, ist selbstverständlich außer von der natürlichen Form und Anordnung der Knochen und Weichteile auch von dem Druck der zur Härtung eingespritzten Flüssigkeit und von der Schwere abhängig. (Die Einwirkung der Schwere ließe sich, wenn man wollte, durch Einbringen des Präparates während seiner Härtung in eine Flüssigkeit vom gleichen spezifischen Gewicht wie die Hand, aufheben.)

Der Druck der eingespritzten Flüssigkeit, der alle Blut- und Lymphräume strotzend füllt, bringt offenbar auch eine Quellung aller Weichteile, z. B. auch der Muskeln hervor, die auch auf die Stellung der Finger nicht ganz ohne Einfluß ist, wie ich mich durch Beobachtung anderer Präparate vor und nach der Einspritzung überzeugt habe. Aber auch diese »Einspritzstellung«, wenn ich so sagen soll, wird je nach der Gewohnheitsstellung der Finger bei Lebzeiten, der gewöhnlichen Muskelfaserlänge usw. eine verschiedene sein.

Jedenfalls macht die Stellung der Hände Waldeyers unter dem Einfluß der Einspritzung und der Schwere, wie Tafel II und IV erkennen lassen, einen ganz natürlichen und ungezwungenen Eindruck. H. Virchow hat die Stellung

[1] Vgl. die ausführliche, S. 219 erwähnte Abhandlung H. Virchows.

daher in einem Vortrag in der Anthropologischen Gesellschaft nicht mit Unrecht als eine »sprechend lebendige« bezeichnet.

Die Stellung ist um so lebendiger, als die Finger unter dem Einfluß der durch die Einspritzung gequollenen Muskeln offenbar etwas mehr gebeugt sind, als sie es bei vollständig »ruhender« Hand bei Lebzeiten gewesen sind.

Nun die Maße! Die Speiche maß R. 23.0, L. 22.5 cm vom Griffel bis zum oberen Tellerrand. Die Elle maß R. 23.8, L. 23.5 cm. Dann wäre vor allem über die Handlänge zu sagen, daß sie nach den Messungen an der Gips- und Knochenhand für die lebende gestreckte Hand auf etwas über 18 cm geschätzt werden kann. Die Körpergröße Waldeyers war bei Lebzeiten nach den Angaben der Familie 166 cm. Sonach betrug die Handlänge 10.9 – 11.0 % der Körperlänge, was etwas über dem von den meisten Künstlern und Anatomen angegebenen Mittelmaß von 10.04 oder nach Zeising 10.03 % liegt; sie war also zwar absolut genommen klein, im Verhältnis zur Körperlänge aber eher groß. Sehr gut paßt die Handlänge von 18 cm zu der Angabe der Künstler, daß sie gerade so groß sein soll wie die Gesichtshöhe, d. h. wie der Abstand der oberen Stirngrenze (von der gewöhnlichen Haaransatzstelle) bis zum Kinn, denn diese darf bei Waldeyer nach dem Gipsabguß, d. h. der Totenmaske, auch auf 18 cm geschätzt werden. Eine genaue Messung dieser Größe ist natürlich nicht ausführbar, da die Stirne Waldeyers bis zum Scheitel hinauf vom Haarwuchs entblößt war.

Die Kopfhöhe am Gipsabguß, d. h. der Abstand einer wagrechten Ebene an den Scheitel von einer wagrechten Ebene an das Kinn, war 20 cm. Die Handlänge ist daher gerade $^{9}/_{10}$ der Kopfhöhe. Am Skelett mißt die Schädelhöhe 18 cm vom Kinn, 15 cm vom großen Hinterhauptloch.

Der Handgelenkumfang beträgt am Gipsabguß L. 18.2, R. 18.0 cm.

Die Fleischhandlänge war L. 9.4 cm, R. 9.0, d. i. etwa 5.5 % der Körperlänge, also auch länger als das gewöhnlich angenommene Mittel. Von der ganzen Handlänge beträgt die Fleischhandlänge etwa gerade die Hälfte.

Die Handbreite an den Mittelhandknöcheln war im senkrechten Abstand (Rand-Tangentenentfernung) mit der Schubleere gemessen L. 8.10, R. 8.25 cm. Mit dem Bandmaß betrug sie 10 cm (Waldeyers Handschuhnummer war $7^{1}/_{2}$).

(Die Fingerlänge des Mittelfingers an der Hohlhand war mit dem Zirkel gemessen L. und R. 6.4 cm, mit dem Bandmaß 7 cm, weil die Finger mäßig gebeugt waren.)

Die Handgelenkbreite war L. 6.3 cm, R 6.1 cm, d. i. etwa 3.7 % der Körperlänge, demnach etwas breiter als in der Regel, wo sie 3.4 % ausmacht.

Die Länge der einzelnen Fingerstrahlen am Knochengerüst ist folgende, wenn man den Abstand der Mitten der Gelenkflächen mißt, wie es Pfitzner als zweckmäßig vorgeschlagen hat, also z. B. den Griffelfortsatz des Mittelfingermetakarps nicht mitmißt. H. Virchow hat bei seinen Messungen die größten Längen der Knochen gemessen und daher etwas größere Werte erhalten.

	Linke Hand		Rechte Hand	
	Finger cm	Ganzer Strahl cm	Finger cm	Ganzer Strahl cm
Daumen	5.25	9.55	5.20	9.60
Zeigefinger	7.65	14.00	7.75	14.00
Mittelfinger	8.50	14.40	8.40	14.30
Ringfinger	8.15	13.25	8.20	13.40
Kleinfinger	6.30	11.15	6.60	11.45

Man sieht aus der Zahlentafel, daß der Zeigefinger L. um 5, R. um 4.5 mm kürzer als der Ringfinger ist, während der ganze Zeigefingerstrahl, d. h. der Finger im Verein mit seinem Mittelhandknochen L. um 7.5, R. um 6 m länger als der des Ringfingers ist.

Die Länge der Knochenhand, d. h. die Länge des ganzen Mittelfingerstrahls mit den Handwurzelknochen war L. 14.4 + 3.4 = 17.8 cm, R. 14.3 + 3.4 = 17.7 cm. Die Länge der Knochenhand ist demnach links 10.72 % der Körperlänge, rechts 10.66 %, während die lebende Hand wohl, wie vorhin bemerkt, 10.9—11 % der Körperlänge maß. Die Länge des Mittelfingerstrahls betrug wie früher bemerkt, L. 14.4 cm, d. i. nur 8.7 %, R. 14.3, d. i. 8.6 % der Körperlänge. Pfitzner fand in 80 Fällen bei einer Körpergröße von 161—175 cm diese Länge mindestens 8.56, höchstens 10.06 % (im Mittel 9.10 %) der Körperlänge. Also war das vordere Knochengerüst der Hand Waldeyers im Verhältnis zu seiner Körpergröße etwas kleiner als das Pfitznersche Mittel ergibt, während die ganze Handlänge mit der Handwurzel und den Weichteilen, wie wir eben sahen, etwas größer im Verhältnis zur Körperlänge war als das allgemein von den Künstlern angegebene Mittelmaß.

Das Verhältnis der Handlänge zur Speichenlänge betrug L. 18 : 22.5 = 80 %, R. 17.9 : 23 = 78 % (die Speichenlänge beträgt L. 13.5 %, R. 13.9 % der Körperlänge).

Die Länge des Daumenstrahles ist L. 68.2 %, R. 68.6 % der Länge des Zeigefingerstrahles. Bei der ganzen Hand entsprach die Daumenspitze etwa dem ersten Zwischengelenk des Zeigefingers, der Daumen ist daher entschieden als lang zu bezeichnen.

Die Gestalt der Nagelglieder an Waldeyers Hand zeigt eine ziemlich breite Form (Pachytelophalangie). Die Verhältnisse der Breite zur Länge der Nagelglieder an der ganzen Hand (Gipsabguß) sind folgende:

	Linke Hand	Rechte Hand
	Breite : Länge = %	Breite : Länge = %
Daumen	24.0 : 31.0 = 77.4	23.0 : 29.0 = 79.0
Zeigefinger	19.0 : 26.0 = 73.1	19.0 : 26.0 = 73.1
Mittelfinger	19.0 : 27.0 = 70.4	19.0 : 26.0 = 73.1
Ringfinger	18.0 : 26.0 = 69.2	18.0 : 26.0 = 69.2
Kleinfinger	17.0 : 24.0 = 70.8	17.0 : 23.5 = 72.6

Das Verhältnis der Breite zur Länge der knöchernen Nagelglieder ist aus folgender Zahlentafel zu ersehen. Fast alle Knochen gehören der breiten Form an.

a) Gipsabguß der rechten Hand von W. v. Waldeyer-Hartz †.
(Schwellung durch krankhafte Stauung und künstliche Gefäßfüllung.)
Aufnahme durch Prof. F. Kopsch, aus H. Virchow, Die Hände von
W. v. Waldeyer-Hartz, Ztsch. f. Anat. u. Entw. Bd. 68 Heft 1, 1923.

b) Skelett derselben Hand nach dem Gipsformverfahren H. Virchows aufgestellt.

a) Gipsabguß der rechten Hand von W. v. Waldeyer-Hartz †.
(Schwellung durch krankhafte Stauung und künstliche Gefäßfüllung.)
Aufnahme durch Prof. F. Kopsch, aus H. Virchow, Die Hände von
W. v. Waldeyer-Hartz, Ztsch. f. Anat. u. Entw. Bd. 68 Heft 1, 1923.

b) Skelett derselben Hand nach dem Gipsformverfahren
H. Virchows aufgestellt.

Fick: Über die Maßverhältnisse der Hand mit Angaben über die Hände von W. v. Waldeyer-Hartz †.

a) Gipsabguß der linken Hand von W. v. Waldeyer-Hartz †.

Fick: Über die Maßverhältnisse der Hand mit Angaben

b) Skelett derselben Hand nach dem Gipsformverfahren
H. Virchows aufgestellt.

die Hände von W. v. Waldeyer-Hartz †.

a) Gipsabguß der linken Hand von W. v. Waldeyer-Hartz †.

b) Skelett derselben Hand nach dem Gipsformverfahren H. Virchows aufgestellt.

Fick: Über die Maßverhältnisse der Hand mit Angaben über die Hände von W. v. Waldeyer-Hartz †.

	Linke Hand	Rechte Hand
	Breite : Länge = %	Breite : Länge = %
Daumen	16.0 : 22.0 = 81.8	15.0 : 23.0 = 65.2
Zeigefinger	11.0 : 17.5 = 62.8	11.0 : 17.5 = 62.8
Mittelfinger	11.5 : 17.0 = 67.7	12.0 : 17.0 = 70.6
Ringfinger	11.0 : 18.5 = **59.4**	11.0 : 18.0 = 61.1
Kleinfinger	9.75 : 16.0 = 60.9	10.0 : 17.0 = **58.8**

Über die Verschmälerung des Nagelgliedes nach vorn gibt folgende Tafel Auskunft:

	Linke Hand	Rechte Hand
	Breite der Grundfläche : Breite der Hufrauhigkeit = %	Breite der Grundfläche : Breite der Hufrauhigkeit = %
Daumen	16.0 : 10.5 = 65.6	16.0 : 11.0 = 73.3
Zeigefinger	11.0 : 7.0 = 63.6	11.0 : 7.0 = 63.6
Mittelfinger	11.5 : 7.5 = 66.9	12.0 : 8.0 = 66.6
Ringfinger	11.0 : 7.0 = 63.6	11.0 : 7.5 = 68.2
Kleinfinger	9.75 : 5.0 = 51.3	10.0 : 5.5 = 55.5

Die Zahlentafel ergibt die Zugehörigkeit der Nagelglieder zur rundlichen, nicht spitzen Form.

Die Fingerstellung zeigte bei Waldeyer, wie er ja selbst vermutete, offenbar ohne die Arbeiten Braunes darüber zu kennen, die sprechenden Kennzeichen der von mir vorhin geschilderten »Arbeitshand«. Seine Hand war fürwahr keine »Feierhand«! Wir sehen namentlich an der rechten Hand (s. Taf. I) deutlich den Zeigefinger ziemlich stark nach der Kleinfingerseite abgewichen und dadurch besonders »kurz« gegenüber dem Mittelfinger. Er scheint bei der Hand, wie sie uns der Gipsabguß zeigt, rechts um 19 mm, links um 17 mm kürzer als die Mittelfingerkuppe. Links steht er dabei um die Nagellänge, rechts noch um wesentlich mehr gegen die Ringfingerkuppe zurück. Eine Berührungsebene an die Zeigefingerkuppe schneidet den Ringfinger etwa entsprechend dem unter der Haut »verborgenen Rand« der Nagelplatte. Die Abbiegung des Zeigefingers nach der Ellenseite beträgt 27.7°. Die Abdrängung der Finger nach der Ellenseite hin ist bei Waldeyer natürlich, wie er selbst annahm, vor allem auf die unermüdliche Schreibarbeit, sicher aber auch auf die Arbeit mit dem Messer auf dem Präpariersaal und beim Mikroskopieren zurückzuführen. Durch diese dreifache Berufshandarbeit waren die Finger ja tagaus tagein stundenlang zur Bewegung gezwungen, und so bildete sich allmählich mit Notwendigkeit die seitliche Abdrängung aus. Dabei möchte, wie ich glaube, noch ein besonderer Umstand verstärkend gewirkt haben, nämlich Waldeyers schöne kraftvolle Schrift, bei der die Muskeln mehr arbeiten mußten, als wenn er eine flüchtige, zarte Handschrift geschrieben hätte.

Übrigens möchte ich noch hervorheben, daß man nicht etwa sagen darf, daß der Federhalter den Zeigefinger nach der Seite drücke, denn die meisten Leute legen den Federhalter beim Schreiben überhaupt nicht an den Zeige-

finger selbst, sondern an seinen Mittelhandknochen. Der seitlichen Abdrängung der Finger wird aber insofern durch die Schreibhaltung Vorschub geleistet, daß der Federhalter vom Daumen gegen den Mittelfinger angelegt wird. Dadurch wird natürlich die schon durch den seitlichen Zug der Beuger (s. oben) eingeleitete Abweichung erst recht vermehrt.

Daß die Federhaltung bei Waldeyers Hand nicht allein an der schiefen Fingerstellung schuld war, geht am schlagendsten daraus hervor, daß wir sie auch an der linken Hand, wenn auch in etwas geringerem Grade (um etwa 8° weniger) finden. Daß die bei der Gefäßfüllung vor dem Abgipsen entstandene Handstellung überhaupt nicht etwa genau die »Schreibstellung« der Hände ist, zeigt die Haltung und die Richtung des Nagelgliedes am Zeigefinger, die keineswegs zu der beim Schreiben erforderlichen Heranführung oder Herandrückung des Federhalters an den Mittelfinger passen.

Ferner sehen wir, daß die Finger der Ellenseite der rechten Hand weniger gegen die Handmitte zusammengeschoben sind, wie an der linken Hand, was man am besten erkennt, wenn man die Durchsichtbilder beider Hände entsprechend aufeinanderlegt. Bei der Schreibhaltung ist das aber wohl bei den meisten Menschen umgekehrt.

Die Schiefstellung der Finger sehen wir endlich, wie ich schon oben bemerkte, überhaupt sehr häufig bei Leuten, die im ganzen Jahr kaum einmal eine Feder zur Hand nehmen. Der Name »Schreibhand« für diese Fingerstellung sollte daher besser vermieden werden, weil sie auch bei anderen Arbeiten der Hand sich einstellt.

An der linken Hand Waldeyers ist die Schrägstellung zum Teil freilich wohl auch mit dem Schreiben in Verbindung zu bringen, da Waldeyer, wie ich selbst oft beobachtete, beim Festhalten des Schreibpapiers die Finger leicht beugte, so daß also auch hier ein andauernder, nach der Kleinfingerseite gerichteter Zug der Beuger vorhanden war. Doch läßt sich auch an der linken Hand die Stellung außer auf die Hilfe beim Schreiben, ebenso wie rechts auf die Tätigkeit beim Präparieren, wo die linke Hand die Pinzette zu halten hat, und beim Mikroskopieren, wobei die linke Hand in Beugestellung der Finger die Mikrometerschraube dreht oder den Objektträger verschiebt, zurückführen.

Zu den Kennzeichen der »Arbeitshand« treten bei Waldeyers Händen dann noch, wohl erst in höherem Alter entstandene, Merkmale von Dauerentzündung der Gelenke, an der er litt, hinzu, die jedenfalls durch die übergroße Beanspruchung an den Händen zu besonders starker Ausprägung kamen.

Dazu gehört (s. die Bilder 4 u. 5) die Auftreibung einiger Gelenkköpfe der Mittelhand mit Herabgleiten der Finger gegen die Mittelhandköpfchen in sogenannter »Halbausrenkung« (Subluxation), sowie Wucherungen an den Gelenkflächenrändern an den Handwurzel- und Fingerknochen und die Verwachsung des mittleren Kleinfingergelenkes der linken Seite[1]. Erscheinungen

---

[1] H. Virchow bringt die letztere mit dem Festhalten des Schreibpapieres in Zusammenhang, obwohl dabei wohl meist die Finger der Daumenseite der linken Hand eine größere Rolle spielen dürften, als der Kleinfinger.

von Steifheit in den Gelenken zeigten sich bei Waldeyer ja auch an den Knien und Hüftgelenken schon längere Jahre vor seinem Ableben. Wie wenig sich Waldeyer durch diese Alterserscheinungen in seiner emsigen Tätigkeit stören ließ, des wären wir hier alle Zeuge. Und diese fleißigen Hände, die er der anatomischen Anstalt der Universität Berlin als teures Vermächtnis hinterlassen hat, mit ihren ausdrucksvollen Zeichen unermüdlicher, ja übergroßer Arbeit, sollen noch vielen Reihen von Medizin Studierenden ein Vorbild echt deutscher beharrlicher, bis zum Tode getreuer Pflichterfüllung sein.

Das Viellinienspektrum des Wasserstoffs,

zweite Mitteilung.

Mit einem Zusatz über das kontinuierliche Spektrum.

Von Prof. Dr. E. Gehrcke und Dr. E. Lau.

(Mitteilung aus der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt.
Vorgelegt von Hrn. Nernst am 19. Juli 1923 [s. oben S. 196].)

Hierzu Taf. III.

§ 1. Spektrum eines gebremsten Kathodenstrahls. Die von Fulcher[1] im Viellinienspektrum des Wasserstoffs entdeckten, bandenartigen Gruppen im Rot und Grün werden, wie Fulcher angibt, durch langsame (35 Volt) wie durch schnellere Kathodenstrahlen gleich stark erzeugt. Andererseits hat Stark[2] sich dahin geäußert, daß das Viellinienspektrum besonders von langsamen Kathodenstrahlen (20—50 Volt) angeregt wird; er stützt seine Ansicht auf eine Photographie im blauen Teil des Spektrums. Im Rot und Grün, wo die Fulcherschen Banden ($\Delta\lambda$-Banden) liegen, sind uns bisher keine Beobachtungen mit Strahlen unterhalb 35 Volt aus der Literatur bekannt. Wir haben unter Zugrundelegung der von Gehrcke und Seeliger[3] beschriebenen Methode eines gebremsten Kathodenstrahls zwecks Feststellung der Anregungsbedingungen der einzelnen Linien das ganze Spektrum eines solchen, in Wasserstoff erzeugten Strahles photographiert und gefunden, daß tatsächlich die roten und grünen Banden durch langsame Kathodenstrahlen stärker angeregt werden als durch schnellere Strahlen, im Gegensatz zu anderen Linien des Viellinienspektrums. Wir erhielten dieses Ergebnis, indem wir:

1. den Kathodenstrahl, der zwischen der Anode und der Gegenkathode in bekannter Weise gebremst wurde, möglichst lichtstark machten. Dies wurde dadurch erreicht, das nur der der Anode gegenüberstehende Fleck einer Wehneltschen Oxydkathode zur Ausgangsstelle eines leuchtenden Kathodenstrahles gemacht wurde, so daß dieser als feiner, hell leuchtender Strahl zur Ausbildung kam,

2. als Spektrograph ein lichtstarkes, mit einem Wadsworth-Prisma versehenes, optisches System anwandten, das wir uns aus vorhandenen Teilen zu diesem Zweck zusammengestellt hatten. Der Kathodenstrahl wurde auf dem Spalt des Spektrographen mit einer lichtstarken achromatischen Linse abgebildet. Eine Ansatzstelle des Rohres wurde dauernd mit flüssiger Luft gekühlt.

---

[1] G. S. Fulcher, Astroph. Journ. **37**, 69, 1913.
[2] J. Stark, Ann. d. Phys. **52**, 253, 1917.
[3] E. Gehrcke und R. Seeliger, Verh. d. D. Phys. Ges. **14**, 333, 1023, 1012.

In Fig. 1 der Tafel ist in 2.14facher Vergrößerung des Originals eine so gewonnene Aufnahme wiedergegeben, erhalten mit einem gebremsten Kathodenstrahl von 270 Volt; *a* ist ein Wasserstoff-Vergleichsspektrum, aufgenommen mit innen versilbertem Rohr[1], *b* ist eine weiche, *c* eine harte Kopie einer Aufnahme des gebremsten Kathodenstrahls. Die oberen Teile von *b* und *c* sind durch die kleinen, die unteren durch die großen Kathodenstrahlgeschwindigkeiten erregt. Die Aufnahme wurde in dreistündiger Belichtung auf panchromatischer Agfa-Platte ohne jedes Nachstellen des unverändert bleibenden Kathodenstrahls hergestellt; längere Belichtungen ließen sich mit stillstehendem Kathodenstrahl nicht erzielen. Wir fanden, daß die Wellenlängen:

6430, 6400,
6341, 6327, 6298, 6283,
6238, 6223, 6200, 6183,
6135, 6221, 6096, 6080, 6070,
6033, 6018, 5994/89, 5975

kurze, im oberen Teile der Fig. 1 *b* liegende Linien bilden; hier ist der Ort, wo die Kathodenstrahlen die Erscheinung des Farbenumschlags[2] aufweisen und also der Bereich der kleinen Kathodenstrahlgeschwindigkeiten liegt. Diese kurzen Linien sind aber sämtlich Komponenten der roten Fulcherbande. — Auch bei den Wellenlängen: 5538, 5420, 5302, also den Hauptlinien der grünen Fulcherbande, findet man kurze Linien im oberen Teile der Fig. 1 b. Von weiteren kurzen Linien lassen unsere Aufnahmen erkennen:

1. 5847, 5785. Dies sind Linien, welche nach Croze[3] im magnetischen Feld aufgespalten werden.
2. 5738. Diese Linie wird nach Croze im magnetischen Feld nicht aufgespalten.
3. 5690, 5252, 5196, 4743, 4618, 4580, *4568. *4554, *4533, *4523, 4510, *4498, *4490, *4474, 4445, *4420, *4411, *4383, 4318, 4232. Von diesen Linien sind die mit * bezeichneten bereits von Stark als kurze Linien (in einer positiven Schicht) hervorgehoben worden, doch schließt Stark, daß sie nur durch schnelle, nicht durch langsame Kathodenstrahlen erregt werden. In diesem Punkte decken sich also unsere Beobachtungen mit denen von Stark nicht, doch ist zu bemerken, daß er mit einer wesentlich anderen Versuchsanordnung wie wir arbeitete. — Von den zuletzt angeführten Linien haben, soweit untersucht,

   4580 weder magnetische, noch elektrische[4] Aufspaltung,

   4523, 4498, 4490, 4474, 4445, 4420 elektrische Aufspaltung[5], und zwar die von Stark entdeckte[4], unsymmetrische, welche Takamine und Kokubu[5] genauer beschrieben haben.

---

[1] E. Gehrcke und E. Lau, Sitzungsber. d. Berl. Akad. 1922, 453—458.
[2] E. Gehrcke und R. Seeliger, l. c.
[3] F. Croze, Annales de Phys. (9) **1**, 65 ff., 1914.
[4] J. Stark, Elektrische Spektralanalyse chem. Atome, Verl. Hirzel, Leipzig 1914, S. 75 ff.
[5] T. Takamine und N. Kokubu, Memoirs of the College of Science Kyoto **3**, 271, 1919.

Die Linien 4743, 4618, 4554, 4490 bilden vier nahezu gleichabständige Linien und sind als Köpfe einer neuen, im blau gelegenen Bande anzusehen, die mit der roten und grünen Bande von Fulcher Ähnlichkeit aufweist, wie in § 2 näher dargelegt wird.

Die übrigbleibenden Linien zeigen nicht dasselbe Optimum der Anregbarkeit durch langsame Kathodenstrahlen, wie die unter 1 bis 3 genannten, doch nehmen die Linien: 5014, 5012, 4972, 4934, 4929, 4873, 4849, 4823, 4719, 4713, 4709, 4663, *s'z*4634, *s'z*4632, *s'z*4628, *s'z'*4582, *z'*4580, *z'*4568, 4224, 4222, *z*4205, 4200, *z*4195, 4182, *z*4180, *z*4177 eine Sonderstellung ein, indem sie ebenfalls ein Optimum bei kleinen Kathodenstrahlgeschwindigkeiten besitzen, wenn auch ein weniger ausgeprägtes, als die oben unter 1 bis 3 genannten Linien; von den hier aufgeführten Linien haben, soweit bisher untersucht, die mit *z* bezeichneten magnetische Aufspaltung, während die mit *s'* bezw. *z'* bezeichneten keine elektrische bzw. magnetische Aufspaltung zeigten.

Nur bei großen, nicht bei kleinen Kathodenstrahlgeschwindigkeiten werden folgende Linien angeregt: 5713, 5146, 5112, 5030, 4650, 4607, 4367. Das gleiche trifft für 427 und 426 $\mu\mu$ zu, die aber keine Wasserstofflinien zu sein scheinen.

Die Linien der Balmerserie H_α, H_β, H_γ zeigen in Fig. 1 der Tafel das von Gehrcke und Seeliger gefundene Verhalten, von langsamen Kathodenstrahlen schwächer als von schnellen angeregt zu werden; sie verhalten sich also umgekehrt wie die Fulcherschen Banden.

§ 2. $\Delta\lambda$-Banden. Auf Grund unserer neuen Photographien in Verbindung mit den alten[1] sind wir in der Lage, unsere früheren Angaben[1] über den Bau der $\Delta\lambda$-Banden in weiteren Punkten zu ergänzen. Unter Fortlassung von zweifelhaft erscheinenden Begleitern möchten wir folgende Struktur der $\Delta\lambda$-Banden angeben:

Tabelle I. Rote $\Delta\lambda$-Bande.

Komponenten-Bezeichnung nach		λ (genaue Zahlen nach Watson)	Komponenten-Bezeichnung nach		λ (genaue Zahlen nach Watson)
Fulcher	Gehrcke u. Lau		Fulcher	Gehrcke u. Lau	
	Hauptlinie	6805	S_1	α	6441.83
	Hauptlinie	6755.82	S_2	δ	6433.80
	δ	6701.73	S_3	Hauptlinie	6428.36
	Hauptlinie	6696		β {	6402.51
	α	6638.7			*6399.71*
	δ	6629		γ	6387
	Hauptlinie	6624.84		ε {	6377.59
	α	6542			*6372.40*
	δ	6534			6370
S_3	Hauptlinie	6527.63			
	β	6501			
	ε {	6477			
		6473.92			
		6470			

[1] E. Gehrcke und E. Lau, l. c.

Komponenten-Bezeichnung nach		λ (genaue Zahlen nach Watson)
Fulcher	Gehrcke u. Lau	
S_1	α	6340.75
S_2	δ	6332.70
S_3	Hauptlinie	6327.25
S_4	β	6303.68
S_6		*6299.6*
S_7	γ	6285.56
	ε	*6271.55*
		6268.20
S_1	α	6238.57
S_2	δ	6230.48
S_3	Hauptlinie	6225.02
S_4		6201.38
S_5	β	6199.58
S_6		*6197.32*
S_7	γ	6183.19
		6174.28
	ε	*6169.85*
		6167.92

Komponenten-Bezeichnung nach		λ (genaue Zahlen nach Watson)
Fulcher	Gehrcke u. Lau	
S_1	α	6135.56
S_2	δ	6127.53
S_3	Hauptlinie	6122.01
S_4		6098.45
S_5	β	6096.21
S_6		*6094.03*
S_7	γ	6080.03
		6067.96
	ε	*6066.89*
		6063.54
S_1	α	6032.14
S_2	δ	6025.00
S_3	Hauptlinie	6018.53
S_4		5994.30
S_5	β	*5992.14*
S_6		5989.47
S_7	γ	5975.68
		5967.55
	ε	*5963.70*
		5959.98

Tabelle II. Grüne Δλ-Bande.

Komponenten-Bezeichnung nach		λ (genaue Zahlen nach Watson)
Fulcher	Gehrcke u. Lau	
	α	5788.50
	δ	5779.20
	Hauptlinie	5773.48
	β	5742.05
	γ	5728
	ε	5709.93
S_1	α	5671.10
S_2	δ	5661.97
S_3	Hauptlinie	5655.98
	β	5624
	γ	5610
	ε	5591
S_1	α	5552.60
S_2	δ	5543.71
S_3	Hauptlinie	5537.67
	β	5505.79
	γ	5492
	ε	5475.08

Komponenten-Bezeichnung nach		λ (genaue Zahlen nach Watson)
Fulcher	Gehrcke u. Lau	
S_1	α	5435.06
S_2	δ	5426.20
S_3	Hauptlinie	5420.10
	β	5388.35
	γ	5375
	ε	5356.13
	ε'	5336.69
S_1	$\alpha = \gamma'$	5318.06
S_2	δ	5309.10
S_3	Hauptlinie $= \beta'$	5303.35
		5291.79
		5284.65
	$\beta =$ Hauptlinie	5272.48
	δ'	5266.22
	$\gamma = \alpha'$	5256.78
	ε	5239

Zu unseren früheren Angaben über die rote und grüne $\Delta\lambda$-Bande ist also nachzutragen:

1. Die Linien ε kommen neu hinzu.
2. α, Hauptlinie, β, γ, ε bilden angenähert gleichabständige Linien, bei denen zwischen Hauptlinie und β eine Linie ausfällt. Genauer gelten folgende Beziehungen zwischen den Abständen der Linien: (Hauptlinie gegen α) + (β gegen γ) = β gegen ε = Hauptlinie gegen β.

Ferner finden wir jetzt im blauen Teil des Spektrums eine bisher nicht bemerkte $\Delta\lambda$-Bande:

Tabelle III. Blaue $\Delta\lambda$-Bande.

Komponenten-Bezeichnung	λ (genaue Zahlen nach Watson)	Komponenten-Bezeichnung	λ (genaue Zahlen nach Watson)
α	4815	α	4562.41
Hauptlinie	4805	δ	4557.57
α	4751.72	Hauptlinie	4554.34
Hauptlinie	4742.90	β	4537.91
α	4689	γ	4529.26
Hauptlinie	4680.57	ε	4519.27
β	4667.90		
γ	4658.02		
ε	4649	ε'	4505.80
α	4625.35	$\alpha = \gamma'$	4498.75
δ	4620.90	δ	4493.86
Hauptlinie	4617.69	Hauptlinie = β'	4490.62
β	4600	β = Hauptlinie	4474.42
γ	4590.06	ε	4459.02
ε	4584.02		

In nachstehender Fig. 1 sind die $\Delta\lambda$-Banden im Maßstab der Wellenlängen gezeichnet, um ihre eigentümliche, geometrisch ähnliche Anordnung besser hervortreten zu lassen, die eine Fundgrube für neue theoretische Gesichtspunkte zu bieten scheint.

§ 3. Anregungsspannung der $\Delta\lambda$-Banden. Die Länge der in § 1 angeführten kurzen Linien kennzeichnet die Kathodenstrahlengeschwindigkeiten, bei denen die Linien erzeugt werden; das Helligkeitsmaximum bezeichnet die für die Erzeugung günstigste Geschwindigkeit der anregenden Elektronen. Wir fanden, daß die roten, grünen und blauen $\Delta\lambda$-Banden ihre größte Helligkeit in gleicher Höhe haben, sie werden also sämtlich von Elektronen ein und derselben Geschwindigkeit am stärksten angeregt. Auch die Höhe der verschiedenen Bandenlinien, welche die Grenze der Anregbarkeit bezeichnet, war für alle gleich; sie beträgt 20.5 ± 1 mm in Fig. 1 der Tafel, d. h. wegen der Bildvergrößerung von 2.14 nur 9.58 ± 0.5 mm im Original, entsprechend einer Länge des beleuchteten Spalts von gleicher Größe.

Über das Grenzpotential, welches derjenigen Elektronengeschwindigkeit entspricht, die die $\Delta\lambda$-Banden gerade noch anzuregen vermag, ist folgendes

zu bemerken: der leuchtende Kathodenstrahl zwischen Anode und Gegenkathode hat eine Länge von 16 mm; die Vergrößerung unserer optischen Apparatur betrug 25/21, so daß also der ganze Kathodenstrahl in Fig. 1 der Tafel eine Länge von 16·25/21·2.14 = 40.8 mm haben würde. Nun kam nur ein Stück davon, nämlich bis zur Höhe 20.5 mm einer Bandenlinie, in Fig. 1 zur Aufnahme, also nur die Hälfte des leuchtenden Strahls. Nimmt man an, daß der nichtleuchtende Teil des Kathodenstrahls (die »Kappung« des Strahls) von Geschwindigkeiten unterhalb 12 Volt gebildet wird, so ist auf dem leuchtenden Strahl, der von 270-Volt-Strahlen erzeugt wird, ein Gefälle von 270 — 12 = 258 Volt zu verteilen, und auf die Hälfte des Strahls 129 Volt, falls ein homogenes elektrisches Feld vorausgesetzt wird. Diese 129 Volt verteilen sich also auf eine Bandenlinie von 20.5 mm Länge der Fig. 1, so daß eine Ungenauigkeit der Linienlänge von 1 mm (s. oben) ein Schwanken des Grenzpotentials von 129 : 20.5 = 6.3 Volt bedingen würde. Von dieser Größenordnung 6 bis 7 Volt wären also gegebenenfalls etwaige Unterschiede der zu verschiedenen Teilen der $\Delta\lambda$-Banden gehörenden Anregungspotentiale. Es ist klar, daß diese Zahl mit Vorsicht anzusehen ist, da die Voraussetzung des homogenen elektrischen Feldes, wie besonders auch die, daß die volle Betriebsspannung von 270 Volt zwischen Anode und Gegenkathode im Gase wirksam, also auf den Elektroden keine nennenswerte Oberflächenladung (elektrische Doppelschichten) vorhanden war, eine sehr hypothetische ist. Die Vermeidung dieser bei allen Potentialmessungen in Gasen störenden Fehlerquelle würde ganz besondere Vorsichtsmaßregeln erfordern[1].

Zusammenfassend ist zu sagen, daß bei Annahme einer Anregungsspannung von 12 Volt der $\Delta\lambda$-Banden keine Abhängigkeit der verschiedenen Bandenlinien von der Anregungsspannung von uns festgestellt wurde; wenn eine solche vorhanden ist, dürfte sie kaum mehr als etwa 6 bis 7 Volt vom roten bis zum blauen Teil des Spektrums betragen. Das Vorhandensein von elektrischen Doppelschichten auf den benutzten Metallelektroden würde diese Zahl verändern, und zwar verkleinern. Jedenfalls sind aber die Unterschiede der einzelnen $\Delta\lambda$-Banden des Wasserstoffs hinsichtlich der Anregungsspannung viel geringer, als sie bei-

Fig. 1.

4807 4743 4681 4618 4554 4491 4474

5775 5656 5537 5420 5302 5272

6805 6756 6696 6624 6527 6428 6327 6224 6121 6017 5975

[1] Vgl. hierüber E. Gehrcke und L. Janicki, Ann. d. Phys. **47**, 679, 1915, wo angegeben wird, wie man diese Fehlerquelle beseitigen kann.

spielsweise bei den Bandenlinien des Stickstoffs von Gehrcke und Seeliger l. c. beobachtet worden sind.

Die Höhe der in § 1 angeführten übrigen Linien des Viellinienspektrums ergab sich, wie angegeben, niedriger als bei den kurzen $\Delta\lambda$-Banden. Demzufolge ist die Anregungsspannung dieser Linien größer als 12 Volt.

§ 4. Intensitätsverhältnis der Linien und dessen Veränderlichkeit. Die einzelnen $\Delta\lambda$-Banden zeigen einen verschiedenen Gang der Intensitäten der Linien. So nehmen z. B. in der roten Bande die Intensitäten der α-Linien mit abnehmender Wellenlänge dauernd zu, diejenigen der β-Linien zuerst zu, dann ab. Merton[1] fand, daß die relativen Intensitäten durch Beimischung von Helium verändert werden, Kimura und Fukuda[2] stellten fest, daß in reinem Wasserstoff die relative Intensität der Komponenten vom Druck abhängt. Wir haben gefunden, daß die Einschaltung einer Funkenstrecke nebst Kondensator in den Entladungskreis des Wasserstoffrohrs das Intensitätsverhältnis ebenfalls beeinflußt, und zwar in ähnlichem Sinne wie eine Erhöhung des Gasdrucks. Dies macht Fig. 2 der Tafel deutlich: hier ist *a* das Spektrum einer leuchtenden Kapillare bei höherem Gasdruck von etwa 30 mm Hg, *b* das Spektrum des früher von uns beschriebenen Wasserstoffrohrs, wobei eine Funkenstrecke nebst Glimmerkondensator von 40000 cm zugeschaltet war, *c* das Spektrum eines solchen Rohrs ohne Funke und Kondensator; die Aufnahmen wurden mit einem 4-Prismen-Apparat erhalten. Man sieht, daß in diesen drei Fällen die Intensitäten einzelner Linien sehr verschieden sind, insbesondere ist hervorzuheben, daß mit steigender Elektronendichte die von uns mit α bezeichneten Linien der roten Fulcherbande stärker, die Hauptlinien schwächer werden; das Bild der Fig. 2 *a* beim Druck von 30 mm Hg mag mehr durch die hohe Elektronendichte bei der Entladung als durch den hohen Gasdruck bedingt sein. Sehr bemerkenswert ist ferner, daß durch Einschaltung von Funkenstrecke und Kapazität in den Entladungskreis die $\Delta\lambda$-Banden relativ zu den übrigen Linien des Viellinienspektrums geschwächt werden.

Eine besonders starke Intensitätsveränderung zeigt eine Reihe gelber und grüner Linien, die die Eigentümlichkeit haben, bei Einschaltung einer Funkenstrecke kräftig hervorzutreten. Es sind dies besonders 6090 und 5982, die beide im Magnetfeld aufzuspalten sind, ferner eine Reihe von Linien zwischen 5890 und 5700; diese sind zum Teil im Magnetfeld nicht aufzuspalten.

Auch im blauen Teil des Spektrums finden sich Linien, deren Intensität mit den Anregungsbedingungen wechselt. Auffällig sind die starken Linien 4723.17 und 4572.9, welche bei hohem Druck stärker sind als die ihnen benachbarten Linien 4719.18 und 4568.30, bei geringem Druck aber, wie auch in unserer Aufnahme des Kathodenstrahls (vgl. Fig. 1 *b* und *c* der Tafel), fast ganz verschwinden. Es wirkt auch hier die Erhöhung des Gasdrucks

[1] Merton, Proc. Roy. Soc. **96**, 112, 1919.

[2] M. Kimura und M. Fukuda, Memoirs of the College of Science Kyoto **5**, 153—163, 1921 besonders Pl. II, Fig. 6.

im selben Sinne wie die Einschaltung einer Funkenstrecke; auch aus unserer Tafel III Nr. 10 und 16 in unserer früheren Mitteilung geht dies hervor. — Die Aufnahme des Kathodenstrahls (Fig. 1 *b* und *c* der Tafel) zeigt, daß bei keiner Elektronengeschwindigkeit die Verhältnisse des Leuchtens so sind wie bei hohem Druck oder bei Einschaltung der Funkenstrecke; die Veränderung der Intensitätsverhältnisse der Linien ist also nicht nur auf eine Änderung der Elektronengeschwindigkeit zurückzuführen.

Die in § 1 als »kurz« bezeichneten Linien werden durch Einschaltung einer Funkenstrecke nebst Kapazität geschwächt, während andererseits, wie bekannt, die Balmerlinien hierdurch sehr verstärkt werden.

§ 5. Liniengruppen: Aus dem Viellinienspektrum ist in § 1—4 eine große Zahl der stärkeren Linien in Banden eingeordnet. Von den verbleibenden Linien seien noch besonders hervorgehoben:

1. Die folgende Gruppe:

	Differenz gegen Mitte
z 5836.28	37.03
z 5822.99	23.74
z 5812.82	13.57
5806.35	7.10
5803	—
Mitte 9799.25	0
5796.82	2.43
5791.93	7.32
z 5786.00	13.25
z 5775.28	23.97
z 5760.58	38.67

Hier zeigen die mit *z* versehenen Linien nach Dufour und Croze einen Zeeman-Effekt, und zwar werden die Linien 5823 und 5775 in geringerem Maße aufgespalten als 5836, 5813 und 5786, 5760; von den übrigen ist die magnetische Aufspaltung nicht bekannt. Sonach bilden diese Linien, wie die Wellenlängendifferenzen (s. oben) erkennen lassen, eine näherungsweise symmetrische Gruppe von Linien mit näherungsweise symmetrischen Zeeman-Effekten.

2. Die folgenden, mit *X* und *Y* bezeichneten Gruppen:

Gruppe *X*	Gruppe *Y*	Differenz
z 6090	*z* 6003.08	87
6080.03	5994.30	85.73
6077	5989.47	88
z 6070.21	*z* 5982.79	87.42
6063.54	5975.68	87.86
6048.10	5959.98	88.12
z 6028.21	*z* 5938.87	89.34
z 6021.53	*z* 5931.62	89.91

Diese beiden Gruppen X und Y bilden also näherungsweise zwei gleichartige Folgen von Linien.

Weitere symmetrische Gruppen im Blau sind bereits in unserer früheren Mitteilung erwähnt worden. Die vollständigere Aufhellung der verwickelten Gruppen wird weiteren experimentellen Arbeiten vorbehalten bleiben müssen.

§ 6. Zusatz: Das kontinuierliche Wasserstoffspektrum. Das neben dem Viellinienspektrum und der Balmerserie im Sichtbaren und Ultraviolett auftretende kontinuierliche Spektrum des Wasserstoffs wurde ebenfalls in unseren Photographien des gebremsten Kathodenstrahls erhalten. Um die Intensität zu erhöhen, haben wir mit breitem Kollimatorspalt gearbeitet; Fig. 3 *a* und *b* der Tafel stellt eine mit Quarzspektrograph (1 Cornu-Prisma) erhaltene Aufnahme in Originalgröße dar, wobei *a* hart und *b* weich kopiert wurde. Hier war zur Abbildung des Kathodenstrahls auf dem Spalt des Spektrographen ein Hohlspiegel aus Neusilber von 110 cm Brennweite benutzt worden; die Geschwindigkeit der Kathodenstrahlen betrug 90 Volt. In Fig. 3 *a* und *b* sieht man die sehr breiten und verwaschenen Linien von etwa 650 bis 360 $\mu\mu$, und von da ab bei kleineren Wellenlängen hauptsächlich das kontinuierliche Spektrum. Es zeigt ein Maximum der Helligkeit bei langsamen Kathodenstrahlengeschwindigkeiten, ähnlich wie auch die $\Delta\lambda$-Banden des Viellinienspektrums ein solches Maximum haben (vgl. § 3). In Fig. 3 *a* und *b* erkennt man das kontinuierliche Spektrum, oben und unten von einem schmalen kontinuierlichen Spektrum umrahmt, das durch Beleuchtung des Kollimatorspalts mit einer Magnesiumlampe der Firma Böhm-Berlin erhalten wurde, wobei der mittlere Teil des Spaltes durch eine Blende abgedeckt war. Diese beiden Magnesiumspektren kennzeichnen durch ihren Abstand die Länge des Spaltbildes für die verschiedenen Wellenlängen. — Stark[1] beobachtete, daß das kontinuierliche Wasserstoffspektrum im Anfang einer positiven Schicht besonders kräftig war, besonders im blauen Teil der Schicht; auch er fand also das maximale Leuchten des kontinuierlichen Spektrums an einem begrenzten, kleinen Bereich von Elektronengeschwindigkeiten gebunden. Andererseits sind merkwürdigerweise bei Starks Aufnahme das kontinuierliche Spektrum und die kurzen Linien des Viellinienspektrums voneinander getrennt, während sie bei uns zusammenfallen. — Die Ausmessung unserer Aufnahmen des kontinuierlichen Spektrums ergab, daß hier ebenso wie beim Viellinienspektrum sowohl die maximale Helligkeit wie die Grenzhelligkeit am Ende des Kathodenstrahls bei einer bestimmten, von der Wellenlänge unabhängigen Elektronengeschwindigkeit liegt. Dies bezieht sich auf den ganzen, von uns beobachteten Teil des kontinuierlichen Spektrums zwischen 360 und 230 $\mu\mu$. Wenn eine Abhängigkeit der Grenzhelligkeit von der Wellenlänge bestehen sollte, müßte sie nach unseren Messungen zwischen 360 und 230 $\mu\mu$ unterhalb 3 Volt liegen.

§ 7. Zur Erklärung der Erscheinungen. Im vorstehenden haben wir uns auf rein tatsächliche Angaben beschränkt. Bei der Schwierigkeit der Materie wird man bindende Schlüsse und Erklärungen erst auf Grund weiterer

---

[1] J. Stark, Ann. d. Phys. **52**, 272, 1917.

Beobachtungsergebnisse erwarten können; wir möchten uns deshalb auf folgende Andeutungen beschränken:

1. Die Anregung der Δλ-Banden durch langsame Kathodenstrahlen ist entweder als eine direkte Wirkung der primären Elektronen anzusehen oder als eine solche der Sekundärelektronen, welche aus den Wasserstoffmolekülen frei gemacht werden. Die Beobachtung, daß der leuchtende Kathodenstrahl keine diffusen Strahlen, die leuchten, erkennen läßt, auch da nicht, wo die Δλ-Banden am stärksten erzeugt werden, scheint im Sinne der ersten Erklärungsmöglichkeit durch Primärelektronen zu liegen; andernfalls müßte man annehmen, daß die Sekundärelektronen gerichtet sind, und zwar genau wie die Primärelektronen.

2. Mögen primäre oder sekundäre Elektronen die Δλ-Banden erregen, jedenfalls geht aus unseren Versuchen hervor, daß für die verschiedenen Wellenlängen der Δλ-Banden sowohl die Grenze als auch das Maximum der Anregbarkeit bei ein und derselben Elektronengeschwindigkeit liegt oder doch auf einem sehr engen Bereich. Es hat den Anschein, als ob man einer einzelnen Linie der Δλ-Banden nicht die ganze Energie eines stoßenden Elektrons zuordnen kann, sondern es verteilt sich der Stoß auf eine Mehrzahl von Einzelwellen verschiedener Länge.

3. Die Tatsache, daß bei kleinen Elektronengeschwindigkeiten die Helligkeit der Balmerserie ab-, die der Δλ-Banden zunimmt, kann durch folgende Hypothese erklärt werden: Das auf eine Wasserstoffmolekel stoßende Elektron zerspaltet die Molekel in zwei Atome, wenn seine Energie groß genug ist. Das Elektron schafft damit die Bedingungen für das Auftreten der Balmerlinien, deren Träger ja einzelne H-Atome sind. Wenn jedoch das stoßende Elektron eine zu geringe Energie hat, so vermag es die Molekel nicht mehr zu zerspalten, sondern nur noch die beiden H-Atome in größeren Abstand voneinander zu bringen. Dann entsteht also eine Molekel von höherem Energiezustand, und deren Rückbildung könnte die Aussendung der Δλ-Banden zur Folge haben. Ist endlich die Geschwindigkeit des stoßenden Elektrons sehr gering (kleiner als etwa 12 Volt), so wird kein Leuchten mehr erregt, d. h. das stoßende Elektron vermag keine Lagenänderung der beiden H-Atome in der Molekel hervorzubringen; das Elektron geht aber bei diesen kleinen Geschwindigkeiten seinen Weg weiter, ohne abgelenkt zu werden, wie aus den Versuchen von Gehrcke und Seeliger folgt.

4. Die Tatsache, daß das Viellinienspektrum des Wasserstoffs außer den Δλ-Banden noch ein anderes, linienreiches Spektrum enthält, welches sowohl durch langsame wie durch schnelle Elektronen anregbar ist, und viele symmetrische Gruppen von Linien besitzt (Gruppenspektrum), erklärt sich vermutlich dadurch, daß hier ein besonderer Träger vorliegt. Als solcher kommt entweder H_2^- oder H_2^+ bzw. H_3 oder H_4 im neutralen oder geladenen Zustand in Frage.

5. Das kontinuierliche Spektrum des Wasserstoffs tritt in unseren Versuchen zusammen mit den Δλ-Banden auf und hat innerhalb der Genauigkeit der Beobachtung dieselben Anregungsbedingungen wie diese; es erfordern

die verschiedenen Schwingungszahlen des kontinuierlichen Spektrums ein und dieselbe kleine Elektronengeschwindigkeit. Andererseits ist zu bedenken, daß nach den Versuchen von Stark das kontinuierliche Spektrum des Wasserstoffs besonders durch Kanalstrahlen angeregt wird, die das Viellinienspektrum sehr zurücktreten lassen; ferner ist zu bemerken, daß das kontinuierliche Spektrum auf astrophysikalischen Objekten neben der Balmerserie zu beobachten ist, ohne daß sich ein Viellinienspektrum zeigte. Diese verschiedenen Tatsachen sind nur schwer miteinander vereinbar, wenn es sich wirklich in allen diesen Fällen um ein und dasselbe kontinuierliche Spektrum des Wasserstoffs handeln sollte. Wahrscheinlicher ist es, daß das von uns beobachtete, kontinuierliche Spektrum, welches mit den $\Delta\lambda$-Banden zusammen auftritt, ein anderes ist als das mit der Balmerserie verbundene, kontinuierliche Spektrum.

Fig. 3. (Kathodenstrahl von oben nach unten.)

Fig. 2.

E. Gehrcke und E. Lau: Das Viellinienspektrum des Wasserstoffs.

Die Beziehung des Kolloidalzustandes der Gewebe für den Ablauf des Wachstums.

Von Max Rubner.

(Vorgetragen am 14. Juni 1923 [s. oben S. 145].)

Unter den Erscheinungen des Lebens sind für uns jene des Wachstums die bekanntesten. Überall in der Natur sehen wir sie, im Wechsel der Jahreszeiten bei den Pflanzen, rings um uns in der Tierwelt. Wir selbst haben sie erlebt und an den Kindern in ihrer geistigen und körperlichen Entwicklung beobachtet.

Die Untersuchungen über die statistischen Verhältnisse des Kinderwachstums waren das erste wissenschaftliche Unternehmen auf diesem Gebiet und waren zugleich als Normalmaß der körperlichen Entwicklung der Jugend von weittragender praktischer Bedeutung.

Das Massenwachstum als Erfolg der Ernährung richtete das Interesse auf diese, auch hier führte der Wunsch, besonders die Kinderernährung aufzuklären, zu einer eingehenden Bearbeitung des Gebietes und ermöglichte im Zusammenhang mit vergleichend physiologischen Experimenten an Tieren, wie Objekten der Kleinlebewelt eine Lösung der wichtigsten Probleme.

Das Wachstum, die biologische Synthese, der Aufbau lebender Substanz ist stets zu gleicher Zeit mit Vorgängen der Zerstörung von Substanzen, dem Verbrauch von Energie, d. h. mit dem sogenannten Betriebsstoffwechsel verbunden.

Bei Tieren der gleichen Entwicklungsperiode, z. B. dem Neugeborenen, erweist sich das Wachstum in gleichartigem engem Zusammenhang mit der Größe dieses Betriebsstoffwechsels, ausgenommen die menschliche Entwicklung, die sich durch außerordentlich langsames Wachstum auszeichnet.

Mit Zunahme der Masse nimmt der Betriebsstoffwechsel in demselben Maße wie die relative Größe der Oberfläche ab, das Wachstum aber sinkt rascher wie diese allmähliche Senkung des Stoffwechsels und kommt damit zu einer bestimmten Zeit, wenn die normale Größe des ausgewachsenen Tieres erreicht ist, völlig zu Ende.

Die Leitung des Wachstums, d. h. des Grades der Geschwindigkeit, mit der ein Tier dem Ende des Wachstums zugeführt wird, suchte man auf angeborene Eigenschaften der Zellen zurückzuführen, in neuerer Zeit hat sich erweisen lassen, daß Drüsen mit innerer Sekretion die Schilddrüse, Thymusdrüse, Hypophysis, späterhin die Geschlechtsdrüsen durch besondere Stoffe, Hormone genannt, das Wachstum beherrschen. Der Vorgang der Wachstumsleitung zeigt sich also komplizierter, als man früher gedacht hat.

I.

Wenig oder garnicht hat man die Veränderungen des Körpers beim Wachstum beachtet, was wir darüber wissen, ist fast nur Stückwerk. Man kann die Frage als eine anatomische auffassen. Am genauesten bis in alle mikroskopischen Details, auch vergleichend physiologisch kennen wir die Vorgänge von der Befruchtung bis zur Ausbildung der Organe der Frucht. Grob anatomisch ist über die späteren Stadien embryonalen Wachstums aber schon weniger bekannt, die Kenntnisse vom Organaufbau heranwachsender und erwachsener Personen beruhen für den Menschen auf ganz vereinzelten Beobachtungen.

Physiologisch chemischen Studien begegnen wir nur selten, da und dort in der Literatur zerstreut. Aus mannigfachen Veranlassungen ist der Körper von Tieren auf die einzelnen ernährungsphysiologisch wichtigen Bestandteile wie Stickstoff, Asche, Fettgehalt u. dgl. untersucht worden. Die umfangreichsten sind die Experimente, welche Inaba (Arch. f. Anat. u. Physiol. 1911, S. 1) an verschiedenen Tieren, Kalt- wie Warmblütern, sowie bei verschiedenem Alter der Tiere in meinem Laboratorium angestellt hat. Sie zeigen, daß die gesamte Leibessubstanz nach der Entfettung und Trocknung außerordentlich gleichartig aufgebaut ist. Verschiedenheiten aber treten uns entgegen, wenn man die frische Substanz des gesamten Organbreies eines Tieres auf ihren Wassergehalt untersucht. Diese eben erwähnten Untersuchungen Inabas sollten eine Grundlage zu weiteren Studien über Wachstum geben, weshalb ich an sie anknüpfe. Wenn man bei den analytischen Resultaten über die Zusammensetzung eines Organismus das Fett und auch die Asche rechnerisch eliminiert, erhält man — vom Glykogen abgesehen — das Verhältnis zwischen Proteinsubstanzen und Wasser, die beide in der Gestalt kolloidaler Substanz den Zellinhalt ausmachen. Unter diesem Gesichtspunkt läßt sich auch manches in der Literatur zerstreute Material zusammenfassen und ordnen. Die nachfolgenden Ergebnisse werden zeigen, daß man dabei zu interessanten Ergebnissen gelangt.

II.

Was den Organismus der Säuger im ausgewachsenen Zustande zunächst anlangt, so habe ich schon vor mehreren Jahrzehnten darauf verwiesen, daß sich aus den Nahrungsmittelanalysen nach Berechnung der fett- und aschefreien gedachten Substanz für Muskel, Herz, Leber der verschiedensten Schlachttiere ein offenbar einheitliches Verhältnis zwischen Protein und Wasser, also ein gleichartiger Quellungszustand nachweisen läßt. Zu demselben Resultat kommt man bei Verarbeitung des ganzen Körpers; der Trockengehalt des (fettfreien) Menschen ist 23.4, jener der Kaninchen 23.6, der einer Maus 21.7. Der erwachsene Organismus zeigt also hinsichtlich des Quellungszustandes die gleichen Verhältnisse, ob es sich um große oder kleine Organismen handelt. Dieser Quellungszustand wird durch das Durstgefühl dauernd mit nur geringen Schwankungen gleich erhalten, jeder Überschuß von Wasser normalerweise durch die Niere entfernt und die Eintrocknung durch den Zwang des Durstes unter Flüssigkeitsaufnahme beseitigt. Schon 11 Prozent Verlust vom normalen Wassergehalt führen zu pathologischen Erscheinungen. Die Austrocknung ist

nur bei niederen Organismen, wie gewissen Rotatorien Tardigraden, Nematoden möglich. Die Larven von Mehlwürmern scheinen sich nur unter Abhungern in ganz trockenem Material einige Zeit am Leben zu erhalten.

III.

Völlig anders wie der Erwachsene verhalten sich die Organismen im intrauterinen Leben. Es ist von den menschlichen Früchten wie von denen anderer Säuger, auch Vögeln und Reptilien, bekannt, daß sie stark wasserhaltig sind. Die Trockensubstanz des (fett und aschefrei gedachten) Körpers ist beim Menschen

im 6. Monat	9.7	Prozent
» 7. »	14.0	»
» 8. »	16.7	»
Neugeboren	15.7	»
Kind von 3 Monaten	17.1	»
Mann, erwachsen	23.4	»

Ähnliches findet sich beim Hühnerembryo:

am 7. Tage	6.7	Prozent Trockensubstanz
» 14. »	12.8	» »
» 21. »	18.9	» »

Die Froscheier quellen beim Wachstum zuerst auf und haben dann nur 5 bis 7 Prozent Trockensubstanz, die neugeborene Maus hat 12.6 Prozent, die erwachsene 21.7 Prozent Trockensubstanz. Ein Kaninchenembryo 9.9 Prozent, das erwachsene Tier 23.7 Prozent Trockensubstanz usw. Zweifellos beginnt also die erste Entwickelung mit einem hohen Wassergehalt, der sich aber kaum irgendwo höher als auf 94—95 Prozent stellen dürfte. Auf dieser Stufe hält sich der Embryo, wie es scheint, beim Menschen sehr lange.

IV.

In das extrauterine Leben treten die Säuger allgemein mit einem oft noch hohen Quellungszustand der Zellen, der mit der Beschaffenheit des Neugeborenen zusammenhängt. Die noch sehr unreife Maus hat bei der Geburt nur 12.6 Prozent Trockensubstanz, das viel reifere Meerschweinchen enthält 19.4 Prozent Trockensubstanz. Carl Thomas hat bei Hund und Katze zuerst die Zusammensetzung der Tiere bis zu Ende des Wachstums verfolgt (Arch. f. Anat. u. Physiol. 1911, p. 1).

Wenn der neugeborene Hund einen Trockengehalt von 16.4 Prozent hat, findet man

nach der ersten Verdoppelung des Gewichts	17	Prozent
nach der zweiten Verdoppelung	18.8	»
nach drittmaliger Verdoppelung	19.0	»
nach viertmaliger Verdoppelung	22.2	»

Nach diesen Untersuchungen nimmt also auch im extrauterinen Wachstum der Wassergehalt des Organismus allmählich ab. Beim Menschen haben wir

für diese wichtige Periode der allmählichen Ausbildung des jugendlichen Körpers leider gar keine experimentellen Grundlagen. Doch dürfte nicht zu bezweifeln sein, daß die tatsächlichen Verhältnisse beim Menschen nicht anders sind wie bei anderen Säugern. Aus den Erfahrungen der Pädiater ergibt sich für das jugendliche Alter eine außerordentliche Empfindlichkeit gegenüber ungenügender Wasserzufuhr. Bei Kindern des ersten Jahres kann konzentrierte Kost das Wachstum sofort hemmen und Fieber erzeugen, Erscheinungen, die bei bloßer Zugabe von Wasser zur Kost sofort rückgängig werden.

Als Gesamtresultat unserer Betrachtungen können wir feststellen, daß die ausgewachsenen Individuen einem fast gleichen Grenzgehalt des Trockengehaltes zustreben, daß aber, solange Wachstum besteht, der Trockengehalt gering ist, und in der ersten Zeit der embryonalen Entwickelung seinen Tiefstand erreicht.

Läßt man sich weiter von ernährungsphysiologischen Gesichtspunkten leiten, so tritt uns als nächstes die Frage entgegen, ob zwischen verschiedenen Quellungszuständen des Protoplasmas und dem Energieverbrauch irgendein Zusammenhang besteht.

a) Ausgewachsene Tiere verschiedener Größe oder verschiedener Spezies haben bei gleichem Quellungszustand pro Kilogramm einen ganz verschiedenen Energieverbrauch, bekanntlich um so größer, je geringer das absolute Gewicht eines Tieres ist. Doch kann man daraus noch nicht entnehmen, daß der kolloidale Zustand völlig irrelevant für die Intensität der Verbrennung ist. Wir brauchen uns nur zu erinnern, daß jeder Muskel zwischen Ruhezustand und Arbeitszustand trotz unveränderter Beschaffenheit eine außerordentliche Verschiedenheit des Energieverbrauchs aufweisen kann. Eine funktionelle Steigerung der Leistung braucht keine Änderung des Kolloidalzustandes. Die großen relativen Unterschiede des Energieverbrauchs bei Tieren und Menschen verschiedenen Gewichts hängen mit der Oberflächenentwickelung zusammen und sind von diesem Gesichtspunkt aus betrachtet zumeist nur Akkomodationserscheinungen an verschiedene thermische Zustände, also auch schließlich nur funktionelle Umgestaltungen.

b) Im extrauterinen Wachstum verhalten sich Organismen, was ihren Betriebsstoffwechsel anlangt, nach den allgemeinen Erfahrungen nicht wesentlich anders als Tiere gleicher Größe und Oberfläche im ausgewachsenen Zustand, und die Verschiedenheit des relativen Energieverbrauchs hat auch bei ihnen keine andere physiologische Aufgabe als die Akkomodation an den Wärmeverlust, wie dies bei den Ausgewachsenen von gleicher Größe der Fall ist. Vergleicht man aber Individuen gleicher Größe von a und b, so unterscheiden sich beide Gruppen also nicht durch den Betriebsstoffwechsel, sondern nur dadurch, daß Individuen der Gruppe b wachsen können, jene der Gruppe a aber nicht, zwischen beiden besteht der chemische Unterschied hinsichtlich des höheren Quellungsgrades der Gruppe b gegenüber a. Das ist entscheidend. Der Betriebsstoffwechsel kann also nicht von der Quellung abhängig sein.

c) Während uns der Energieverbrauch im erwachsenen Zustand und extrauterinen Wachstum recht gut bekannt ist, sind die Erfahrungen über die gleichen Verhältnisse im intrauterinen Wachstum wegen der entgegenstehenden

technischen Schwierigkeiten exakter Versuche kaum erschlossen. Nur hat Tangl durch Versuche am Hühnerei gezeigt, daß die Wärmeproduktion des bebrüteten Eies im Verhältnis zur geringen Menge des Hühnerembryos jedenfalls ziemlich hoch ist. Auch Bohr hat vor Jahren für die Verhältnisse des Säugers ähnliche Angaben gemacht. Entscheidendes in dieser Frage haben vor einiger Zeit die von Langstein und mir an Frühgeborenen angestellten Versuche gebracht. Es ist gelungen, frühzeitig ausgestoßene Früchte des 6. Monats am Leben zu erhalten und etwas später ihren Energiewechsel zu verfolgen. Diese kleinen Lebewesen haben einen großen Nahrungsverbrauch, gerade so wie man ihrer Kleinheit und relativ großen Oberfläche wegen hätte a priori annehmen sollen, und zeichneten sich weiter auch dadurch aus, daß die Größe des täglichen Anwuchses eine außerordentlich bedeutende ist. Wie sich der Fötus aber vor dem 6. Monat verhält, wissen wir vorläufig nicht. Der Trockengehalt solcher 6-Monate-Früchte dürfte sich um 9—10 Prozent herum bewegen, also vielleicht der äußersten Grenze der Quellung nicht mehr fernestehen. Es mag dahingestellt bleiben, wie die tatsächlichen Verhältnisse vor dem 6. Monat also liegen; leider besteht keine Aussicht, Frühgeburten aus dem 5. Monat aufzuziehen, da sie erfahrungsgemäß nicht lebensfähig sind. Somit kann man vorläufig schließen, daß das intrauterine Leben gewissermaßen, was den Stoffwechsel anlangt, bis auf eine sehr frühe Periode eine kontinuierliche Reihe mit dem extrauterinen Leben bildet. Nur fallen natürlich im Mutterleib einige funktionelle Leistungen aus, es findet keine Lungenatmung, keine Verdauung, keine eigentliche Exkretion großen Stiles statt, und Muskelbewegung und Einstellung auf die klimatischen Faktoren der Außenwelt fehlen. Als Ergebnis der vorstehenden Betrachtungen ergibt sich anscheinend die Unabhängigkeit des Betriebsstoffwechsels von dem Quellungszustand, soweit wir eben die Grenzen dieses Wechsels bisher haben verfolgen können. Man kann aber nicht darüber hinwegsehen, daß in allen Zuständen des Wachstums dieses nur stattfindet, solange die Zellen einen hohen Wassergehalt haben, so daß das Wachstum am intensivsten erscheint bei den höheren Graden der Quellung des Protoplasmas.

Bisher hat man einen Zusammenhang dieser Art nicht vermutet, Pütter hat gemeint, jugendliche Zellen brauchten eben einen anderen Turgor der Gewebe als ausgewachsene, und Tangl glaubte, daß das sich entwickelnde jugendliche Wesen in seinem Wassergehalt die Verhältnisse seiner »Ahnenreihe« durchlaufe, die niedrigstehenden Tiere wären wasserhaltiger wie die höheren. Diese Annahme trifft aber tatsächlich nicht einmal zu, denn wenn der Tierkörper schon alle »Organe« betriebsfähig besitzt, kann trotzdem der Wassergehalt noch groß sein.

Wenn meine oben vorgetragene Meinung viel Wahrscheinliches für sich hat, so könnte man daran denken, sie etwa durch ein Experiment zu stützen, bei dem etwa künstlich der Wassergehalt eines wachsenden Tieres verändert wird. Dazu gehören aber so schwerwiegende Eingriffe in den Organismus, daß von dieser Möglichkeit einer Nachprüfung des Vorgetragenen abgesehen werden muß.

Ich habe daher einen andern Weg gewählt und versucht, ob sich nicht an einzelligen Wesen systematische Versuche über Wasserentziehung, also Änderung des Quellungszustandes in ihrer Rückwirkung auf die Stoffwechselvorgänge, machen lassen.

VI.

Es gibt kaum ein Objekt, welches sich so günstig für alle möglichen Experimente erweist, wie die Bierhefe. Zunächst kann man ihr tatsächlich innerhalb weiter Grenzen das Wasser entziehen, ohne daß sie zugrunde geht, ja sie hält sich sogar in einem Zustande hochgradiger Wasserentziehung viele Tage ohne jedwede Schädigung und kann nach erneuter Aufquellung wieder ebenso lebenskräftig sein wie vorher. Als zweckmäßigste Methode der Variation des Wassergehalts erwies sich der Zusatz von Kochsalz zu Nährlösungen; man hat es dabei an der Hand, jeden Grad der Plasmolyse hervorzurufen. Morphologisch mit dem Mikroskop kann man bei 4.5 Prozent Kochsalz die ersten Zeichen einer Veränderung in der Zelle sehen, aber schon vorher hat die Zelle mehr oder minder viel Wasser abgegeben. Die gärende Hefe leistet der Wasserentziehung einen größeren Widerstand wie die nicht gärende. Ein Beispiel mag den wachsenden Trockengehalt der Hefe bei wechselndem Kochsalzgehalt der Nahrung für die gärende Hefe erläutern.

Kochsalz	Trockengehalt der Hefe
0 Prozent	13.4 Prozent
2 »	18.9 »
4 »	21.0 »
8 »	26.1 »
12 »	35.7 »
16 »	37.1 »

Bei 16 Prozent Kochsalz sind die Hefezellen sehr klein, doppelt konturiert, die Vakuolen schwinden, das Protoplasma wird von der Zellhaut zurückgezogen.

VII.

Die Gärungsversuche mit Hefe bei Ausschluß des Wachstums ergaben übereinstimmend unbehinderte Leistung bis zu einem Gehalt von 4 Prozent Kochsalz, was einem Trockengehalt der organischen Substanz der Zellen von 21.0 Prozent entspricht, dann nehmen die Leistungen ab, bei 16 Prozent finden sich immer noch Spuren einer Lebenstätigkeit. Die relative Leistungsfähigkeit ergibt sich aus folgenden Zahlen:

Kochsalzgehalt	Leistung
0 Prozent	100
4 »	100
8 »	69.6
12 »	21.7
16 »	1.8

Versuche mit Zymin zeigten, daß seine Wirkung bei 2 Prozent Kochsalz nachweislich geringer wird, bei 4 Prozent Kochsalz findet eine starke Abschwächung statt.

Wesentlich anders verläuft der Einfluß der Plasmolysierung auf das Wachstum. Man verwendet am besten hierzu Reinkulturen. Die Bierwürze wird mit wechselnden Mengen Kochsalz versetzt und dann mit kleinen Mengen von Hefekultur geimpft. Schon der Zusatz von 1 Prozent Kochsalz erzeugte eine deutliche Verminderung der Ernte. Vor 4 Prozent Kochsalzgehalt war das Wachstum zu Ende. Als Beispiel mag folgendes angeführt sein:

Wachstum	bei	0	Prozent	100
»	»	2	»	42.8
»	»	3	»	12.4
»	»	4	»	0

In Kombination mit den Gärversuchen folgert, daß die Variation des Wassergehalts zwischen 0 und 4 Prozent Kochsalz zwar unbehinderte Gärung, aber variable Wachstumsleistungen ergibt. Wenn die Hefe in der Gärung geschwächt war, kam bei meinen Versuchen überhaupt keine Zellvermehrung mehr zustande.

Ich glaube, man wird berechtigt sein, diese Ergebnisse über Energieverbrauch und Wachstum bei der Hefe zur Aufklärung der Vorgänge bei dem Wachstum der Tiere heranzuziehen. Die Bedeutung des wechselnden Wassergehalts der Zellen wird von einer andern Seite her beleuchtet und zeigt uns die Einfachheit der Mittel, durch welche ein so wichtiger Vorgang, wie die Ordnung der Massenbildung, beherrscht wird. Der Wassergehalt der jugendlichen Zellen wäre dann nichts Krankhaftes, sondern die Vorbedingung einer kräftigen Bildung neuer Zellsubstanz. Mit der Veränderung des kolloidalen Zustandes, mit der Konzentration des Protoplasmas, nimmt der Anteil, welchen die Zelle aus der Nahrung für den Aufbau der Leibessubstanz erübrigen kann, ab, bis die Wachstumsfähigkeit beendet ist Schließlich enden alle wachsenden Tiere bei demselben Wassergehalt ihrer Organe, den der Verlust der Wachstumskraft begleitet.

Wahrscheinlich ist eine der Funktionen der endokrinen Wachstumsdrüsen die Regulierung des Aufbaues der Zellkolloide mit dem Ziel, bei zunehmendem Massenwachstum allmählich die Konzentration der ersteren zu erhöhen.

Ausgegeben am 11. Oktober.

Berlin, gedruckt in der Reichsdruckerei

1923 XXV. XXVI. XXVII

SITZUNGSBERICHTE

DER PREUSSISCHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

Physikalisch-mathematische Klasse

MIT TAFEL IV

BERLIN 1923

VERLAG DER AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

IN KOMMISSION BEI WALTER DE GRUYTER U. CO.

Aus dem Reglement für die Redaktion der akademischen Druckschriften

Aus § 1.

Die Akademie gibt gemäß § 41, 1 der Statuten zwei fortlaufende Veröffentlichungen heraus: »Sitzungsberichte der Preußischen Akademie der Wissenschaften« und »Abhandlungen der Preußischen Akademie der Wissenschaften«.

Aus § 2.

Jede zur Aufnahme in die Sitzungsberichte oder die Abhandlungen bestimmte Mitteilung muß in einer akademischen Sitzung vorgelegt werden, wobei in der Regel das druckfertige Manuskript zugleich einzuliefern ist. Nichtmitglieder haben hierzu die Vermittelung eines ihrem Fache angehörenden ordentlichen Mitgliedes zu benutzen.

§ 3.

Der Umfang einer aufzunehmenden Mitteilung soll in der Regel in den Sitzungsberichten bei Mitgliedern 32, bei Nichtmitgliedern 8 Seiten in der gewöhnlichen Schrift der Sitzungsberichte, in den Abhandlungen 12 Druckbogen von je 8 Seiten in der gewöhnlichen Schrift der Abhandlungen nicht übersteigen.

Überschreitung dieser Grenzen ist nur mit Zustimmung der Gesamtakademie oder der betreffenden Klasse statthaft und ist bei Vorlage der Mitteilung ausdrücklich zu beantragen. Läßt der Umfang eines Manuskripts vermuten, daß diese Zustimmung erforderlich sein werde, so hat das vorlegende Mitglied es vor dem Einreichen von sachkundiger Seite auf seinen mutmaßlichen Umfang im Druck abschätzen zu lassen.

§ 4.

Sollen einer Mitteilung Abbildungen im Text oder auf besonderen Tafeln beigegeben werden, so sind die Vorlagen dafür (Zeichnungen, photographische Originalaufnahmen usw.) gleichzeitig mit dem Manuskript, jedoch auf getrennten Blättern, einzureichen.

Die Kosten der Herstellung der Vorlagen haben in der Regel die Verfasser zu tragen. Sind diese Kosten aber auf einen erheblichen Betrag zu veranschlagen, so kann die Akademie dazu eine Bewilligung beschließen. Ein darauf gerichteter Antrag ist vor der Herstellung der betreffenden Vorlagen mit dem schriftlichen Kostenanschlage eines Sachverständigen an den vorsitzenden Sekretar zu richten, dann zunächst im Sekretariat vorzuberaten und weiter in der Gesamtakademie zu verhandeln.

Die Kosten der Vervielfältigung übernimmt die Akademie. Über die voraussichtliche Höhe dieser Kosten ist — wenn es sich nicht um wenige einfache Textfiguren handelt — der Kostenanschlag eines Sachverständigen beizufügen. Überschreitet dieser Anschlag für die erforderliche Auflage 200000 M., so ist Vorberatung durch das Sekretariat geboten.

Aus § 5.

Nach der Vorlegung und Einreichung des **vollständigen druckfertigen** Manuskripts an den zuständigen Sekretar oder an den Archivar wird über Aufnahme der Mitteilung in die akademischen Schriften, und zwar, wenn eines der anwesenden Mitglieder es verlangt, verdeckt abgestimmt.

Mitteilungen von Verfassern, welche nicht Mitglieder der Akademie sind, sollen der Regel nach nur in die Sitzungsberichte aufgenommen werden. Beschließt eine Klasse die Aufnahme der Mitteilung eines Nichtmitgliedes in die Abhandlungen, so bedarf dieser Beschluß der Bestätigung durch die Gesamtakademie.

Aus § 6.

Die an die Druckerei abzuliefernden Manuskripte müssen, wenn es sich nicht bloß um glatten Text handelt, ausreichende Anweisungen für die Anordnung des Satzes und die Wahl der Schriften enthalten. Bei Einsendungen Fremder sind diese Anweisungen von dem vorlegenden Mitgliede vor Einreichung des Manuskripts vorzunehmen. Dasselbe hat sich zu vergewissern, daß der Verfasser seine Mitteilung als vollkommen druckreif ansieht.

Die erste Korrektur ihrer Mitteilungen besorgen die Verfasser. Fremde haben diese erste Korrektur an das vorlegende Mitglied einzusenden. Die Korrektur soll nach Möglichkeit nicht über die Berichtigung von Druckfehlern und leichten Schreibversehen hinausgehen. Umfängliche Korrekturen Fremder bedürfen der Genehmigung des redigierenden Sekretars vor der Einsendung an die Druckerei, und die Verfasser sind zur Tragung der entstehenden Mehrkosten verpflichtet. Übersteigen die Kosten der Korrektur einen gewissen Prozentsatz der Satzkosten, so fallen die Mehrkosten den Verfassern selbst ganz oder teilweise zur Last.

Aus § 8.

Von allen in die Sitzungsberichte oder Abhandlungen aufgenommenen wissenschaftlichen Mitteilungen, Reden, Adressen oder Berichten werden für die Verfasser, von wissenschaftlichen Mitteilungen, wenn deren Umfang im Druck 4 Seiten übersteigt, auch für den Buchhandel Sonderabdrucke hergestellt, die alsbald nach Erscheinen ausgegeben werden.

Von Gedächtnisreden werden ebenfalls Sonderabdrucke für den Buchhandel hergestellt, indes nur dann, wenn die Verfasser sich ausdrücklich damit einverstanden erklären.

§ 9.

Von den Sonderabdrucken aus den Sitzungsberichten erhält ein Verfasser, welcher Mitglied der Akademie ist, zu unentgeltlicher Verteilung ohne weiteres 50 Freiexemplare; er ist indes berechtigt, zu gleichem Zwecke auf Kosten der Akademie weitere Exemplare bis zur Zahl von noch 100 und auf seine Kosten noch weitere bis zur Zahl von 200 (im ganzen also 350) abziehen zu lassen, sofern er dies rechtzeitig dem redigierenden Sekretar angezeigt hat; wünscht er auf seine Kosten noch mehr Abdrucke zur Verteilung zu erhalten, so bedarf es dazu der Genehmigung der Gesamtakademie oder der betreffenden Klasse. — Nichtmitglieder erhalten 50 Freiexemplare und dürfen nach rechtzeitiger Anzeige bei dem redigierenden Sekretar weitere 200 Exemplare auf ihre Kosten abziehen lassen.

Von den Sonderabdrucken aus den Abhandlungen erhält ein Verfasser, welcher Mitglied der Akademie ist, zu unentgeltlicher Verteilung ohne weiteres 30 Freiexemplare; er ist indes berechtigt, zu gleichem Zwecke auf Kosten der Akademie weitere Exemplare bis zur Zahl von noch 100 und auf seine Kosten noch weitere bis zur Zahl von 100 (im ganzen also 230) abziehen zu lassen, sofern er dies rechtzeitig dem redigierenden Sekretar angezeigt hat; wünscht er auf seine Kosten noch mehr Abdrucke zur Verteilung zu erhalten, so bedarf es dazu der Genehmigung der Gesamtakademie oder der betreffenden Klasse. — Nichtmitglieder erhalten 30 Freiexemplare und dürfen nach rechtzeitiger Anzeige bei dem redigierenden Sekretar weitere 100 Exemplare auf ihre Kosten abziehen lassen.

(Fortsetzung auf S. 3 des Umschlags.)

SITZUNGSBERICHTE
DER PREUSSISCHEN
AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.
1923

XXV. Sitzung der physikalisch-mathematischen Klasse. 18. Oktober.

Vorsitzender Sekretar: Hr. Rubner.

1. Hr. Correns sprach über lang- und kurzgrifflige Sippen bei *Veronica gentianoides*.

Es wird für die genannte selbststerile Zierpflanze aus Kleinasien und dem Kaukasus das Vorkommen zweier Sippen nachgewiesen, die sich durch die Länge der Griffel unterscheiden. Bei der einen sind sie etwa doppelt so lang als bei der andern. Die Länge der Staubgefäße, die Größe der Pollenkörner und der Narbenpapillen ist dagegen nicht wesentlich verschieden. Die Anlage für kurze Griffel dominiert über die für lange, und es tritt bei der Keimzellbildung einfaches Spalten ein. Ein Unterschied im Erfolg der legitimen und illegitimen Bestäubung ist nicht sicher nachgewiesen. Dadurch unterscheidet sich *Veronica gentianoides* von einer heterostylen Pflanze vom *Linum*-Typus; sie kann aber als eine phylogenetische Vorstufe aufgefaßt werden.

2. Hr. Zimmermann legte eine Arbeit vor über »Die Knickfestigkeit von Stäben mit nicht gerader Achse«.

Darin wird gezeigt, daß die bisher stets gemachte Annahme, als könnten nur Stäbe mit vollkommen gerader Achse und genau achsrechter Belastung die Eulersche Knickgrenze erreichen, irrig ist. Es läßt sich im Gegenteil beweisen, daß jeder schwach gekrümmte oder eckig gebogene Stab bei der Euler-Last knickt, wenn sie an einem bestimmten Hebel angreift, dessen Größe und Lage vorausberechnet werden kann. Durch diese Ergebnisse wird die Eulersche Knicktheorie auf eine ganz neue, bedeutend erweiterte Grundlage gestellt.

3. Hr. Haberlandt legte eine Mitteilung vor: Über die Ursache des Ausbleibens der Reduktionsteilung in den Samenanlagen einiger parthenogenetischer Angiospermen.

Es wird gezeigt, daß in den Samenanlagen verschiedener somatisch-parthenogenetischer Angiospermen in der unmittelbaren Umgebung der Embryosackmutterzelle schon vor Eintritt der Reduktionsteilung Absterbeerscheinungen eintreten. Die dabei entstehenden Nekrohormone dürften die Ursache sein, daß die Reduktionsteilung sistiert und in die gewöhnliche, typische Kernteilung übergeführt oder auch von vornherein schon ausgeschaltet wird.

4. Hr. Haberlandt überreichte die von ihm herausgegebenen »Beiträge zur Allgemeinen Botanik« II. Band, 5. Heft (Berlin 1923).

5. Das korrespondierende Mitglied Hr. Friedrich Oltmanns in Freiburg i. B. übersandte sein Werk: Morphologie und Biologie der Algen, 2. Aufl. 3. Band (Jena 1923).

6. Vorgelegt wurde die mit Unterstützung der Akademie erschienene Arbeit von Willy Ramme, »Vorarbeiten zu einer Monographie des Blattidengenus Ectobius Steph.« (Sonderabdruck aus »Archiv für Naturgeschichte« 89. Jahrg. 1923).

Die Knickfestigkeit von Stäben mit nicht gerader Achse.

Eine Erweiterung der Eulerschen Knicktheorie.

Von H. Zimmermann.

Erster Teil: Gekrümmte Stäbe.

Wie auf Seite 197 des gegenwärtigen Jahrganges der Sitzungsberichte erwähnt, sollte die dort veröffentlichte Untersuchung der Formänderungen gekrümmter Stäbe in erster Linie dazu dienen, Wahrnehmungen aufzuklären, die bei den Knickversuchen des Deutschen Eisenbauverbandes gemacht worden sind. Die danach angestellten Zahlenrechnungen haben schnell an dieses Ziel geführt und noch darüber hinaus zu allgemeinen Ergebnissen von viel größerer Bedeutung als die des Einzelfalles ist, der die Untersuchung angeregt hat. Sie sollen weiterhin besprochen werden, nachdem der Weg gezeigt ist, auf dem sie gewonnen wurden.

I. Die elastischen Ausbiegungen.

Wie die Gleichung (23) auf Seite 204 der Sitzungsberichte lehrt, hängen die Ausbiegungen von so vielen Faktoren ab, daß ein unmittelbares Ablesen von Gesetzmäßigkeiten nicht in Betracht kommt[1]. Um solche zu finden, muß

---

[1] Für die Leser der Sonderdrucke wiederholt:

$$\delta = y - f - \eta \tag{23}$$

$$= \frac{f_2 - f_1}{2}\left(\frac{\sin\xi}{\sin\frac{\alpha}{2}} - \frac{2x}{a}\right) + y_0\left[\frac{1}{1-\frac{S}{K_l}}\frac{\sin\xi}{\sin\frac{\alpha}{2}} - \frac{2x}{a}\right]\sin\pi\frac{x_m}{l}\sin\pi\frac{a}{2l}$$

$$+ \frac{f_2 + f_1}{2}\left(\frac{\cos\xi}{\cos\frac{\alpha}{2}} - 1\right) - y_0\left[\frac{1}{1-\frac{S}{K_l}}\frac{\cos\xi}{\cos\frac{\alpha}{2}} - 1\right]\cos\pi\frac{x_m}{l}\cos\pi\frac{a}{2l}$$

$$+ y_0\left[\frac{1}{1-\frac{S}{K_l}} - 1\right]\cos\pi\left(\frac{x_m}{l} + \frac{x}{l}\right).$$

Der Stab ist wagerecht liegend gedacht. Als X-Achse ist eine durch die Endpunkte der Fehlerhebel f_1 und f_2 gehende Gerade mit dem Fußpunkte eines auf sie von der Mitte der Stabsehne aus gefällten Lotes als Nullpunkt der x und y angenommen. Der Abstand eines zu beliebigem x gehörigen Punktes der Achse des belasteten Stabes von der X-Achse ist y; der Abstand desselben Punktes von der Stabsehne vor der Belastung η und der Abstand des entsprechenden Punktes der Stabsehne von der X-Achse ist f. Die Anfangsform des Stabes ist ein Teil einer (als Fehlerlinie bezeichneten) durch die Endpunkte der Stabsehne gehenden Kosinuslinie mit der Scheitelhöhe y_0 und der Wellenlänge l. Die Mitte der Stabsehne hat von der Y-Achse der Kosinuslinie den Abstand x_m. Die Fehlerhebel sind positiv gerechnet, wenn sie so liegen, daß die an ihnen angreifende Stabkraft S die Anfangskrümmung in der Mitte des Stabes vergrößert. Mit δ ist die Änderung bezeichnet, die der Abstand eines Punktes der Stabachse von der Stabsehne durch die Belastung erfährt: also die elastische Ausbiegung.

man gewisse Beschränkungen zulassen, je nach der Art der zu lösenden Aufgabe. Wir fragen, ob es auch für gekrümmte Stäbe eine Knickgrenze gibt, und wenn ja, welche Bedingungen erfüllt sein müssen, damit der Stab sie erreicht. Für diesen Zweck ist es nicht nötig, die Ausbiegungen aller Punkte der Stabachse zu bestimmen. Es genügt einer, und wir wählen dafür zweckmäßig die Mitte der Stablänge. Dann scheiden x und ξ als Veränderliche aus, und die mit x oder mit $\sin \xi$ multiplizierten Glieder der Gleichung (23) verschwinden. Ferner darf die Betrachtung vorläufig auf Stäbe beschränkt werden, deren Krümmung symmetrisch ist zur Stabmitte; für solche ist $x_m = 0$. Die Fehlerhebel brauchen nicht gleich zu sein, da ihr Unterschied nur in den schon verschwundenen Gliedern auftritt, und da nur noch ihr Mittelwert vorhanden ist. Der bequemeren Schreibung und Darstellung wegen rechnen wir aber nicht mit $(f_1 + f_2) : 2$, sondern mit zwei gleichen Hebeln $\boldsymbol{f} = (f_1 + f_2) : 2$[2]. Diese wie auch die Scheitelhöhe $\boldsymbol{y}_0$ und die Wellenlänge $\boldsymbol{l}$ der Fehlerlinie betrachten wir als gegeben; als Unabhängigveränderliche wählen wir die Stabkraft $\boldsymbol{S}$ oder ihr Verhältnis zur Knickkraft $\boldsymbol{K}$ eines geraden Stabes von gleichem Querschnitt und gleicher Länge $\boldsymbol{a}$ wie der zu untersuchende krumme Stab. In (23) tritt auch noch eine Knickkraft $\boldsymbol{K}_l$ auf die sich von K nur dadurch unterscheidet, daß sie für einen ebensolchen geraden Stab, aber mit einer Länge l gleich der Wellenlänge der Fehlerlinie gilt. Sie läßt sich beseitigen, da aus

$$K = \pi^2 \frac{EJ}{a^2} \quad \text{und} \quad K_l = \pi^2 \frac{EJ}{l^2}$$

$$\text{(1)} \qquad \text{mit} \quad \frac{a}{l} = n \qquad \boldsymbol{K}_l = n^2 \boldsymbol{K}$$

folgt. Es stellt dann n offenbar die Anzahl der auf die Stablänge a entfallenden Wellen der Fehlerlinie dar, also eine positive ganze oder gebrochene Zahl. Schließlich empfiehlt es sich, die unanschauliche Größe α mit Hilfe der Gleichung für K zu entfernen. Aus ihr folgt

$$\text{(2)} \qquad \alpha = \frac{a}{L} = \frac{a}{\sqrt{\frac{EJ}{S}}} = \pi \sqrt{\frac{\boldsymbol{S}}{\boldsymbol{K}}}.$$

Das hat den Vorteil, daß die Stabkraft S als maßgebende Veränderliche überall sichtbar wird. So ergibt sich die Gleichung der elastischen Ausbiegung δ_m der Stabmitte in der Form

$$\text{(3)} \quad \delta_m = \boldsymbol{f}\left[\frac{1}{\cos\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{\boldsymbol{S}}{\boldsymbol{K}}}} - 1\right] + \boldsymbol{y}_0 \left[\frac{1 - \dfrac{\cos\frac{\pi}{2} n}{\cos\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{\boldsymbol{S}}{\boldsymbol{K}}}}}{1 - \frac{1}{n^2}\frac{\boldsymbol{S}}{\boldsymbol{K}}} + \cos\frac{\pi}{2} n - 1\right].$$

[2] Sind die Fehlerhebel nicht gleich, so müssen die Enden des Stabes selbstverständlich gestützt sein. Es wird vorausgesetzt, daß sie dabei frei drehbar bleiben.

Jetzt ist die Bedeutung der einzelnen Teile gut zu erkennen. Wenn $y_0 = 0$, so ist der Stab gerade und (3) geht dann in die bekannte Gleichung des geraden, einseitig am Hebel f mit S belasteten Stabes über. Ist dagegen $f = 0$, so ergibt sich die bisher noch nicht bekannte Gleichung des achsrecht belasteten krummen Stabes[3].

Trägt man die Werte des ersten Gliedes von (3) als Funktionen von $S:K$ für verschiedene f auf, so erhält man eine Kurvenschar wie im Bild 1. Die einzelnen Kurven nähern sich der in der Höhe $S:K = 1$ gezogenen wagerechten Geraden asymptotisch und um so schneller, je kleiner der zugehörige Fehlerhebel f. Ist er Null, so zerfällt die Kurve in eine durch den

Bild 1. *Bild 2.*

Ausbiegungen δ_m der Stabmitte
beim geraden Stabe beim krummen Stabe
für verschiedene Fehlerhebel.

Nullpunkt der δ_m gehende lotrechte und die ebenerwähnte wagerechte Gerade. Ihr Verlauf ist also unstetig bei $S = K$, das heißt wenn die Stabkraft die Eulersche Knickgrenze erreicht.

Durch Auftragen der Werte des zweiten Gliedes von (3) für verschiedene y_0 würde man ähnliche Kurven erhalten. Wir sehen aus Gründen der Sparsamkeit davon ab und geben im Bild 2 gleich die der vollständigen Gleichung (3) entsprechende Kurvenschar. Da jetzt δ_m von den zwei Parametern f und y_0 abhängt, wird man zweckmäßig nicht die δ_m, sondern $\delta_m : f$ oder $\delta_m : y_0$ für die Auftragung berechnen. Es erscheint dann auf der rechten Seite von (3) entweder im zweiten Gliede der Faktor $y_0 : f$ oder im ersten der Faktor $f : y_0$. Welchen Weg man wählt, ist nicht von Belang; jedoch kann in den Fällen, wo f Null wird, natürlich nur in der letzteren Weise verfahren werden. (Die Annahme $y_0 = 0$ kommt nicht in Betracht, da sie auf den geraden Stab

[3] Unter »achsrecht« ist hier verstanden, daß die Wirklinie der Stabkraft S durch die Schwerpunkte der Endquerschnitte des Stabes geht.

zurückführt.) Der Kürze des Ausdruckes wegen sehen wir im folgenden von all dem ab und behandeln δ_m als die im Bilde dargestellte Größe.

Die wesentliche Verschiedenheit beider Kurvenscharen springt in die Augen. Im Bild 2 sind zwei Kurven durch die Ziffern 1 und 2 hervorgehoben. Alle zwischen ihnen liegenden weichen von der $S:K$-Achse erst in der Richtung der positiven δ_m ab, biegen dann um, schneiden diese Achse und verlaufen nach der negativen Seite ins Unendliche. Diejenige Kurve, deren Schnittpunkt in den Nullpunkt fällt, also mit diesem einen Doppelpunkt bildet, ist die Kurve 1. Sie berührt demgemäß die $S:K$-Achse. Alle Kurven, die etwa noch links von ihr gezeichnet werden können, verlaufen von Anfang an und dauernd auf der negativen Seite. Die Kurve 2 hat in der Höhe $S:K = 1$ eine Unstetigkeit. Sie geht dort in die wagerechte Gerade über, ähnlich wie im Bild 1 die zu $f = 0$ gehörige lotrechte Gerade. Man kann sagen, daß die Kurve 2 erhalten wird, wenn man eine die $S:K$-Achse schneidende Kurve so bestimmt, daß der Schnittpunkt in der Höhe $S:K = 1$ liegt. Alle Kurven rechts von 2 verlaufen dauernd auf der positiven Seite der $S:K$-Achse. Die Kurven 1 und 2 trennen drei Gebiete mit verschiedenartigem Verhalten der Einzelkurven und mögen daher Grenzkurven heißen. Ihre Lage soll jetzt bestimmt werden.

Wenn man in (3) die Stabkraft $S = 0$ setzt, so wird selbstverständlich $\delta_m = 0$, und zwar dadurch, daß jedes der beiden Glieder auf der rechten Seite für sich verschwindet. Im Bild 2 handelt es sich nicht um diesen Fall, sondern darum, daß δ_m für endliche Werte von $S:K$ Null wird. Aus (3) ergibt sich leicht, daß das eintritt, wenn

$$(4)\qquad \frac{f}{y_0} = \frac{\cos\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{S}{K}}\left[1 + \left(\cos\frac{\pi}{2}n - 1\right)\left(1 - \frac{1}{n^2}\frac{S}{K}\right)\right] - \cos\frac{\pi}{2}n}{\left(\cos\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{S}{K}} - 1\right)\left(1 - \frac{1}{n^2}\frac{S}{K}\right)},$$

und dies ist die allgemeine Bedingung dafür, daß die δ_m-Kurve die $S:K$-Achse bei dem in (4) nach Belieben einzusetzenden Werte von $S:K$ schneidet.

Soll das bei $\boldsymbol{S = 0}$ geschehen, so erscheint der zugehörige Wert von $f:y_0$ aus (4) in der Form $0:0$. Nach einem der für solche Fälle üblichen Verfahren ergibt sich dann aber

$$(5)\qquad \left(\frac{f}{y_0}\right)_1 = \frac{\left(\frac{1}{n^2} + \frac{\pi^2}{8}\right)\cos\frac{\pi}{2}n - \frac{1}{n^2}}{\frac{\pi^2}{8}}$$

als derjenige Wert von $f:y_0$, der in (3) eingesetzt die Grenzkurve 1 liefert.

Soll die $S:K$-Achse bei $\boldsymbol{S = K}$ geschnitten werden, so folgt hiermit aus (4) sehr einfach der die Grenzkurve 2 bestimmende Wert

$$(6)\qquad \left(\frac{f}{y_0}\right)_2 = \frac{\cos\frac{\pi}{2}n}{1 - \frac{1}{n^2}},$$

Für $n = 1$ wird (6) unbrauchbar. Der wahre Wert ist dann

$$\left(\frac{f}{y_0}\right)_2 = -\frac{\pi}{4}. \tag{7}$$

Jetzt ist nur noch der im Bild 2 mit δ_g bezeichnete größte Wert von δ_m für die Grenzkurve 2 zu berechnen. Dabei zeigt sich eine eigentümliche Schwierigkeit. Der Wert von $(f:y_0)_2$ wurde so bestimmt, daß er eine Kurve ergibt, die die $S:K$-Achse bei $S = K$ schneidet. Führt man aber ersteren Wert in (3) ein, so wird δ_m mit $S = K$ nicht Null, sondern entweder

$$\infty - \infty \quad \text{oder} \quad \frac{0}{0},$$

je nach dem Werte von $\cos\frac{\pi}{2}n$. Es ist das eine Folge der Unstetigkeit der Kurve 2 im Punkte mit der Höhe $S:K = 1$. Um den wahren Wert von δ_m zu ermitteln, setzen wir in (3)

$$\sqrt{\frac{S}{K}} = 1 - u \quad \text{und} \quad \frac{S}{K} = 1 - 2u + u^2,$$

wo u eine verschwindend kleine Größe bedeuten soll. Dann wird $\cos\frac{\pi}{2}\sqrt{S:K} = \frac{\pi}{2}u$, und es folgt aus (3) nach Teilen mit y_0, Einführung von $(f:y_0)_2$ und Übergang zur Grenze $u = 0$:

$$\frac{\delta_g}{y_0} = \frac{\frac{4}{\pi} + \frac{1}{n^2} - 1}{n^2 + \frac{1}{n^2} - 2}\cos\frac{\pi}{2}n + \frac{1}{n^2 - 1}. \tag{8}$$

Die Gleichung wird unbrauchbar für $n = 1$. Der wahre Wert kann ähnlich wie vorher durch einen Grenzübergang bestimmt werden, indem man $n = 1 + u$ setzt[4]. Man findet so

$$\frac{\delta_g}{y_0} = \frac{\pi - 3}{4}. \tag{9}$$

II. Die Knickbedingungen.

Nach diesen Vorbereitungen kann nun zur Erörterung der Knickfrage geschritten werden. Der Begriff des Knickens läßt sich in den Satz fassen: *Ein Stab befindet sich an der Knickgrenze, wenn die durch die Last erzeugten Ausbiegungen unbestimmt sind, ohne einen endlichen Wert zu überschreiten.* Wählt man als kennzeichnende Ausbiegung diejenige der Stabmitte, das heißt δ_m, so besteht die Aufgabe zunächst darin,

[4] In der Reihenentwicklung sind dabei zum Teil die Glieder bis zur dritten Potenz der verschwindenden Größe u zu berücksichtigen. Für $\cos\frac{\pi}{2}n$ genügt die Näherung $-\frac{\pi}{2}u$.

die Bedingungen zu ermitteln, unter denen die Gleichung (3) für δ_m einen unbestimmten Wert ergeben kann. Der Einfluß, den die in (3) enthaltenen Größen hierauf ausüben, ist verschiedenartig. Die Scheitelhöhe y_0 der Fehlerlinie und die Zahl n der auf die Stablänge a entfallenden Wellen betreffen die Anfangsform des Stabes. Diese Größen sind also von der Stabkraft unabhängig, und ihr Einfluß auf die Knickgrenze stellt gewissermaßen eine Vorbedingung dar. Der Fehlerhebel f hängt zwar auch nicht von S ab, kennzeichnet aber die Art des Lastangriffes. Endlich ist die Höhe der Last, bei der die Knickgrenze erreicht wird, als das entscheidendste Merkmal zu nennen.

Diese Vielheit der Einflüsse nötigt dazu, die Aufgabe in verschiedene Fälle zu zerlegen, was nunmehr geschehen soll. Der Vollständigkeit wegen führen wir auch den geraden Stab mit auf.

A. Der Stab ist gerade.

In (3) ist $y_0 = 0$. Die Ausbiegung kann nur dadurch unbestimmt werden, daß

$$f = 0 \quad \text{und} \quad \cos \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{S}{K}} = 0 \tag{10}$$

wird. Die Stabkraft S muß also in der Achse wirken und die Größe

$$S = K = \pi^2 \frac{EJ}{a^2} \tag{11}$$

haben. Das ist der bekannte Wert nach EULER.

B. Der Stab ist gekrümmt: $y_0 > 0$.

1. Fall: Es sei dieselbe Bedingung erfüllt wie vorher, das heißt $f = 0$ und $S = K$.

Dann wird das erste Glied in (3) wieder unbestimmt, das zweite aber unendlich groß, es sei denn

$$\cos \frac{\pi}{2} n = 0. \tag{12}$$

Das ist die Vorbedingung dafür, daß die Ausbiegung bei $S = K$ unbestimmt wird. Sie ist erfüllt, wenn

$$n = 3 \quad 5 \quad 7 \cdots\cdots.$$

Der Stab erreicht also die Knickgrenze bei der EULER-Last, wenn er vor der Belastung nach einer ungeraden Anzahl ganzer Kosinuswellen gekrümmt ist und achsrecht belastet wird. Die Annahme, daß er nur eine Welle enthalte, schließen wir vorläufig aus, weil der Nenner des Bruches im zweiten Gliede von (3) bei $n = 1$ und $S = K$ Null werden würde.

2. Fall: Es sei $f > 0$. Die Last greift dann an einem positiven Hebelarm an; das heißt so, daß sie die Anfangskrümmung des Stabes vergrößert. Ferner sei $S = K$.

Dann wird das erste Glied in (3) positiv unendlich groß. Unbestimmtheit kann nur eintreten, wenn das zweite Glied negativ unendlich, also bei positiven Werten von $\cos\frac{\pi}{2}n$. Demnach ist

$$(13) \qquad \cos\frac{\pi}{2}n > 0 \quad \text{oder} \quad 3 < n < 5\,; \quad 7 < n < 9 \quad \text{usw.}$$

die Vorbedingung dafür, daß der Stab mit einem positiven Fehlerhebel bei der Euler-Last die Knickgrenze erreichen kann. Die Annahme $n < 1$ wird zunächst ausgeschlossen.

3. Fall: Es sei $f < 0$. Die Last greift an einem negativen Hebel an; das heißt so, daß sie die Anfangskrümmung des Stabes verkleinert. Ferner sei $S = K$.

Dann wird das erste Glied in (3) negativ unendlich groß. Unbestimmtheit der Ausbiegung kann nur eintreten, wenn das zweite Glied positiv unendlich ist. Und dies kann jetzt in dreierlei Weise stattfinden wie folgt:

a. Es ist

$$(14) \qquad \cos\frac{\pi}{2}n < 0 \quad \text{oder} \quad 1 < n < 3\,; \quad 5 < n < 7 \quad \text{usw.}$$

b. Es ist

$$(15) \qquad \cos\frac{\pi}{2}n > 0 \quad \text{und} \quad n < 1\,.$$

c. Es ist

$$(16) \qquad \cos\frac{\pi}{2}n = 0 \quad \text{und} \quad n = 1\,.$$

Im Fall b ist der Stab vor der Belastung nach einem Bruchteil der Kosinuswelle gekrümmt; im Fall c nach einer ganzen Kosinuswelle. Hierdurch erledigen sich die unter 1 und 2 ausgeschlossenen Annahmen. Die Gleichungen (14), (15) und (16) sind die Vorbedingungen dafür, daß der Stab mit einem negativen Fehlerhebel bei der Eulerlast die Knickgrenze erreichen kann.

Damit sind alle möglichen Fälle aufgezählt. Die vorstehenden Betrachtungen geben aber noch keine vollständige Antwort auf die Frage nach der Knickbedingung für gekrümmte Stäbe; deshalb wurden die entwickelten Bedingungen auch nur Vorbedingungen genannt. Zur Festlegung der Knickgrenze genügt es nicht, daß die Ausbiegung unbestimmt wird; sie darf auch einen endlichen Wert nicht überschreiten, wie schon im Eingange dieses Abschnittes hervorgehoben wurde. Die Bedingung hierfür muß also noch ermittelt werden. Erst aus ihr ergeben sich bestimmte zusammengehörige Werte der durch die Vorbedingungen nur in gewisse Grenzen eingeschlossenen Größen y_0, f und n. Da y_0 und n die Art der Anfangskrümmung des Stabes kennzeichnen und als gegeben anzusehen sind, fragen wir jetzt: In welchem Verhältnis muß f zu y_0 stehen, wenn der Stab die Knickgrenze bei einem endlichen Werte der Ausbiegung δ_m erreichen können soll?

Die Antwort hierauf findet man am einfachsten mit Hilfe des Bildes 2. Alle darin dargestellten Kurven, mit Ausnahme der Grenzkurve 2, gehen bei $S:K = 1$ ins Unendliche. Nur diese führt bei Annäherung an $S:K = 1$ zu einem endlichen Wert der Ausbiegung, nämlich δ_a, wie ihn die Gleichungen

(8) oder (9) ergeben. Daß auf diesem Wege ein bestimmter Wert für δ_m gefunden wird, steht natürlich nicht in Widerspruch damit, daß δ_m unbestimmt wird bei $S:K=1$. Es ist das eben eine Folge der im vorigen Abschnitt besprochenen Unstetigkeit im Punkte mit der Höhe $S:K=1$. Der die Grenzkurve 2 festlegende, aus (6) oder (7) zu berechnende Wert von $f:y_0$ stellt also das gesuchte Verhältnis dar.

Das Gesamtergebnis unserer Betrachtungen lautet demnach wie folgt:

Ein vor der Belastung nach n Kosinuswellen in zur Mitte symmetrischer Lage gekrümmter Stab von der Länge a erreicht die Knickgrenze bei der Last

$$S=K=\pi^2\frac{EJ}{a^2},$$

wenn diese an Hebelarmen f_g angreift, deren Größe und Vorzeichen durch die Gleichung (6)

$$\frac{f_g}{y_0}=\frac{\cos\frac{\pi}{2}n}{1-\frac{1}{n^2}}$$

bestimmt ist. Bei $n=1$ tritt die Gleichung (7)

$$\frac{f_g}{y_0}=-\frac{\pi}{4}$$

an ihre Stelle[5].

Das ist die Knickregel. Sie wird ergänzt durch folgenden Zusatz: Während der gerade achsrecht belastete Stab die Knickgrenze mit der Ausbiegung Null erreicht, biegt sich der gekrümmte Stab schon bei beginnender Belastung aus. Die Zunahme der Biegung bei wachsender Last wird durch die Grenzkurve 2 im Bild 2 dargestellt. Ihre δ_m-Werte ergeben sich aus (3), wenn man für f das die Knickgrenze bestimmende f_g einsetzt. Die größte, unmittelbar vor dem Knicken eintretende Ausbiegung δ_g folgt aus (8) oder (9). Das beigefügte Täfelchen läßt erkennen, daß δ_g meist nur einen kleinen Bruchteil der Scheitelhöhe y_0 der Fehlerlinie beträgt.

n	$\frac{f_g}{y_0}$	$\frac{\delta_g}{y_0}$	n	$\frac{f_g}{y_0}$	$\frac{\delta_g}{y_0}$	n	$\frac{f_g}{y_0}$	$\frac{\delta_g}{y_0}$	n	$\frac{f_g}{y_0}$	$\frac{\delta_g}{y_0}$
	−	+		−	+		−	+		+	+
0.2	0.040	0.002	1.2	1.011	0.048	2.2	1.199	0.111	3.2	0.342	0.122
0.4	0.154	0.006	1.4	1.200	0.062	2.4	0.979	0.118	3.4	0.643	0.117
0.6	0.331	0.014	1.6	1.328	0.076	2.6	0.690	0.123	3.6	0.877	0.109
0.8	0.549	0.024	1.8	1.376	0.089	2.8	0.354	0.125	3.8	1.022	0.100
1.0	0.785	0.035	2.0	1.333	0.101	3.0	0	0.125	4.0	1.067	0.091

III. Beispiele.

Im Bild 3 ist ein Stab dargestellt, dessen Anfangsform eine Kosinuswelle von der Länge $l=a$ bildet. Es ist also $n=1$. Die Fehlerhebel liegen

[5] Da die Unterscheidung gegenüber dem zur Grenzkurve 1 gehörigen $(f:y_0)_1$ nicht mehr nötig ist, wird hier für $(f:y_0)_2$ die einfachere Bezeichnung $f_g:y_0$ benutzt.

Bild 3. Anfangsform der Stabachse eine Welle.

auf derselben Seite der Stabsehne 1—2 wie der Wellenscheitel, sind also negativ. Wenn, vom Vorzeichen abgesehen,

$$f = f_g = \pi y_0 : 4 = 0.785\, y_0, \qquad \text{Gl. (7)}.$$

so biegt sich der Stab mit zunehmender Belastung nach unten aus. Er erreicht die Knickgrenze bei $S = K$. Kurz vorher ist die größte Ausbiegung in der Mitte

$$\delta_g = (\pi - 3)\, y_0 : 4 = 0.0354\, y_0. \qquad \text{Gl. (9)}.$$

Ist f kleiner als f_g, so biegt sich der Stab dauernd und unbegrenzt nach unten aus, ohne die Knickgrenze zu erreichen. Ist f größer als f_g, aber kleiner als

$$f = 8\, y_0 : \pi^2 = 0.811\, y_0, \qquad \text{Gl. (5)}.$$

so biegt er sich anfänglich nach unten, kehrt dann um und biegt sich darauf dauernd und unbegrenzt nach oben aus. Ist f noch größer, so geschieht letzteres gleich von Anfang an. In beiden Fällen wird die Knickgrenze nicht erreicht.

Bild 4 zeigt einen Stab, dessen Anfangsform zwei Kosinuswellen von der Länge $l = {}^1/_2 a$ umfaßt. Hier ist $n = 2$. Die Fehlerhebel liegen ebenso wie vorher. Ist, vom Vorzeichen abgesehen,

$$f = f_g = 4\, y_0 : 3 = 1.333\, y_0, \qquad \text{Gl. (6)}.$$

so biegt sich der Stab nach unten aus und erreicht die Knickgrenze bei $S = K$. Kurz vorher ist die größte Ausbiegung in der Mitte

$$\delta_g = (2 : 3 - 16 : 9\pi)\, y_0 = 0.1008\, y_0. \qquad \text{Gl. (8)}.$$

Bild 4. Anfangsform der Stabachse zwei Wellen.

Ist f kleiner als f_g, so biegt sich der Stab dauernd nach unten aus, ohne die Knickgrenze zu erreichen. Ist f größer als f_g, aber kleiner als

$$f = \frac{4 + \pi^2}{\pi^2}\, y_0 = 1.405\, y_0, \qquad \text{Gl. (5)}.$$

so biegt sich der Stab anfänglich nach unten, kehrt dann um und biegt sich dauernd nach oben. Ist f noch größer, so biegt er sich von Anfang an und dauernd nach oben. In beiden Fällen wird die Knickgrenze nicht erreicht.

Bild 5 zeigt einen Stab, dessen Anfangsform aus drei Kosinuswellen von der Länge $l = {}^1/_3 a$ besteht. Es ist also $n = 3$. Sind die Fehlerhebel

$$f = f_g = 0, \qquad \text{Gl. (6)}.$$

so biegt sich die Stabmitte nach unten aus bis zu dem Größtwert

$$\delta_g = {}^1/_8\, y_0. \qquad \text{Gl. (8)}.$$

Bild 5. Anfangsform der Stabachse drei Wellen.

Dann tritt Knicken ein bei $S = K$. Sind die Fehlerhebel positiv, so biegt sich die Stabmitte dauernd und unbegrenzt nach unten. Sind sie negativ, aber kleiner als

$$f = \frac{8}{9\pi^2} y_0 = 0.0901\, y_0\,, \qquad \text{Gl. (5).}$$

so biegt sie sich erst nach unten. Dann kehrt sie um und biegt sich dauernd und unbegrenzt nach oben. Ist f noch größer, so biegt sich die Mitte von Anfang an und dauernd nach oben. In beiden Fällen wird die Knickgrenze nicht erreicht.

Dieses Beispiel ist besonders interessant. Mit $f = 0$ und $\cos \frac{\pi}{2} n = 0$ folgt aus (3) sehr einfach für $n = 3, 5, 7$ usw.

$$(17) \qquad \delta_m = y_0 \frac{\frac{S}{K}}{n^2 - \frac{S}{K}}\,.$$

Die goniometrischen Funktionen sind jetzt verschwunden, und die Ausbiegung wird durch eine rein algebraische Gleichung bestimmt. Mit S nahe bei K ergibt sich die größte Ausbiegung vor dem Knicken

$$\delta_g = \frac{y_0}{n^2 - 1}\,,$$

und mit $n = 3$ der vorher angeführte Wert von δ_g.

Die Gleichung (17) gilt nur so lange, wie S — wenn auch nur verschwindend wenig — kleiner ist als K. Bei $S = K$ wird δ_m unbestimmt, wie Gleichung (3) erkennen läßt. Eine Untersuchung des Verlaufes der ganzen Biegelinie hat gezeigt, daß solange wie S kleiner ist als K, die Scheitel der äußeren Wellen sich ebensoviel nach oben ausbiegen wie der Scheitel der mittleren Welle nach unten, und daß die Schnittpunkte der Achse mit der Stabsehne an ihrer Stelle bleiben. Im Bild 5 ist das durch die gestrichelten Bogenlinien angedeutet. Erst wenn $S = K$ wird, weichen sie nach oben oder unten aus.

IV. Ausdehnung auf Anfangskrümmungen allgemeinerer Art.

Die bisher gefundenen Ergebnisse beruhen auf der Voraussetzung, daß die Fehlerlinie des Stabes eine Kosinuslinie mit der Gleichung

$$(18) \qquad Y = y_0 \cos \pi \frac{x_m + x}{l}$$

sei[6]. Da sie die drei willkürlichen Größen y_0, l und x_m enthält, kann sie eine große Mannigfaltigkeit von Formen darstellen. Sie erschöpft aber nicht alle Möglichkeiten. Das leistet nun die als konvergent anzunehmende Reihe

$$(19)\quad Y = y_1 \cos\pi\frac{x_1+x}{l_1} + y_2\cos\pi\frac{x_2+x}{l_2} + \cdots + y_k\cos\pi\frac{x_k+x}{l_k},$$

wenn man unter k eine unbegrenzt wachsende ganze Zahl und unter y_k eine ebenso abnehmende Länge versteht. Für die Bedürfnisse der Anwendung wird es ausreichen, eine endliche Zahl z von Gliedern zu berücksichtigen. Dann tritt an Stelle von (19) die Summenformel

$$(20)\quad Y = \sum_{k=1}^{k=z} y_k \cos\pi\frac{x_k+x}{l_k}.$$

Bezieht man die hierdurch ausgedrückte Kurve nicht auf die Hauptachse der Kosinuslinie (18), sondern auf die Stabsehne, so lautet ihre Gleichung

$$(21)\quad \eta = \sum_{k=1}^{k=z} y_k\left[\cos\pi\frac{x_k+x}{l_k} + \left(\sin\pi\frac{x_k}{l_k}\sin\pi\frac{a}{2l_k}\right)\frac{2x}{a} - \cos\pi\frac{x_k}{l_k}\cos\pi\frac{a}{2l_k}\right].$$

Die Fehlerlinie wird hiernach jetzt durch Zusammenfügung einer beliebigen Zahl von Kosinuslinien mit verschiedener Scheitelhöhe, Scheitellage und Wellenlänge dargestellt. Man überzeugt sich leicht, daß die Differentialgleichung der zugehörigen Biegelinie die folgende Form hat:

$$(22)\quad \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{S}{EJ}y = -\sum_{k=1}^{k=z} y_k\left(\frac{\pi}{l_k}\right)^2\cos\pi\frac{x_k+x}{l_k}.$$

Greift die Stabkraft S an den Fehlerhebeln f_1 und f_2 an, so lautet die Gleichung der auf ihre Wirklinie bezogenen Biegelinie des Stabes:

$$(23)\quad y = \left[\frac{f_2-f_1}{2} + \sum\frac{y_k}{1-\frac{S}{(K_l)_k}}\sin\pi\frac{x_k}{l_k}\sin\pi\frac{a}{2l_k}\right]\frac{\sin\xi}{\sin\frac{\alpha}{2}}$$
$$+\left[\frac{f_2+f_1}{2} - \sum\frac{y_k}{1-\frac{S}{(K_l)_k}}\cos\pi\frac{x_k}{l_k}\cos\pi\frac{a}{2l_k}\right]\frac{\cos\xi}{\cos\frac{\alpha}{2}}$$
$$+\sum\frac{y_k}{1-\frac{S}{(K_l)_k}}\cos\pi\left(\frac{x_k}{l_k}+\frac{x}{l_k}\right).$$[7]

Die Größe y enthält auch den der Anfangsform des Stabes entsprechenden Krümmungspfeil η. Demgemäß geht die Gleichung (23) in (21) über, wenn man $S = 0$ setzt und die dann bedeutungslosen Fehlerhebel wegläßt.

[6] Sitzungsberichte S. 197, Gleichung (1). — Die obenstehende Entwicklung schließt sich an die frühere an, die der Leser deshalb nachsehen wolle, wenn er eine Erklärung wünscht.

[7] Die Summengrenzen sind zur Vereinfachung des Satzes weggelassen. Ferner ist

$$\xi = \frac{x}{\sqrt{\frac{EJ}{S}}};\quad \alpha = \frac{a}{\sqrt{\frac{EJ}{S}}};\quad (K_l)_k = \pi^2\frac{EJ}{l_k^2}.$$

Aus (23) ergibt sich schließlich die elastische Ausbiegung δ eines beliebigen Punktes der Stabachse unter der Last S:

$$(24)\qquad \delta = y - \eta - \frac{f_2 - f_1}{2}\frac{2x}{a} - \frac{f_2 + f_1}{2}$$

$$= \frac{f_2 - f_1}{2}\left(\frac{\sin\xi}{\sin\frac{\alpha}{2}} - \frac{2x}{a}\right) + \sum y_k \left[\frac{1}{1 - \frac{S}{(K_1)_k}}\frac{\sin\xi}{\sin\frac{\alpha}{2}} - \frac{2x}{a}\right]\sin\pi\frac{x_k}{l_k}\sin\pi\frac{a}{2l_k}$$

$$+ \frac{f_2 + f_1}{2}\left(\frac{\cos\xi}{\cos\frac{\alpha}{2}} - 1\right) - \sum y_k \left[\frac{1}{1 - \frac{S}{(K_1)_k}}\frac{\cos\xi}{\cos\frac{\alpha}{2}} - 1\right]\cos\pi\frac{x_k}{l_k}\cos\pi\frac{a}{2l_k}$$

$$+ \sum y_k \left[\frac{1}{1 - \frac{S}{(K_1)_k}} - 1\right]\cos\pi\left(\frac{x_k}{l_k} + \frac{x}{l_k}\right).$$

Die Gleichung (24) stellt eine Verallgemeinerung dar, die mit den jetzt für die Fehlerlinie gemachten Annahmen aus der früher angeführten (23) hervorgeht. Beide zeigen denselben Bau und können in ganz ähnlicher Weise zur Lösung der Aufgabe benutzt werden, die wir uns gestellt haben. Man findet nach dem Vorbilde der Abschnitte I und II die elastische Ausbiegung δ_m in der Mitte des Stabes mit

$$(25)\qquad \frac{a}{l_k} = n_k \quad \text{und} \quad (K_1)_k = n_k^2 K$$

$$(26)\qquad \delta_m = f\left[\frac{1}{\cos\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{S}{K}}} - 1\right] + \sum y_k \left[\frac{1 - \frac{\cos\frac{\pi}{2}n_k}{\cos\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{S}{K}}}}{1 - \frac{1}{n_k^2}\frac{S}{K}} + \cos\frac{\pi}{2}n_k - 1\right].$$

Die hieraus berechneten Werte von δ_m ergeben die Grenzkurve 2, wenn man für f den Wert

$$(27)\qquad f_g = \sum y_k \frac{\cos\frac{\pi}{2}n_k}{1 - \frac{1}{n_k^2}}$$

setzt. Die zugehörige größte Ausbiegung vor dem Knicken wird

$$(28)\qquad \delta_g = \sum y_k \left[\frac{\frac{4}{\pi} + \frac{1}{n_k^2} - 1}{n_k^2 + \frac{1}{n_k^2} - 2}\cos\frac{\pi}{2}n_k + \frac{1}{n_k^2 - 1}\right].$$

Für Glieder, in denen $n_k = 1$ ist, wird anteilig

$$(29) \qquad f_g = -\frac{\pi}{4} y_k \quad \text{und} \quad \delta_g = \frac{\pi - 3}{4} y_k .$$

Mit diesen Werten gelangt man nun zu denselben Schlußfolgerungen wie im Abschnitt II. Die dort angeführte Knickregel gilt also auch für den Stab mit einer Anfangsform, die durch die Verbindung einer beliebig großen Anzahl verschiedener Kosinuslinien dargestellt ist. Man braucht nur statt der früheren Werte von f_g und δ_g die durch (27) und (28) bestimmten zu setzen.

Wir haben die Untersuchung vorläufig auf symmetrische Formen beschränkt. Die Einbeziehung der unsymmetrischen erfordert nichts weiter, als daß man

$$y_k \cos \pi \frac{x_k}{l_k} \text{ statt } y_k$$

setzt, wo x_k die Verschiebung des Scheitels der betreffenden Kosinuslinie gegen die Stabmitte bedeutet. Im übrigen bleibt alles ungeändert. Wir kommen also zu dem Ergebnis, daß jeder schwach gekrümmte Stab die Eulersche Knickgrenze erreichen kann, wenn die Stabkraft an Fehlerhebeln von bestimmter Größe und Lage angreift.

Zweiter Teil: Stäbe mit vieleckig gestalteter Achse.

V. Die Knickgleichungen.

Es sollen jetzt Stäbe untersucht werden, deren Achse vor der Belastung eine aus geraden Stücken zusammengesetzte Vieleck- oder Zickzacklinie bildet. Über die Form wird weiter nichts vorausgesetzt, als daß die Ecken nur wenig von der Stabsehne abweichen, und daß auch die Richtungsänderungen der aufeinanderfolgenden Seiten, die wir Eckwinkel nennen wollen, nur klein sind. Es handelt sich dann um einen annähernd geraden Stab. Wären die Eckwinkel Null, so hätte man es mit einem streng geraden Stabe zu tun, der bei frei drehbaren Enden und achsrechter Belastung nach der einfachen Euler-Formel zu berechnen ist. Man könnte aber auch etwas anders vorgehen, indem man ihn als einen Stab mit mehreren Feldern betrachtete, der in allen Feldern denselben Querschnitt hat und gleich belastet ist. Dann gelten die im Jahrgang 1909 der Sitzungsberichte auf Seite 191 mitgeteilten Knickgleichungen (20). Die Feldlängen könnten beliebig gewählt werden; beispielsweise so wie die Längen der einzelnen Stücke oder Seiten des Stabvieleckes. Es ist klar, daß dieses Verfahren dasselbe ergeben muß wie die einfachere Rechnung. Hiernach ist zu vermuten, daß die Knickbedingung für den Vieleckstab von Gleichungen abhängen wird, die den (20) ähnlich sind und in sie übergehen müssen, wenn man die in ihnen enthaltenen Eckwinkel der Null gleichsetzt. Sehen wir, ob der Gedanke zum Ziele führt.

Die Gleichungen (20) beziehen sich auf einen Stab mit vier Feldern. Um Raum zu sparen, beschränken wir uns jetzt auf drei. Dann treten an Stelle der ersten fünf Gleichungen der ganzen Gruppe die folgenden vier:

$$(30)\quad \begin{cases} t_{12}M_1 + s_{12}M_2 \quad \cdot \quad \cdot + \nu_{12} \quad \cdot \quad \cdot = \nu_1\,; \\ s_{12}M_1 + t_2\,M_2 + s_{23}M_3 \quad \cdot - \nu_{12} + \nu_{23} \quad \cdot = 0\,; \\ \cdot \quad s_{23}M_2 + t_3\,M_3 + s_{34}M_4 \quad \cdot - \nu_{23} + \nu_{34} = 0\,; \\ \cdot \quad \cdot \quad s_{34}M_3 + t_{34}M_4 \quad \cdot \quad \cdot - \nu_{34} = -\nu_4\,. \end{cases}$$

Die M sind die Momente in den vier Knotenpunkten 1, 2, 3, 4; die ν_{12}, ν_{23}, ν_{34} die Stabsehnenneigungen zwischen denselben Knotenpunkten; ν_1 und ν_2 die Neigungen der Stabenden; die s und t Funktionen der Feldlängen a_{12}, a_{23}, a_{34}, der Stabkräfte S und der Größen E und J[8].

Für die Berechnung des geraden Stabes auf Knicken sind entweder die Momente M_1 und M_4 oder die Endneigungen ν_1 und ν_2 gleich Null zu setzen. Im ersten Falle sind die Enden frei drehbar, im zweiten starr eingespannt. Wenn $M_1 = M_4 = 0$, scheidet die erste und die letzte Gleichung — als nur zur Bestimmung von ν_1 und ν_2 dienend — aus der Knickberechnung aus. Die beiden mittleren Gleichungen sind dadurch entstanden, daß am Knotenpunkt 2 die Neigung am rechten Ende des ersten Feldes der Neigung am linken Ende des zweiten Feldes gleichgesetzt, und ähnlich am Knotenpunkt 3 mit den Endneigungen der beiden angrenzenden Felder verfahren wurde. (Man nennt deshalb Gleichungen dieser Art Stetigkeitsbedingungen.) Die dazu nötigen Einzelgleichungen sind ähnlich gebaut wie die erste und die letzte Gleichung der Gruppe (30). Man hat also am

$$\text{Knoten 2}\begin{cases} \text{Feld } 1\text{—}2: & s_{12}M_1 + t_{12}M_2 \quad \cdot - \nu_{12} \quad \cdot = -\nu_2\,; \\ \quad \text{»} \quad 2\text{—}3: & \cdot \quad t_{23}M_2 + s_{23}M_3 \quad \cdot + \nu_{23} = \nu_2\,; \end{cases}$$

$$\nu_2 - \nu_2 = s_{12}M_1 + t_2\,M_2 + s_{23}M_3 - \nu_{12} + \nu_{23} = 0\,.$$

$$\text{Knoten 3}\begin{cases} \text{Feld } 2\text{—}3: & s_{23}M_2 + t_{23}M_3 \quad \cdot - \nu_{23} \quad \cdot = -\nu_3\,; \\ \quad \text{»} \quad 3\text{—}4: & \cdot \quad t_{34}M_3 + s_{34}M_4 \quad \cdot + \nu_{34} = \nu_3\,; \end{cases}$$

$$\nu_3 - \nu_3 = s_{23}M_2 + t_3\,M_3 + s_{34}M_4 - \nu_{23} + \nu_{34} = 0\,.$$

Das sind die fraglichen beiden mittleren Gleichungen. Sie können für den Vieleckstab nicht gelten, weil bei ihm die hier vorausgesetzte Stetigkeit des Überganges nicht vorhanden ist, sondern eine plötzliche Änderung der Stabneigung um den Betrag des Eckwinkels stattfindet, der natürlich auch bei Biegung der Stabachse bestehen bleibt. Bezeichnet man diese Winkel so wie im Bild 6, dann ist die Neigung am

	Knotenpunkt 2		Knotenpunkt 3	
	links	rechts	links	rechts
	ν_2	$\nu_2 - \nu_2'$	ν_3	$\nu_3 - \nu_3'$,
Also der Unterschied:		$-\nu_2'$		$-\nu_3'$.

[8] Z. B.: $s_{12} = \left(\dfrac{\alpha_{12}}{\sin\,\alpha_{12}} - 1\right)\dfrac{1}{a_{12}S_{12}}$; $t_{12} = \left(1 - \dfrac{\alpha_{12}}{\operatorname{tang}\,\alpha_{12}}\right)\dfrac{1}{a_{12}S_{12}}$; $t_2 = t_{12} + t_{23}$; $\alpha_{12} = a_{12}\sqrt{S_{12} : EJ_{12}}$. Für die hier zu behandelnde Aufgabe sind alle S gleich; ebenso alle J. Näheres an der obengenannten Stelle.

Bild 6. Anfangsform der Stabachse eckig.

Diese Werte sind statt Null auf der rechten Seite der beiden mittleren Gleichungen einzuführen. Sie sind nun nicht mehr homogen. Wollte man trotzdem — wie es in ähnlichen Fällen nicht selten geschieht — die Nennerdeterminante der Gruppe gleich Null setzen und diese Gleichung als Knickbedingung auffassen, so würden die ν_2' und ν_3' wieder aus der Rechnung verschwinden und käme man auf die Knickbedingung des geraden Stabes zurück, was dann zu der offenbar irrtümlichen Folgerung verleiten müßte, daß die kleinen Abweichungen von der Geraden auf die Knickfestigkeit des Stabes keinen Einfluß ausüben. Wir verfahren etwas anders, indem wir zwar freie Drehbarkeit der Stabenden annehmen, trotzdem aber die Endmomente M_1 und M_4 nicht gleich Null setzen, sondern sie als gegebene, den Einfluß äußerer Kräfte ausdrückende Größen betrachten und mit ihren Beiwerten s_{12} und s_{23} ebenso wie die Eckwinkel auf die rechte Seite der Gleichungen bringen.

Wir haben uns bisher nur mit den ersten fünf Gleichungen der Gruppe (20) beschäftigt. Die folgenden vier sind Gleichgewichtsbedingungen, die durch das Hinzukommen der Eckwinkel nicht berührt werden. Für den Stab mit drei Feldern brauchen wir deren nur drei. Die letzte Gleichung stellt die Art der Lagerung des Stabes fest und bleibt gleichfalls (bis auf die Zahl ihrer Glieder) bestehen.

Jetzt können wir die ganze Gruppe neu anschreiben. Sie gilt für einen Stab mit frei drehbaren Enden, an denen die Momente M_1 und M_2 angreifen.

$$
(31)\quad \left\{ \begin{array}{llllllcl}
t_2\, M_2 & + s_{23} M_3 & - \nu_{12} & + \nu_{23} & \cdot & \cdot & = & - s_{12} M_1 - \nu_2' \,; \\
s_{23} M_2 & + t_3\, M_3 & \cdot & - \nu_{23} & + \nu_{34} & \cdot & = & - s_{34} M_4 - \nu_3' \,; \\
- M_2 & \cdot & + S a_{12} \nu_{12} & \cdot & \cdot & + a_{12} A & = & - M_1 \,; \\
M_2 & - M_3 & \cdot & + S a_{23} \nu_{23} & \cdot & + a_{23} A & = & 0 \,; \\
\cdot & M_3 & \cdot & \cdot & + S a_{34} \nu_{34} & + a_{34} A & = & M_4 \,; \\
\cdot & \cdot & a_{12} \nu_{12} & + a_{23} \nu_{23} & + a_{34} \nu_{34} & \cdot & = & 0 \,.
\end{array} \right.
$$

Aus diesen sechs Gleichungen lassen sich die zwei Knotenpunktmomente, die drei Stabsehnenneigungen und der Auflagerdruck A im Knotenpunkt 1 berechnen. Wendet man dazu das Determinantenverfahren an, so erscheint (wie schon oben bemerkt) als Nennerdeterminante derselbe Ausdruck, der bei Berechnung der Knickfestigkeit des geraden Stabes gefunden wird. Als Zählerdeterminanten ergeben sich im allgemeinen Ausdrücke von endlicher Größe. Würde nun die Nennerdeterminante Null, so erhielte man für alle Unbekannten unendlich große Werte, gleichgültig, was auf der rechten Seite der Gruppe steht. Daß das leicht irreführen kann, wurde schon erwähnt. Hiergegen haben wir folgenden Ausweg. Bis jetzt ist über die Angriffsmomente M_1 und M_4 noch nicht verfügt. Es steht daher frei, eins von ihnen

so zu bestimmen, daß die Zählerdeterminanten bei demselben Wert der Stabkraft Null werden, bei dem die Nennerdeterminante verschwindet. Da sie für den geraden Stab von der Länge a mit überall gleichem Querschnitt und gleicher Belastung gilt, so ist die Kraft, die sie zum Verschwinden bringt, die Euler-Last

$$S = K = \pi^2 \frac{EJ}{a^2}.$$

Wird dieser Wert in die Zählerdeterminante eingeführt und dann verfahren wie vorher angegeben, so erscheint die gesuchte Größe — einerlei, welche von den sechs — in der Form 0:0.

Wie kommen zu dem Schluß: Der Vieleckstab knickt bei der Euler-Last, wenn an ihm ein Endmoment M_1 oder M_4 angebracht wird, das sich aus der Gleichung ergibt, die entsteht, wenn man irgendeine der sechs Unbekannten aus der Gruppe (31) berechnet und die dabei auftretende Zählerdeterminante gleich Null setzt. Für S ist der Wert K einzuführen.

Da die Gleichung für M_1 und M_4 linear ist, kann stets eine dieser Größen so bestimmt werden. Durch die vorstehende Entwicklung ist also zugleich bewiesen, daß sich jeder Vieleckstab zum Knicken bei der Euler-Last bringen läßt. Die Gleichungsgruppe (31) ist ja offenbar mit Leichtigkeit für jede andere Felderzahl anzuschreiben, und die Wahl der Größe der in ihr enthaltenen Feldlängen und Eckwinkel steht vollkommen frei.

VI. Beispiel.

Es soll eine Aufgabe behandeln, die unschwer auch auf dem gewöhnlichen Wege mit Hilfe einer Differentialgleichung zweiter Ordnung gelöst werden kann. Damit wird dem Leser die erwünschte Möglichkeit einer leichten Nachprüfung geboten.

Der Stab habe nur eine Ecke im Knotenpunkt 2 und dort den Eckwinkel ν_2'. Das zugehörige Moment ist M_2, die Endmomente sind M_1 und M_3, die Feldlängen a_{12} und a_{23}, die Stablänge ist $a = a_{12} + a_{23}$. An die Stelle von (31) tritt die Gruppe

$$(32)\quad \left\{\begin{array}{lllll} t_2 M_2 - & \nu_{12} + & \nu_{23} & \cdot & = -\nu_2' - s_{12} M_1 - s_{23} M_3\,; \\ -M_2 + S a_{12} \nu_{12} & & \cdot & + a_{12} A & = \quad - M_1 \,; \\ M_2 & \cdot & + S a_{23} \nu_{23} & + a_{23} A & = \quad M_3 \,; \\ \cdot & a_{12} \nu_{12} + & a_{23} \nu_{23} & \cdot & = \quad 0 \,. \end{array}\right.$$

Die Nennerdeterminante ist

$$(33)\quad N = \begin{vmatrix} t_2 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & S a_{12} & 0 & a_{12} \\ 1 & 0 & S a_{23} & a_{23} \\ 0 & a_{12} & a_{23} & 0 \end{vmatrix} = \frac{a\, a_{12} a_{23} \sqrt{\frac{S}{EJ}} \sin \pi \sqrt{\frac{S}{K}}}{\sin a_{23} \sqrt{\frac{S}{EJ}} \sin a_{12} \sqrt{\frac{S}{EJ}}}.$$

N wird 0 für $S = K$.

Als Merkmal für den Zustand des Knickens soll der Wert des Momentes M_2 im Eckpunkt 2 dienen. Er ergibt sich aus der Gleichung

$$(34)\qquad NM_2 = \begin{vmatrix} -v_2' - s_{12}M_1 - s_{23}M_3 & -1 & 1 & 0 \\ -M_1 & Sa_{12} & 0 & a_{12} \\ M_3 & 0 & Sa_{23} & a_{23} \\ 0 & a_{12} & a_{23} & 0 \end{vmatrix}$$

Entwickelt

$$(35)\quad NM_2 = a[a_{12}a_{23}Sv_2' + (s_{12}a_{12}S+1)a_{23}M_1 + (s_{23}a_{23}S+1)a_{12}M_3].$$

Die rechte Seite gleich Null gesetzt, ergibt die Gleichung, aus der der Wert von M_1 oder M_2 zu berechnen ist, mit dem der Stab belastet werden muß, um ihn an die Knickgrenze zu bringen. Der Zweck des Beispieles gestattet es aber, die Aufgabe vorher noch etwas zu vereinfachen, indem wir eine symmetrische Anordnung voraussetzen. Demgemäß sei

$$(36)\qquad \begin{cases} a_{12} = a_{23} = {}^1/_2 a\,; \\ M_1 = M_3 = M\,; \\ v_2' = \dfrac{2p}{{}^1/_2 a} = 4\dfrac{p}{a}, \end{cases}$$

worin p die Pfeilhöhe der Anfangsform, das heißt der Abstand der Ecke von der Stabsehne vor der Belastung. Das Moment M denken wir uns dadurch erzeugt, daß die Stabkraft S an beiden Enden am Hebel f wirkt[9]. Setzt man nun noch für die s ihre Werte gemäß Anmerkung 8 und beachtet man, daß aus

$$K = \pi^2\frac{EJ}{a^2} \text{ die Beziehung } \frac{a}{2}\sqrt{\frac{S}{EJ}} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{S}{K}}$$

folgt, so geht (35) über in

$$(37)\qquad NM_2 = Sa^2\left(f\frac{\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{S}{K}}}{\sin\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{S}{K}}} + p\right).$$

Der Wert von f, der M_2 zu Null macht, ist mithin

$$(38)\qquad f = -p\frac{\sin\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{S}{K}}}{\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{S}{K}}},$$

und hieraus folgt mit $S = K$:

$$(39)\qquad f_g = -\frac{2}{\pi}p = -0.6366\,p.$$

---

[9] Bei Ableitung der im Eingange erwähnten Gruppe (20) sind Momente, die den Stab nach oben hohl zu krümmen suchen, als positiv angenommen. Danach richtet sich das Vorzeichen, der Hebel f. Die Lage von p ergibt sich aus dem Vorzeichen von v_2'.

An diesem Hebel muß also die Stabkraft $S = K$ wirken, wenn M_2 die unbestimmte Form 0:0 annehmen soll, als Kennzeichen dafür, daß sich der Stab an der Knickgrenze befindet.

Mit den Vereinfachungen (36) folgt aus (33)

(40) $$N = a^2 \frac{\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{S}{K}}}{\operatorname{tang}\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{S}{K}}}.$$

Setzt man dies in (37), so ergibt sich

(41) $$M_2 = S\left(f\frac{1}{\cos\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{S}{K}}} + p\frac{\operatorname{tang}\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{S}{K}}}{\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{S}{K}}}\right).$$

Es ist aber auch

$$M_2 = S(f + y_m),$$

wenn man unter y_m den Abstand der Ecke von der Stabsehne nach der Belastung versteht. Daraus folgt

(42) $$y_m = f\left(\frac{1}{\cos\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{S}{K}}} - 1\right) + p\frac{\operatorname{tang}\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{S}{K}}}{\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{S}{K}}}.$$

Die elastische Ausbiegung δ_m der Mitte ist der Unterschied $y_m - p$, also

(43) $$\delta_m = f\left(\frac{1}{\cos\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{S}{K}}} - 1\right) + p\left(\frac{\operatorname{tang}\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{S}{K}}}{\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{S}{K}}} - 1\right).$$

Diese Gleichung kann ebenso wie (3) im Abschnitt I dazu benutzt werden, diejenige Größe von f zu bestimmen, bei der die durch (43) dargestellte Kurve die $S:K$-Achse schneidet. Man findet

(44) $$\frac{f}{p} = -\frac{\sin\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{S}{K}} - \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{S}{K}}\cos\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{S}{K}}}{\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{S}{K}} - \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{S}{K}}\cos\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{S}{K}}},$$

was der Gleichung (4) entspricht. Damit lassen sich nun ähnliche Grenzkurven 1 und 2 berechnen, wie sie früher für den Stab mit Anfangskrümmung im Bild 2 dargestellt worden sind.

Zur Kurve 1 gehört der Hebel

(45) $$f = -\frac{2}{3}p = -0.6667p,$$

zur Kurve 2 der aus (39) folgende Wert. Auch hier tritt die früher besprochene Umkehr der Ausbiegung bei zunehmender Last ein, wenn die Stabkraft an einem Hebel wirkt, der zwischen diesen beiden liegt. Mit Hilfe der Kurve 2 findet man als größten Wert der Ausbiegung kurz vor dem Knicken

$$\delta_g = \left(\frac{4}{\pi^2} + \frac{2}{\pi} - 1\right) p = 0.0419\,p. \tag{46}$$

Dies beweist, daß die Ausbiegung nur einen kleinen Bruchteil der größten Abweichung der Stabachse von der Geraden beträgt, wenn die Last den Euler-Wert erreicht, daß also wirkliches Knicken stattfindet.

Zusammenfassend können wir jetzt sagen, daß die Ergebnisse dieses Abschnittes in vollem Einklange mit den früheren stehen, sie aber an Allgemeinheit noch übertreffen, da wir hier von Annahmen ausgegangen sind, die Vieleckformen jeder denkbaren Art umfassen.

Dritter Teil: Geschichtliches und Folgerungen.

Eulers Werk »De curvis elasticis« ist im Jahre 1744 erschienen, während er Direktor der mathematischen Klasse der Preußischen Akademie der Wissenschaften war. Sein Nachfolger Lagrange gab 30 Jahre später die Arbeit »Sur la figure des colonnes« bekannt. Von dem, was diese Männer über die Knickfestigkeit geschrieben haben, zehrt die Technik bis in die neueste Zeit. Die reine Wissenschaft scheint sich weniger mit der Knickfrage befaßt zu haben. Die Ansichten über den Wert der Eulerschen Theorie (wie man sie kurz zu nennen pflegt) gingen weit auseinander. Darin war man aber einig, daß ein gekrümmter Stab die für gerade Stäbe geltende Knickgrenze nicht erreichen könne. Auch ich habe diese Meinung noch vor kurzem vertreten[10]. Das war ein Irrtum, wie die vorliegende Arbeit beweist.

Daß das im Laufe der 179 Jahre, die seit dem Erscheinen der Theorie Eulers verstrichen sind, nicht erkannt worden ist, läßt sich wohl nur dadurch erklären, daß man die fragliche Annahme für beinahe selbstverständlich hielt. Keiner der vielen Forscher, die sich mit der Knicktheorie beschäftigt haben, ist daher auf den Gedanken gekommen, die Annahme einmal gründlich zu prüfen. Den Anstoß dazu hat erst eine bei den verdienstvollen Knickversuchen des Deutschen Eisenbauverbandes im Materialprüfungsamt Berlin-Lichterfelde gemachte Wahrnehmung gegeben. Man hatte große Sorgfalt darauf verwendet den Einfluß der Lagerreibung herabzumindern und die Fehlerhebel zu beseitigen[11]. In dem Maße, wie das gelang, trat immer häufiger die merkwürdige Erscheinung hervor, daß Stäbe, die sich schon stark nach einer Seite ausgebogen hatten, bei zunehmender Belastung wieder zurückgingen und schließlich nach der anderen Seite knickten. Die »Umkehr« fand manchmal ganz nahe an der Knickgrenze statt, so daß die Ausbiegungen nach der anderen

---

[10] Zentralblatt der Bauverwaltung 1922 S. 36. Siehe auch Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften, Jahrgang 1922, S. 95 (Sonderdruck »Die Lagerungen bei Knickversuchen«).

[11] Das dazu benutzte Schneidenlager ist (zum Teil nach einem Vorschlage des Assistenten im Materialprüfungsamt Hrn. Ingenieur Panzerbieter) von der Firma Mohr und Federhaff in Mannheim entworfen und vorzüglich ausgeführt.

Seite nicht mehr gemessen werden konnten, und daß nur der verbogene Stab Zeugnis von dem rätselhaften Verhalten ablegte[12].

Das Durchdenken dieses Vorganges brachte mich auf die Vermutung, daß dabei sogenannte Anfangskrümmungen im Spiel sein könnten. Die Versuchsstäbe waren zwar sauber gehobelt, aber anscheinend doch nicht »gerade« im Sinne der Knicktheorie. Wurden die Fehlerhebel kleiner als die Krümmungspfeile, so mußte deren Einfluß merkbar werden. Ob diese Erklärung richtig war, konnte nur durch eine scharfe theoretische Prüfung festgestellt werden. Dafür fehlten aber die Hilfsmittel, die also erst zu schaffen waren. Sie liegen jetzt in Gestalt der auf S. 197 u. ff. der Sitzungsberichte veröffentlichten und für die gegenwärtige Arbeit benutzten Untersuchung vor. Die danach ausgeführten umfangreichen Zahlenrechnungen haben die beschriebene Erscheinung vollkommen erklärt. Der Verlauf der im Bild 2 dargestellten Linienzüge zwischen den Grenzkurven 1 und 2 zeigt deutlich die bei den Versuchen beobachtete Umkehr — eine schöne Übereinstimmung zwischen Theorie und Praxis! Die Bedingung für einen solchen Verlauf ist durch die Gleichungen (4) und (44) gegeben.

Von weit größerer Bedeutung ist aber der Beweis, daß auch Stäbe mit den verschiedenartigsten Formfehlern, wie Anfangskrümmungen und Ecken, die von EULER und LAGRANGE nur für gerade Stäbe aufgestellten Knickbedingungen erfüllen können. Wir haben gesehen, daß das gleichzeitige Vorhandensein von Fehlerhebeln das keineswegs ausschließt, sondern vielmehr in manchen Fällen notwendig ist, um das Erreichen der EULERschen Knickgrenze zu ermöglichen.

Hieraus ergeben sich mancherlei Folgerungen. Dafür ein paar Beispiele. Es hat von jeher einen Stein des Anstoßes gebildet, daß man bei Ableitung der Knickformeln einen vollkommen geraden und achsrecht belasteten, überall gleich beschaffenen Stab voraussetzen mußte und trotzdem die Möglichkeit einer Ausbiegung behauptete. Dieser scheinbare Widerspruch hat ein immer neues Anzweifeln der Theorie und Suchen nach der »richtigen« Knickformel hervorgerufen. Es fehlt zwar nicht an Mitteln zur Überwindung solcher Bedenken; endgültig weggeräumt werden sie aber am sichersten durch den Nachweis, daß die erwähnten Annahmen für die Knicktheorie gar nicht nötig sind. Geht man von dem Verhalten des krummen oder vieleckigen einseitig belasteten Stabes aus, wie es hier geschehen ist, so ergibt sich als ein daraus folgender einfacher Sonderfall die Knickgleichung EULERS für den — wenn auch nur näherungsweise — geraden und achsrecht belasteten Stab.

Für die Anwendung dürfte das bessere Durchschauen der Vorgänge bei Knickversuchen von Nutzen sein. Wenn man weiß, daß jeder nur wenig von der Geraden abweichende, sonst aber beliebig geformte Stab dadurch an die Knickgrenze gebracht werden kann, daß man die Kraft an dem richtigen

[12] Übrigens hat auch BAUSCHINGER gefunden, daß die bei kleinen Belastungen auftretenden Durchbiegungen zum Teil bei höheren Laststufen wieder rückgängig wurden, indem die Stäbe sich später nach der entgegengesetzten Richtung durchbogen. Er zieht daraus weiter keine Folgerungen, weshalb ich annehme, daß es sich dabei um Übergänge aus der S-förmigen in die einfach bogenförmige Biegung gehandelt hat. — Siehe »Die Bautechnik« 1923 S. 21.

Hebel wirken läßt, so braucht man sich nicht übermäßig mit der Herstellung möglichst gerader Stäbe zu bemühen und auch nicht auf die achsrechte Einführung der Kraft besondere Sorgfalt zu verwenden. Das Ziel muß dann vielmehr sein, den »richtigen« Hebel zu finden. Das ist durch wiederholtes Zurechtrücken des Versuchsstabes in der Presse mit um so größerer Annäherung zu erreichen, bei je höheren Laststufen es geschieht. Man gelangt so in das zwischen den Grenzkurven 1 und 2 im Bild 2 liegende Gebiet und bei jedem Zurechtrücken näher an die Kurve 2. Ist diese getroffen, so führt die weitere Belastung den Stab an die Knickgrenze.

Eine Größe X sei durch die Gleichung

$$X = \frac{fF_1(S) + y_0 F_2(S) + pF_3(S) + uF_4(S)}{\Phi(S)}$$

bestimmt, in der f einen Fehlerhebel, y_0 einen Krümmungspfeil, p einen Eckpfeil, u eine die Wirkung eines Mangels im Baustoff ausdrückende Größe darstellt und die F und Φ Funktionen der Abmessungen und der Belastung S eines Stabes sind. Die Funktion $\Phi(S)$ möge bei einem gewissen Werte K der Last S Null werden. Dann ist es wohl richtig zu sagen: X wird unbestimmt, wenn $f = y_0 = p = u = 0$, das heißt, wenn der Stab fehlerfrei ist. Dagegen ist es offenbar unrichtig zu behaupten, daß X nur unter dieser Bedingung unbestimmt werden könne. Es ist dazu vielmehr nur nötig, daß die verschiedenen Fehler die Bedingung

$$fF_1(K) + y_0 F_2(K) + pF_3(K) + uF_4(K) = 0$$

erfüllen. Erst wenn nachgewiesen ist, daß die Gleichung nicht anders als durch das Verschwinden der f, y_0, p, u befriedigt werden kann, darf man dies als eine notwendige Bedingung dafür erklären, daß $X = 0:0$ wird für $S = K$. Die bisher geltende Anschauung beruht also auf einem methodischen Fehler; sie hätte sich daher auch ohne Rechnung als nicht genügend begründet nachweisen lassen. Daß sie unrichtig ist, konnte aber nur durch tieferes Eingehen auf den Sachverhalt dargetan werden.

Über die Ursache des Ausbleibens der Reduktionsteilung in den Samenanlagen einiger parthenogenetischer Angiospermen.

Von G. Haberlandt.

Hierzu Taf. IV.

Bei allen angiospermen Pflanzen, deren Eizellen sich parthenogenetisch entwickeln. handelt es sich um somatische Parthenogenesis oder Ooapogamie. Die Reduktionsteilung im Archespor unterbleibt vollständig oder sie geht nach den für sie charakteristischen Prophasen (Synapsis, Diakinese) in die gewöhnliche vegetative Kernteilung über, so daß die Reduktion der Chromosomenzahl ausfällt und die Zellen des Gametophyten, mithin auch die Eizelle, diploide Kerne besitzen.

Seit den Untersuchungen Juels über *Antennaria alpina* hat sich eine ganze Reihe von Forschern mit der morphologisch-zytologischen Seite dieses Gegenstandes beschäftigt. Von Murbeck, Strasburger, Overton, Rosenberg, H. Winkler u. a. wurden die Kernteilungen in den Embryosackmutterzellen der Pflanzenarten, die somatische Parthenogenesis zeigen, sorgfältig untersucht und insbesondere die Einzelvorgänge, die den Übergang von der heterotypischen zur gewöhnlichen, typischen Kernteilung und den damit verbundenen Ausfall der Reduktionsteilung kennzeichnen, eingehend beschrieben. Ich muß darauf verzichten, über diese Arbeiten an dieser Stelle zu referieren und kann mich mit dem Hinweise über die zusammenfassende Darstellung in Tischlers »Allgemeiner Pflanzenkaryologie« begnügen.

Gegenüber diesen so ausführlichen morphologisch-zytologischen Beschreibungen ist die physiologische Seite des Gegenstandes so gut wie noch gar nicht in Angriff genommen worden. Allerdings hat schon Strasburger die Frage nach den Ursachen aufgeworfen, die es bewirken, daß in so vielen Fällen der Kern der Embryosackmutterzelle sich zwar heterotypisch zu teilen beginnt, daß aber, gewöhnlich nach einer Pause, die Fortsetzung und Vollendung der Teilung nach dem rein vegetativen Modus vor sich geht. In seiner Alchemilla-Arbeit (I, S. 109) sagt er zunächst, daß »augenscheinlich beide Entwicklungstendenzen gegeneinander kämpfen«, und an anderer Stelle (S. 145) macht er den Versuch zu erklären, weshalb »die vegetative Richtung den Sieg davonträgt«. Er nimmt an, daß die Sterilität der Eualchemillen durch Mu-

tantenkreuzungen veranlaßt wird und auch die mittelbare Veranlassung für die Ausbildung der apogamen Fortpflanzung ist. »Der Zufluß besonderer Nährstoffe nach den jungen Samenanlagen, wie er bei den apogamen Arten in der starken Inhaltsfüllung der Zellen und Anschwellung der Kernnukleolen sich kundgibt, löst meist solche Vorgänge aus. Da die sexuelle Keimerzeugung unterblieb, so fanden diese Nährstoffe keine Verwertung und veranlaßten schließlich eine vegetative Weiterentwicklung des Archespors und damit auch die Bildung eines vegetativen Keims.« Es ist klar, daß dieser Erklärungsversuch ein Hysteron-proteron ist. Die Nährstoffe, die erst beim Ausbleiben der »sexuellen Keimerzeugung« im Embryosack disponibel werden, können doch nicht schon vorher die vegetative Weiterentwicklung des Archespors veranlassen. Es ist überhaupt eine verfehlte Auffassung, daß reichlicherer Nährstoffzufluß spezifische Wachstumsvorgänge auslösen könnte. Darauf hat unter Bezugnahme auf die Vorgänge in den Samenanlagen bereits H. Winkler (S. 128ff.) ausführlich und nachdrücklich hingewiesen. Ich brauche deshalb hierauf nicht näher einzugehen und auch die Mutmaßung E. Jacobsson-Stiasnys nur nebenher zu erwähnen, wonach eine Förderung der Nahrungszufuhr die Ursache der Hemmung der Reduktionsteilung sein soll, die dann zur somatischen Parthenogenesis führt. Für eine solche Annahme, der übrigens auch Ernst zustimmt, liegt, wie gesagt, nicht der geringste Beweis, weder in deskriptiv-zytologischer noch in experimenteller Hinsicht, vor.

Wir werden vielmehr annehmen müssen, daß es besondere Reizstoffe sind, die einmal den typischen, vegetativen, das anderemal den heterotypischen Teilungsmechanismus aktivieren. Denn daß es sich hierbei um ganz verschiedene Teilungsmechanismen handelt, ist wohl selbstverständlich. Nun hat nach Ishikawa bereits sein Lehrer Fujii in seinen Vorlesungen 1909—1910 die Ansicht geäußert, »daß die meiotischen Teilungsvorgänge wahrscheinlich durch die Wirkung chemischer Reizstoffe veranlaßt werden«, die möglicherweise von den Tapetenzellen an die Sporenmutterzellen abgegeben werden. Andererseits lösen die von mir nachgewiesenen Wund- und Nekrohormone soweit bekannt nur typische, vegetative Kernteilungen aus. Sind also die Teilungshormone, die beiderlei Kernteilungsweisen auslösen, verschieden, dann können sie auch miteinander in Wettbewerb treten. So käme es dann zu den beiden »Entwicklungstendenzen, die gegeneinander kämpfen«, wie Strasburger sich ausdrückt. Gewinnt bei der ersten Teilung der Embryosackmutterzelle der Einfluß der Wund- und Nekrohormone die Oberhand, so unterbleibt die heterotypische resp. Reduktionsteilung, und zwar schon von vornherein, oder sie wird nach ihren ersten Phasen sistiert und die Teilung in vegetativer Weise zu Ende geführt.

Die Hypothese, daß das Ausbleiben der Reduktionsteilung und ihr Ersatz durch gewöhnliche typische Kernteilung auf den Einfluß von Wund- oder Nekrohormonen zurückzuführen sei, läßt sich sowohl entwicklungsgeschichtlich wie experimentell prüfen. Handelt es sich um Pflanzen, die habituelle somatische Parthenogenesis zeigen, so wird nachzusehen sein, ob bereits in der unmittelbaren Umgebung des Archespors resp. der Embryosackmutterzelle Degenerations- und Absterbeerscheinungen sich einstellen. Lassen sich solche nachweisen, so gewinnt die obige Hypothese

eine wichtige Stütze. Entscheidend kann allerdings nur das Ergebnis des Experimentes sein. Man wird durch Quetschen oder Anstechen junger Fruchtknoten die Produktion von Wundhormonen herbeizuführen suchen, die auf die Embryosackmutterzelle einwirken.

Daß durch chemische Einflüsse, insbesondere die Wirkung narkotischer Stoffe, die heterotypische Teilung im sporogenen Gewebe unterdrückt und in die vegetative überführt werden kann, ist schon von verschiedenen Forschern festgestellt worden. So hat NĚMEC durch mehrmaliges Chloroformieren der männlichen Blütenknospen von *Larix decidua* die in den Pollenmutterzellen angebahnte heterotypische Kernteilung in die typische umwandeln können. Wenn dann eine Zweiteilung der Pollenmutterzelle eintrat, konnten in den beiden Tochterzellen weitere Kern- und Zellteilungen vor sich gehen, die zur Bildung eines »parenchymatösen Gewebes«, zu einem »Vegetativwerden des Pollenkorns« führten. SAKAMURA (S. 141) hat nach Behandlung der Blütenknospen von *Vicia faba* mit Chloralhydrat in der heterotypischen Metaphase der Pollenmutterzellen verschiedene Kernteilungsanomalien beobachtet, nach denen sich die »rekonstruierten Kerne zur homöotypischen Teilung anzuschicken scheinen«.

Die Objekte der vorliegenden Untersuchung wurden in GILSONS Gemisch (nach RENNER) fixiert und die 8—16 μ dicken Mikrotomschnitte mit Eisenhämatoxylin und Orange G gefärbt. Für die Herstellung der Präparate bin ich Hrn. Dr. BRAUNER und Frl. Dr. REICHE zu bestem Danke verpflichtet.

II.

Bei dem somatisch parthenogenetischen *Taraxacum officinale* unterbleibt nach JUELS Untersuchungen die Reduktionsteilung der Embryosackmutterzelle; sie teilt sich nur einmal, und die basale Tochterzelle wird zum Embryosack. Die von JUEL genau beschriebene Kernteilung erfolgt in der Weise, daß zunächst, wie bei einer heterotypischen Teilung, die Synapsis sich einstellt, die von ziemlich langer Dauer ist. Es kommt auch zur Diakinese, aber die weiteren Vorgänge führen zu der Annahme, daß nunmehr ein »Umschlag« eintritt, »indem der Kern sich von nun an nach den Regeln der homöotypischen Teilungsart« richtet. Es kommt also nicht zur Reduktionsteilung, die diploide Chromosomenzahl 26 wird beibehalten.

Wie auch sonst bei den Kompositen ist das Nuzellargewebe auf eine einzige Zellage, die Epidermis, beschränkt. Zuweilen bildet dieselbe keine ununterbrochene Hülle, sie wird vielmehr an einer oder auch zwei Stellen von der Embryosackmutterzelle durchbrochen, so daß diese mit einem Teil ihrer Wand direkt an die Oberfläche des Nuzellus grenzt. Die Vermutung, daß an diesen Stellen die Nuzelluszellen vollkommen zusammengepreßt, ihre Innen- und Außenwände miteinander verklebt, verschmolzen sein könnten, hat sich nicht bestätigen lassen. Offenbar ist die Embryosackmutterzelle durch gleitendes Wachstum stellenweise an die Oberfläche des Nuzellus gelangt.

Spätestens im Synapsisstadium des Kerns der Embryosackmutterzelle sind mindestens schon einige Nuzelluskerne im Absterben begriffen oder schon abgestorben (Fig. 1, 2, 3). Sie sind nicht mehr kugelig, sondern geschrumpft,

von unregelmäßigem Umriß, sehr chromatinarm, mit kleinen Nukleolen versehen. Auch das Zytoplasma stirbt bald ab, löst sich von der Zellwand ab und schrumpft zu schmalen, dunklen, spindel- oder stiftchenförmigen Resten zusammen, in denen auch vom Kern nichts mehr zu sehen ist. Oft sind im Synapsisstadium des Zellkerns der Embryosackmutterzelle schon alle Nuzelluszellen abgestorben, stark kollabiert. Gewöhnlich bleibt aber die terminale Nuzelluszelle, die sich oft durch besondere Größe auszeichnet, noch länger am Leben.

Es kann nach diesen Beobachtungen keinem Zweifel unterliegen, daß schon in den Prophasen der heterotypischen Teilung des Kerns der Embryosackmutterzelle auf diesen Nekrohormone einwirken, die aus den abgestorbenen Nuzelluszellen stammen. Unter ihrem Einfluß kann also die heterotypische in die gewöhnliche, typische Kernteilung übergeführt werden.

Nach Juels Beobachtungen findet bei der Pollenbildung von *Taraxacum officinale* normale Reduktionsteilung der Pollenmutterzellen statt. Das setzt also nach der von mir vertretenen Anschauung voraus, daß in der Umgebung der Pollenmutterzellen, bevor sie sich zur Teilung anschicken, keinerlei Desorganisations- und Absterbeerscheinungen eintreten. In der Tat ist das auch nicht der Fall. Die Tapetenzellen verschmelzen nur unvollständig zu einem kernreichen Periplasmodium. An keiner Stelle desselben lassen sich selbst nach längst vollzogener Tetradenbildung und zur Zeit der Ausgestaltung der Sporenhäute irgendwelche Absterbeerscheinungen im Zytoplasma beobachten; ebensowenig zeigen auch nur vereinzelte Zellkerne die Anfänge jener Desorganisationserscheinungen, die im Nuzellus so frühzeitig sich einstellen. Die Kerne sind von verschiedener Form und Größe, oft langgestreckt spindelförmig, häufiger rundlich, mit mehreren ungleich großen, kleinen Nukleolen versehen und zeigen ein durchaus normales Aussehen.

Es war nun zu untersuchen, wie sich bei verwandten Kompositen, die sich normal amphimiktisch fortpflanzen, der Nuzellus zur Zeit der Teilung des Kerns der Embryosackmutterzelle verhält. Bei *Hypochoeris maculata* sind die gut entwickelten, ziemlich hohen Nuzelluszellen samt ihren Kernen im Synapsisstadium des Kerns der Embryosackmutterzelle noch ganz intakt, einzelne Zellen noch in Teilung begriffen (Fig. 4). Erst nach erfolgter Tetradenbildung, bevor noch die zum Embryosack heranwachsende basale Zelle die drei anderen verdrängt, beginnt die Degeneration der Nuzelluszellen, die von der Nuzellarbasis gegen den Scheitel fortschreitet. Die Zellen nehmen dabei dieselbe Beschaffenheit an, wie sie für *Taraxacum* beschrieben wurde. Vollständig abgestorben und mehr minder kollabiert sind die Nuzelluszellen erst, wenn der herangewachsene Embryosack die übrigen Tetradenzellen verdrängt und zu einer schmalen dunklen Kappe zusammengepreßt hat. Bei *Hieracium Auricula* sind die Nuzelluszellen bedeutend kleiner und namentlich niedriger als bei *Hypochoeris*. Sie sind aber auch nach eben vollzogener Tetradenteilung der Embryosackmutterzelle noch sämtlich am Leben, Kern und Zytoplasma von gleichem Aussehen wie im Integument. Erst wenn die basale Tetradenzelle zu wachsen und die darüber befindlichen zu verdrängen beginnt, stellen sich die ersten Desorganisationserscheinungen in den Nuzellus-

zellen ein, und zwar zum Unterschiede von *Hypochoeris* gewöhnlich zuerst am Scheitel des Nuzellus. Bei *Senecio vulgaris* sind die Nuzelluszellen ebenfalls nicht nur zur Zeit der Reduktionsteilung, im Synapsis- und Diakinesestadium des Kerns der Embryosackmutterzelle am Leben, auch nach vollzogener Tetradenteilung zeigen sie noch keinerlei Desorganisationserscheinungen. Dieselben setzen erst ungefähr gleichzeitig mit dem Absterben und Verdrängtwerden der drei oberen Tetradenzellen ein, wobei die neben diesen gelegenen Nuzelluszellen zuerst zugrunde gehen. Nur selten fangen dieselben ein wenig früher zu degenerieren an. Ziemlich häufig stirbt auch die Embryosackmutterzelle ab, oder es kommt zwar zur Tetradenbildung, allein alle vier Tetradenzellen gehen zugrunde. Gleichzeitig oder bald darauf degeneriert auch die Nuzellusschicht. Dem entspricht, worauf schon CORRENS aufmerksam gemacht hat, daß bei *Senecio vulgaris* häufig taube Früchtchen gefunden werden.

So wie die drei untersuchten dürften sich auch die übrigen amphimiktischen Kompositen verhalten. Der Nuzellus stirbt so spät ab, daß seine Nekrohormone die Reduktionsteilung nicht mehr beeinflussen können.

III.

Für *Antennaria alpina* hat bekanntlich JUEL den zytologischen Nachweis ihrer somatisch parthenogenetischen Entwicklung erbracht, während für *Antennaria dioica* von dem gleichen Forscher die normal amphimiktische Fortpflanzung nach dem üblichen Phanerogamenschema festgestellt wurde.

Bei *A. alpina* unterbleibt die Tetradenteilung der Embryosackmutterzelle; diese wächst vielmehr direkt zum Embryosack aus. Wenn sich ihr Kern endlich zur Teilung anschickt, sind die Zellen des einschichtigen Nuzellus bereits weitgehend desorganisiert und zusammengepreßt (vgl. JUEL I, S. 21, Taf. V, Fig. 4, 5). Bei *A. dioica* dagegen setzt die erste Teilung der Embryosackmutterzelle, die eine Reduktionsteilung ist, schon frühzeitig ein. Aus JUELS Mikrophotographien (Taf. IV, Fig. 6, 7, 8) geht hervor, daß bis nach vollzogener Tetradenteilung die Nuzelluszellen intakt und nicht zusammengepreßt sind. Auch gibt er ausdrücklich an, daß die epidermale Nuzellusschicht erst angegriffen erscheint, wenn der Embryosack seine Schwesterzellen bereits verdrängt hat.

Der Unterschied im Verhalten von *Antennaria dioica* und *alpina* liegt also nach JUELS Beobachtungen nicht darin, daß bei letzterer die Nuzelluszellen früher absterben als bei ersterer; bei beiden Arten geht der Nuzellus in ungefähr gleichem Altersstadium zugrunde. Bei *A. alpina* tritt aber eine beträchtliche Verspätung der Kernteilung in der Embryosackmutterzelle ein; sie erfolgt erst, wenn die Nuzelluszellen schon abgestorben sind, so daß die Nekrohormone ihren Einfluß auf die Kernteilung ausüben können.

Die von mir an Material aus dem Botanischen Garten in Berlin-Dahlem vorgenommene Untersuchung ergab im wesentlichen eine Bestätigung der JUELschen Angaben. Wenn der Kern der herangewachsenen, meist ziemlich langgestreckten Embryosackmutterzelle von *Antennaria alpina* sich zur Teilung anschickt, beginnen die Nuzelluszellen bereits abzusterben. Im Spiremstadium

des Kernes sind die Nuzelluszellen häufig noch von der ursprünglichen Höhe, doch ist ihr Inhalt großenteils schon geschrumpft und dunkel diffus gefärbt. Manchmal sind die Nuzelluszellen in den Prophasen der Kernteilung der Embryosackmutterzelle auch schon zusammengepreßt, so daß ihr dunkler Inhalt schwarzen Stiftchen gleicht. Stadien, wie JUEL eines auf Taf. V, Fig. 4 abbildet, habe ich mehrmals beobachtet; das Verhalten von *A. alpina* entspricht also meiner Annahme.

Bemerkenswert ist, daß in einzelnen Köpfchen der von mir untersuchten Form hin und wieder auch Samenanlagen auftraten, deren Embryosackmutterzellen sich genau so verhielten wie die von *A. dioica*, d. h. schon frühzeitig Tetradenteilung eingingen. In diesem Falle waren nach der vollzogenen Teilung die Nuzelluszellen noch am Leben. Ihre Degeneration setzte erst ein, wenn die basale Zelle, zum Embryosack werdend, die drei anderen zu verdrängen begann (Fig. 5).

Für *Antennaria dioica* kann ich JUELS Angaben gleichfalls bestätigen. Wenn die Nuzelluszellen abzusterben beginnen, ist die Tetradenteilung der Embryosackmutterzelle bereits vollzogen.

In den Samenanlagen einiger Köpfchen von *Antennaria dioica* ließen sich allerlei bemerkenswerte Abnormitäten beobachten. Sie bestanden im wesentlichen darin, daß die Embryosackmutterzelle oder eine ihrer Deszendenten, noch häufiger aber eine oder auch mehrere Zellen in der Chalazagegend eine ungewöhnliche Größe erreichten. Diese Zellblasen waren plasmareich und meist mehrkernig, wobei die Kerne mit ihren großen Nukleolen ganz das Aussehen von Embryosackkernen besaßen. Manchmal waren diese großen Zellen ein- oder mehreremal geteilt. Stets fanden sich in ihrer Umgebung abgestorbene Zellen der Samenanlage vor, meist in größerer Anzahl. Einige Beispiele mögen das Gesagte erläutern. In Fig. 6 sind nicht nur alle Nuzelluszellen abgestorben und zusammengepreßt, auch die angrenzenden Zellen des Integumentes und der Chalaza haben das gleiche Schicksal erlitten. Der Embryosack, an dessen Scheitel die Reste der verdrängten Tetraden zu sehen sind, ist sehr weit, plasmareich und weist vier zentral gelegene Kerne auf. Diese abnorme Kernlagerung deutet an, daß es wohl nicht zur Bildung eines typischen Gametophyten mit Eiapparat und Antipoden gekommen wäre, sondern daß unter dem Einfluß der reichlichen Nekrohormone nur die Bildung von »Wundendosperm« begonnen hat. Komplizierter liegen die Verhältnisse in Fig. 7. Die Embryosackmutterzelle scheint sich nur in drei Tochterzellen geteilt zu haben, von denen die oberste die beiden anderen verdrängt hat. Sie stellt wohl einen abnormen Embryosack mit fünf Kernen vor, die wieder als Wundendospermkerne zu deuten wären. In der Umgebung treten ebenfalls reichlich abgestorbene, zum Teil ansehnlich vergrößerte Zellen auf. Die beiden nächsten Schnitte lassen eine an den bauchigen Teil des Embryosacks angrenzende sehr große plasmareiche runde Zelle erkennen, die der Chalaza angehört und durch eine schräge Wand in zwei Tochterzellen geteilt ist, von denen die eine drei, die andere zwei Kerne besitzt. Man wird an die Anlagen aposporer Embryosäcke erinnert. In Fig. 8 ist der ganze Nuzellus samt der Embryosackmutterzelle abgestorben. In der Chalazagegend haben

sich mehrere Zellen stark vergrößert, sind plasmareich geworden, und ihre Kerne haben wieder den Charakter von Embryosackkernen angenommen. Eine Zelle unter der Epidermis der Samenanlage ist besonders groß geworden und weist acht Kerne auf. Man möchte auch hier an einen Anlauf zur Bildung eines aposporen Embryosacks denken. -- Parasiten irgendwelcher Art ließen sich in den betreffenden Samenanlagen nicht nachweisen.

Es liegt in diesen Abnormitäten eine Erscheinung vor, die zum Teil auch schon früher von anderen Forschern bei anderen Pflanzen beobachtet worden ist. So hat Murbeck in einer Samenanlage der parthenogenetischen *Alchemilla acutangula* Bas. in der äußersten Schicht des Nuzellus eine auffallend große Zelle beobachtet, die hinsichtlich ihres Inhaltes sehr einer Eizelle glich, und von der Murbeck annimmt, daß sie sich wahrscheinlich zu einem Adventivembryo entwickelt hätte. Ob in ihrer Umgebung abgestorbene Nuzelluszellen sich befanden, geht aus Text und Abbildung nicht hervor. Dagegen waren in einer Samenanlage von *Alchemilla alpina* zwischen zwei ansehnlich vergrößerten, großkernigen Nuzelluszellen abgestorbene und zusammengepreßte Zellen vorhanden. Lloyd sah einzelne Zellen im Funikulus von *Asperula montana* sogar zu typischen Embryosäcken sich entwickeln, Täckholm beobachtete eine »Archesporzelle«, d. h. eine große, plasmareiche Zelle mit sehr großem Kern, im Funikulus von *Fuchsia* »*Marinka*« und Rosenberg verdanken wir bekanntlich die interessante Entdeckung, daß bei einigen parthenogenetischen *Hieracien* aus Zellen des Nuzellus oder der Chalazaregion oder des Integumentes »apospore« Embryosäcke werden. Ich habe an anderer Stelle (Haberlandt II, S. 868) wahrscheinlich zu machen versucht, daß hier der Anreiz zum Wachstum der Zelle der Samenanlage, die zum aposporen Embryosack wird, von einem aus der Umgebung stammenden Nekrohormon ausgeht.

Auch künstlich lassen sich solche Zellhypertrophien hervorrufen. In einer mit einer Stahlnadel angestochenen Samenanlage von *Eucomis undulata* fand ich neben dem Stichkanal im äußeren Integument stark vergrößerte Zellen vor, die plasmaarm waren, relativ kleine, chromatinarme Kerne besaßen und sich häufig einmal geteilt hatten. Nur eine Zelle zeichnete sich durch reichliches Plasma und einen zentral gelegenen, auffallend großen, chromatinreichen Kern mit drei Nukleolen aus. So könnte die Initiale eines Adventivembryos aussehen (Fig. 9).

Aus all diesen Beobachtungen, denen sich noch andere anreihen ließen, scheint hervorzugehen, daß die Zellen der Samenanlagen einschließlich der Embryosackmutterzellen und Embryosäcke die Neigung besitzen, unter dem Einfluß von Wund- und Nekrohormonen zu hypertrophieren und in bezug auf ihre zytologische Ausgestaltung eine Entwicklung einzuschlagen, die auf die Bildung von aposporen Embryosäcken oder von Adventivembryonen oder von Embryosäcken mit »Wundendosperm« hinsteuert. Warum nun aus solchen erneutes Wachstum zeigenden Zellen das einemal Nuzellus- oder Integumentembryonen, das anderemal apospore Embryosäcke werden, während wieder andere auf dem Stadium ein- oder mehrkerniger, sich nicht weiter differenzierender Zellen stehenbleiben, läßt sich natürlich nicht sagen. Die Zell-

teilungsstoffe lösen nur die Teilungen aus, Reize anderer Art (wahrscheinlich ebenfalls stofflicher Natur) müssen es wohl sein, die dann die weitere Entwicklung bestimmen.

IV.

In der Gattung *Alchemilla* sind die meisten Arten der Sektion *Eualchemilla*, wie Murbeck gezeigt hat, somatisch parthenogenetisch. Strasburgers ausführliche Nachuntersuchung hat in der Hauptsache eine Bestätigung der Murbeckschen Angaben gebracht.

Das Archespor von *Alchemilla* ist vielzellig. Die gestreckten Archesporzellen liegen nebeneinander und sind »Basalzellen« gemeinsam eingefügt. Dann stellen sich in einer Anzahl von Archesporzellen vegetative Querteilungen ein, mit Ausnahme einer zentral gelegenen Zelle, deren Kern in das Synapsisstadium eintritt. In diesem verharrt er auffallend lange. Murbeck glaubt die synaptischen Kernzustände im Archespor als Absterbeerscheinung deuten zu sollen und nimmt an, »daß die große axil gelegene Embryosackmutterzelle, die ungeteilt bleibt, sich nie zum Embryosack entwickelt, sondern abstirbt und verdrängt wird«. Er hält vielmehr die benachbarten sich vegetativ teilenden Archesporzellen für die Embryosackmutterzellen.

Strasburger hat dem widersprochen. Nach ihm stellt die zentral gelegene Archesporzelle, deren Kern die lang andauernde Synapsis zeigt, die Embryosackmutterzelle vor. Nach dem Anlauf zur heterotypischen Teilung tritt sie schließlich in die typische, vegetative Teilung ein. Die beiden Tochterzellen können sich noch ein- oder mehrmal teilen, worauf eine der so entstandenen Zellen zum Embryosack mit normalem (diploiden) Gametophyten und Eiapparat wird. Auch Strasburger hat im Archespor frühzeitige Absterbeerscheinungen beobachtet. Die der zentralen Embryosackmutterzelle benachbarten Archesporzellen zeigen geschrumpfte Protoplasten. Kerne und Zytoplasma werden stärker lichtbrechend und schließlich annähernd homogen (vgl. auch Taf. II, Fig. 25, 26, 27, Taf. III, Fig. 33).

Ich selbst habe *Alchemilla* nicht untersucht, doch geht bereits aus den Angaben Murbecks und Strasburgers bestimmt hervor, daß im vielzelligen Archespor der parthenogenetischen Arten schon vor der Teilung jener Zelle, die die Embryosackmutterzelle darstellt, Degenerationserscheinungen sich einstellen, die die heterotypische Teilung der Embryosackmutterzelle in die typische, vegetative überführen können. Die Differenzpunkte zwischen Murbeck und Strasburger sind mit Rücksicht auf unsere Fragestellung belanglos.

Für *Elatostema sessile* hat bereits Modilewski Parthenogenesis festgestellt und gefunden, daß sich die Embryosackmutterzelle direkt zum Embryosack entwickelt. Strasburger (II) hat dann ermittelt, daß die Teilungen, die die Embryosackmutterzelle erfährt, »Teilungen einer diploid somatischen Zelle« sind. Niemals kommt es zur Synapsis und zu den anderen Kernteilungsbildern, die für die Reduktionsteilung charakteristisch sind. »Nur die Entwicklungshemmung auf diesem Zustand deutet auf Hindernisse hin, die sich aus dieser, von der Phylogenie abgewichenen Ontogenie ergeben.« Von Absterbeerscheinungen in der Umgebung der sich vegetativ teilenden Embryo-

sackmutterzelle spricht Strasburger nicht. Doch bildet er auf Taf. VIII, Fig. 26 u. 27 einkernige Embryosackmutterzellen ab, die von flachgedrückten, abgestorbenen Nuzelluszellen flankiert werden. Ferner gibt er an (S. 273), daß in zahlreichen Samenanlagen das Archespor schon auf frühestem Entwicklungszustande abstirbt und von den benachbarten Zellen zusammengedrückt und resorbiert wird. Die Neigung zu frühzeitigen Degenerationserscheinungen ist also in den Samenanlagen von *Elatostema sessile* jedenfalls vorhanden.

Die Parthenogenesis von *Elatostema acuminatum* hat M. Treub entdeckt, die genauere zytologische Untersuchung wurde aber erst von Strasburger durchgeführt. Zum Unterschiede von *E. sessile* geht der Kern der Embryosackmutterzelle zunächst in die Synapsis ein, dann aber werden die reduktionellen Prophasen allmählich wieder rückgängig gemacht. Manchmal kommt es nicht einmal mehr zur Synapsis, in anderen Blütenständen dagegen wird in einzelnen Samenanlagen die volle Reduktionsteilung durchgeführt. Wird die apogame Entwicklung eingeschlagen, so treten in der Embryosackmutterzelle vegetative Teilungen ein, die vielfach nicht zur Bildung einer Zellreihe, sondern einer Zellgruppe führen (Strasburger II, Taf. X, Fig. 63, 64, Treub, Taf. V, Fig. 10). Strasburgers Figuren zeigen deutlich abgestorbene Zellen in der Nachbarschaft dieser Zellkomplexe, in denen eine oder auch mehrere Zellen zu Embryosäcken werden. Gewöhnlich wird aber die Embryosackmutterzelle direkt zum Embryosack, wie bei *E. sessile.* In diesem entstehen am häufigsten vier Kerne, von denen einer zum Eikern wird. Wie Treub fand, ist die Eibildung nicht an einen bestimmten Kern gebunden, dementsprechend kann die Lage des parthenogenetischen Embryos eine verschiedene sein.

Daß in der Nachbarschaft der Embryosackmutterzellen von *Elatostema sessile* und *acuminatum*, noch bevor ihre Kerne zur Teilung schreiten, bereits abgestorbene Zellen vorhanden sind, geht aus den bisherigen Angaben teils mit Sicherheit, teils mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit hervor. Immerhin sind neue auf diesen Punkt gerichtete Untersuchungen erwünscht. In bezug auf die Bildungsart der Nekrohormone, welche die heterotypische in die typische, vegetative Kernteilung überführen, ist aber noch mit einer anderen Möglichkeit zu rechnen. Schon oben wurde erwähnt, daß bei *E. sessile* in zahlreichen Samenanlagen das Archespor schon frühzeitig abstirbt, und gleiches scheint für *E. acuminatum* zu gelten. Wenigstens kommt nach Strasburger nur ein Bruchteil aller Blütenanlagen in den Infloreszenzen zur Keimbildung. Wenn nun die krankhaften Störungen in den Embryosackmutterzellen häufig zu ihrem Absterben führen, so wird die Annahme zulässig sein, daß sie in vielen Fällen nur die Bildung von Abbauprodukten bewirken, die zwar nicht den Tod der Zelle zur Folge haben, wohl aber gleich den Nekrohormonen die Reduktionsteilung beeinflussen und in die typische, vegetative Kernteilung überführen können. Die erkrankten Embryosackmutterzellen erzeugen dann selbst die betreffenden Reizstoffe, ähnlich wie mechanisch verletzte, aber nicht absterbende Epidermis- und Haarzellen von *Pelargonium zonale* und *Saintpaulia ionantha* (Haberlandt I) selbst die Wundhormone produzieren, die ihre Teilung auslösen.

V.

Aus den vorstehend beschriebenen Beispielen geht hervor, daß dem Ausbleiben der Reduktionsteilung der Embryosackmutterzelle und dem Eintritt ihrer typischen, vegetativen Teilung das Absterben benachbarter Zellen vorausgeht, während bei verwandten amphimiktischen Arten abgestorbene Zellen in der Umgebung der Embryosackmutterzelle nicht vorhanden sind. Weitere Untersuchungen werden lehren müssen, ob das eine allgemein zutreffende Erscheinung ist. Sollte das, wie ich annehmen möchte, der Fall sein, so gewinnt die Annahme, daß das Ausbleiben der Reduktionsteilung beziehungsweise ihr Uebergang in die gewöhnliche typische Teilung in den Embryosackmutterzellen der somatisch parthenogenetischen Angiospermen auf den Einfluß von Nekrohormonen zurückzuführen ist, sehr an Wahrscheinlichkeit. Die wirkliche Beweisführung kann allerdings nur, wie schon eingangs erwähnt wurde, auf experimentellem Wege gelingen, indem man bei amphimiktischen Pflanzen in der Umgebung des Archespors resp. der Embryosackmutterzelle Wundhormone zu erzeugen versucht. Für solche Versuche dürften sich aber die Staubbeutel besser eignen als die Samenanlagen.

In früheren Arbeiten (Haberlandt II, III) habe ich den Nachweis zu erbringen versucht, daß bei einigen parthenogenetischen Kompositen, sowie bei der parthenogenetischen *Marsilia Drummondii* Nekrohormone als Entwicklungserreger der diploiden Eizellen fungieren, und die Vermutung ausgesprochen, daß sich auch bei anderen Pflanzen mit habitueller somatischer Parthenogenesis die Sache so verhält. In dieser Mitteilung gehe ich nun noch einen Schritt weiter und mache auch für das Ausbleiben der Reduktionsteilung, die zur Diploidie der Eizellen führt, Nekrohormone verantwortlich. Die Neigung zu Stoffwechselstörungen, die krankhafte Vorgänge, Desorganisations- und Absterbeerscheinungen in den Samenanlagen nachziehen, macht sich eben bei den parthenogenetischen Angiospermen schon sehr frühzeitig geltend und führt ja so häufig auch zur völligen Sterilität eines Teils der oft mißgebildeten Samenanlagen. Die Ursache dieser Stoffwechselstörungen ist freilich noch unbekannt. In manchen Fällen mag sie auf Bastardierung beruhen; doch können erbliche Stoffwechselstörungen, wie ich schon früher betont habe, auch auf andere Weise zustande kommen.

Zum Schlusse möge noch kurz die Frage nach der Ursache der heterotypischen Teilung der Embryosackmutterzelle berührt werden. Wenn besondere Zellteilungshormone, wie Leptohormone, die Hormone embryonaler und meristematischer Gewebe und Wund- und Nekrohormone, einzeln oder kombiniert miteinander den Teilungsmechanismus der typischen, vegetativen Kern- und Zellteilung aktivieren, so liegt es nahe anzunehmen, daß auch der wesentlich andere Teilungsmechanismus der heterotypischen Kernteilung durch ein besonderes Teilungshormon in Tätigkeit versetzt wird. Dieses Hormon, das dann zur Reduktionsteilung führt, könnte im Archespor resp. in der Embryosackmutterzelle selbst gebildet werden, so wie wir annehmen müssen, daß das Teilungshormon des Urmeristems der Vegetationsspitzen in diesem selbst

entsteht. Es wäre aber auch möglich, daß das Hormon der heterotypischen Kernteilung der Embryosackmutterzelle aus der Umgebung zugeführt wird, und daß besondere Zellen und Zellschichten die Aufgabe hätten, dieses Hormon zu bilden. In den Pollensäcken könnten, wie schon Fujii angedeutet hat (s. oben S. 284), die Tapetenzellen, die ja sehr ausgesprochen an Drüsenzellen erinnern, die fraglichen Reizstoffe abgeben. In den Samenanlagen müßten es die die Embryosackmutterzellen umgebenden Nuzelluszellen sein, die das fragliche Hormon ausscheiden. Es wäre dabei nicht nötig, daß sich die betreffende Zellage oder Zellgruppe von dem übrigen Nuzellusgewebe zytologisch und histologisch scharf unterschiede. Vielleicht liefert aber eine daraufhin gerichtete Untersuchung gewisse Anhaltspunkte zur Beantwortung der aufgeworfenen Frage.

Erklärung der Abbildungen.

Fig. 1, 2, 3. Nuzelli von *Taraxacum officinale*; der Kern der Embryosackmutterzelle im Synapsis-Stadium. Die Nuzelluszellen zum Teil schon abgestorben.

Fig. 4. Nuzellus von *Hypochoeris maculata*; Kern der Embryosackmutterzelle im Synapsis-Stadium. Nuzelluszellen noch sämtlich am Leben.

Fig. 5. Nuzellus von *Antennaria alpina*; die Embryosackmutterzelle hat ausnahmsweise Tetraden gebildet. Die oberste Tetradenzelle hat sich durch eine schräge Wand geteilt. Nuzelluszellen zum Teil abgestorben.

Fig. 6. Nuzellus von *Antennaria dioica*; ein junger Embryosack, vier zentral gelegene Kerne; Nuzelluszellen und angrenzende Integument- und Chalazazellen abgestorben.

Fig. 7. Nuzellus von *Antennaria dioica* mit abnormem Embryosack; Nuzelluszellen und angrenzende Integument- und Chalazazellen abgestorben.

Fig. 8. Abgestorbener Nuzellus von *Antennaria dioica*. Hypertrophierte Zellen zwischen der Basis des Nuzellus und der Epidermis des Integumentes.

Fig. 9. Partie aus dem äußeren Integument einer angestochenen Samenanlage von *Eucomis undulata*. Eine von den an den Stichkanal angrenzenden Zellen plasmareich und großkernig. Die zerstörten Zellen des Stichkanals schwarz gefärbt.

Literaturverzeichnis.

Correns, C., Vererbungsversuche mit buntblättrigen Sippen, VI. Einige neue Fälle von *Albomaculatio*, Sitzungsberichte der Preuß. Akademie d. Wiss. 1922, S. 469.

Haberlandt, G., I. Wundhormone als Erreger von Zellteilungen, Beiträge zur Allg. Bot., Bd. II, 1921.

Derselbe, II. Die Entwickelungserregung der Eizellen einiger parthenogenetischer Kompositen, Sitzungsberichte der Preuß. Akad. d. Wiss., 1921.

Derselbe, III. Die Entwickelungserregung der parthenogenetischen Eizellen von *Marsilia Drummondii* A. Br., ebenda, 1922.

Jacobsson-Stiasny, E., Fragen vergleichender Embryologie der Pflanzen, Sitzungsberichte der Akad. d. Wiss. in Wien, math.-nat. Kl., Abt. I, Bd. CXXV, 1916.

Ishikawa, M., Cytologische Studien von Dahlien, Bot. Magaz. Tokyo, Bd. XXV, 1911.

Juel, H. O., Vergleichende Untersuchungen über typische und parthenogenetische Fortpflanzung bei der Gattung *Antennaria*. K. Svenska Vetenskaps-Akademiens Handlingar, Bd. 33, 1900.

Derselbe, Die Tetradenteilungen bei *Taraxacum* und anderen Cichorieen, ebenda, Bd. 39, 1905.

Lloyd, F. E., The comparative embryology of the Rubiaceae, pt. 2, Mem. Torrey bot. Club, Bd. VIII, 1902.

Murbeck, Sv., I. Parthenogenetische Embryobildung in der Gattung Alchemilla, Lunds Univers. Arsskrift, Bd. XXXVI, 1901.

Murbeck, Sv., II. Über Anomalien im Bau des Nuzellus und des Embryosacks bei parthenogenetischen Arten der Gattung Alchemilla, ebenda, Bd. XXXVIII, 1902.

Němec, B., Das Problem der Befruchtungsvorgänge und andere zytologische Fragen, Berlin 1910.

Rosenberg, O., Über Embryobildung in der Gattung *Hieracium*, Berichte der deutsch. bot. Gesellsch., Bd. XXIV, 1906.

Sakamura, T., Experimentelle Studien über die Zell- und Kernteilung etc., Journal of the College of Science, Imp. University of Tokyo, V. XXXIX, Art. 11, 1920.

Strasburger, E., I. Die Apogamie der Eualchemillen und allgemeine Gesichtspunkte, die sich aus ihr ergeben, Jahrbuch f. wiss. Bot., Bd. XLI, 1904.

Derselbe, II. Sexuelle und apogame Fortpflanzung bei *Urticaceen*, ebenda, Bd. XLVII, 1910.

Täckholm, G., Beobachtungen über die Samenentwicklung einiger *Onagraceen*, Svensk bot. Tidskrift, Bd. IX, 1915.

Treub, M., L'apogamie de l'Elatostema acuminatum Brongn., Annales du Jardin bot. de Buitenzorg, z. S. N. V., 1905.

Winkler, H., Parthenogenesis und Apogamie im Pflanzenreich, Progressus rei botanicae, Bd. II, 1908.

Ausgegeben am 29. November.

HABERLANDT: Ausbleiben der Reduktionsteilung in den Samenanlagen parthenogenetischer Angiospermen.

SITZUNGSBERICHTE
DER PREUSSISCHEN
AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.
1923

XXVI. Gesamtsitzung. 25. Oktober.

Vorsitzender Sekretar: Hr. Rubner.

1. Hr. Norden sprach über »Das Genesiszitat in der Schrift über das Erhabene«. (Ersch. später.)

Die Analyse des Abschnitts, in welchem das Zitat steht, zeigt, daß die judäische Quelle in weiterem Umfange benutzt worden ist; insbesondere beweisend dafür sind Stellen des Josephus. Weiter führt die Betrachtung des späteren Kapitels, in welchem der Verfasser einen 'Philosophen' redend einführt. Es wird der Nachweis zu erbringen versucht, daß dieser 'Philosoph' Philon von Alexandreia gewesen ist: sämtliche Gedanken, die der Philosoph vorbringt, finden sich in philonischen Schriften; aber die Identität erstreckt sich auch auf eine nicht geringe Zahl von zum Teil recht eigenartigen Worten.

2. Hr. Nernst legte eine Mitteilung des Studienrats Hrn. Dr. Werner Kolhörster in Berlin (z. T. gemeinschaftlich mit G. v. Salis) vor »Intensitäts- und Richtungsmessungen der durchdringenden Strahlung«. (Ersch. später.)

Dank dem Entgegenkommen der Leitung der Jungfraubahn und anderer Donatoren war es nach eingehenden Vorarbeiten, die in der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt ausgeführt wurden, möglich, die bisher noch ganz rätselhafte, wahrscheinlich kosmische durchdringende Strahlung unter besonders günstigen Umständen, nämlich im Gletschereise und in großer Höhe, messend zu verfolgen. Es ergab sich mit Sicherheit, daß es sich um eine sehr harte Gammastrahlung handelt, wie sie den uns bekannten Radioelementen nicht zukommt, und außerdem eine Andeutung dafür, daß sie vorwiegend aus dem Gebiete der Milchstraße, also von einer Stelle zu uns gelangt, woselbst die (jungen) roten Riesensterne (bzw. Nebelmassen) besonders zahlreich versammelt sind.

3. Hr. Holl überreichte die 2. und 3. Auflage des I. Bandes seiner »Gesammelten Aufsätze zur Kirchengeschichte« (Tübingen 1923).

4. Hr. Petersen überreichte das von ihm herausgegebene Werk: »Goethes Briefe an Charlotte von Stein«, 3 Bände (Leipzig 1923).

5. Das korrespondierende Mitglied Hr. Carl Duisberg in Leverkusen übersandte seine »Abhandlungen, Vorträge und Reden aus den Jahren 1882—1921« (Berlin und Leipzig 1923).

6. Die Erben des verstorbenen ordentlichen Mitgliedes August Dillmann haben der Akademie dessen Handexemplare seiner folgenden Werke und Schriften überwiesen: Liber Henoch, Aethiopice (Lipsiae 1851) und Liber Jubilaeorum (Kiliae et Londini 1859); ferner Veteris testamenti aethiopici tomus secundus,

2 Teile (Lipsiae 1861. 1871); Chrestomatia aethiopica (Lipsiae 1866); Der Verfall des Islâm (Berlin 1876); Der aethiopische Text des Joel (Sonderabdruck 1879) und Grammatik der äthiopischen Sprache, 2. Auflage (Leipzig 1899).

7. Vorgelegt wurde Monumenta Germaniae historica. Scriptorum qui vernacula lingua usi sunt tom. IV. pars II (Berlin 1923).

8. Das korrespondierende Mitglied Hr. Georg Elias Müller in Göttingen hat am 28. September sein fünfzigjähriges Doktorjubiläum gefeiert. Die Akademie hat ihm eine Adresse gewidmet, welche in diesem Stück abgedruckt ist.

Die Akademie hat das auswärtige Mitglied der philosophisch-historischen Klasse Hrn. Vatroslav von Jagič in Wien am 5. August durch den Tod verloren.

Adresse an Hrn. Georg Elias Müller zum fünfzigjährigen Doktorjubiläum am 28. September 1923.

Hochgeehrter Herr Kollege!

Zu Ihrem fünfzigjährigen Doktorjubiläum sendet Ihnen auch die Preußische Akademie der Wissenschaften, die Sie seit dem Jahr 1914 zu ihren korrespondierenden Mitgliedern zählt, ihren herzlichen Glückwunsch. Mit Genugtuung können Sie an diesem Tag auf fünf Jahrzehnte einer angestrengten, aber auch erfolgreichen Forschertätigkeit zurückblicken. Schon frühe haben Sie sich in der damals noch jungen Wissenschaft der experimentellen Psychologie eine führende Stellung errungen. Durch Ihre Schrift »Zur Grundlegung der Psychophysik« haben Sie eine Revision der Fechnerschen Aufstellungen eingeleitet, die nach ihrer kritischen wie positiven Seite für alle weiteren Studien auf diesem Gebiet grundlegend geworden ist. Sie haben seitdem mit zielbewußter Energie Ihre große Arbeitskraft ganz in den Dienst der psychophysischen und psychologischen Forschung gestellt. Und eine lange Reihe von Untersuchungen, von denen jede die Psychologie um ein gut Stück vorwärts gebracht hat — im besonderen möchten wir nur noch die Schrift über »Die Gesichtspunkte und die Tatsachen der psychophysischen Methodik« und das große Werk »Zur Analyse der Gedächtnistätigkeit und des Vorstellungsverlaufs« herausheben —, sind aus dieser Arbeit hervorgegangen. Was sie alle auszeichnet, ist ebensosehr die erschöpfende Vertrautheit mit der Literatur, die umsichtige und zweckmäßige Anordnung der Versuche, die Exaktheit der Beobachtung und die peinliche Treue gegen die Tatsachen wie die Schärfe der Analyse, die methodische Sicherheit der Verallgemeinerung, die Präzision der Darstellung und ein untrüglicher Blick für das der experimentellen Forschung Erreichbare. Sie haben dabei niemals Veranlassung gehabt, die grundsätzliche Einstellung, mit der Sie einst in Ihre Untersuchungen eintraten, aufzugeben, und Sie haben Ihre Position gegen mancherlei Anfechtungen zu wahren gewußt. Auch diejenigen Psychologen aber, die andere Wege als Sie gehen, gestehen gerne zu, daß an dem raschen Emporblühen der Psychologie in den letzten Jahrzehnten Sie einen sehr wesentlichen Anteil gehabt haben. Und sie tun das um so lieber, als Sie sich auch um die äußere Organisation der psychologischen Forschungsarbeit als Begründer und Vorsitzender der »Gesellschaft für experimentelle Psychologie« ein großes Verdienst erworben haben. Möge es Ihnen vergönnt sein, die Arbeit, an der Ihr Herz hängt, noch recht lange mit der alten Kraft und Frische fortzusetzen zur Ehre und zum Nutzen der deutschen Wissenschaft.

Die Preußische Akademie der Wissenschaften.

Ausgegeben am 29. November.

SITZUNGSBERICHTE
DER PREUSSISCHEN
AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.
1923

XXVII. Sitzung der physikalisch-mathematischen Klasse. 1. November.

Vorsitzender Sekretar: Hr. Rubner.

1. Hr. Heider sprach über das Nervensystem der *Eunicidae*.

Eine Untersuchung des Nervensystems von *Eunice harassii* und *torquata* an Wachsplattenmodellen ergab in Bestätigung der Befunde von Pruvot eine Zusammensetzung des Gehirns aus drei hintereinander folgenden Abschnitten: Vorderhirn, Mittelhirn und Hinterhirn. Das Vorderhirn ist ein Ganglienpaar, welches durch zahlreiche Nervenzüge mit dem Sinnesepithel der Palpen in Verbindung steht. Ein eigentlicher Palpennerv ist nicht zu erkennen. Außerdem entspringen vom Vorderhirn die Anfänge des Schlundnervensystems und die vordere Wurzel der Schlundkommissur. Vom Mittelhirn entspringen die fünf Antennennerven, und zwar je mit einer doppelten Wurzel, ferner der Nervus opticus und die hintere Wurzel der Schlundkommissur. Dieser Hirnabschnitt ist durch eine Querspalte in eine vordere und hintere Partie getrennt, wie schon Pruvot erkannt hat. Das Hinterhirn besteht aus den Riechganglien, welche mit den Nuchalorganen in Verbindung stehen. Das gesamte Gehirn hat eine ungefähr linsenförmige Gestalt und steht mit dem Epithel des Kopflappens und der Palpen in direktem Zusammenhang. Die Gehirnmasse enthält fünf Fenster oder Durchbohrungen für den Durchtritt der zu den Antennen ziehenden Muskeln. Das Schlundnervensystem besteht aus vier an den Schlund herantretenden Nervenwurzeln. Das innere Paar bildet ein Schlundganglion und die schon von früheren Autoren beschriebene Ösophagealkommissur. Es entspringt aus dem Vorderhirn. Außerdem findet sich noch ein mehr lateral am Schlunde verlaufendes Paar von Nervenzügen, welche am ventralen Schlundsacke nach hinten verlaufen.

2. Sodann sprach Hr. Hellmann über »Physiognomie der Regen in der gemäßigten und in der Tropenzone«.

Die Regen sind in der gemäßigten Zone im allgemeinen häufiger und von längerer Dauer, aber weniger ergiebig als in der Tropenzone. Die Ursachen für dieses verschiedene Verhalten sind einerseits die große Zahl der von Regen begleiteten barometrischen Depressionen in der gemäßigten Zone, während sie in den Tropen fast ganz fehlen, andererseits der durch die hohe Temperatur bedingte gleichmäßig große Wasserdampfgehalt und der erhebliche Anteil der Gewitterregen an der Gesamtregenmenge in der Tropenzone.

Physiognomie des Regens in der gemäßigten und in der Tropenzone.

Von G. Hellmann.

Die vorliegende Untersuchung ist eine Fortsetzung und zugleich Erweiterung meiner in diesen Sitzungsberichten 1912 veröffentlichten Arbeit »Über den Charakter der Sommerregen in Norddeutschland«. Ich hob dort in der Einleitung hervor, daß unsere Kenntnis von der Häufigkeit und Dauer der Niederschläge noch gering ist, weil zu ihrer Ermittlung Registrierapparate erforderlich sind. Solche funktionieren zwar schon an vielen Orten, aber bei der Auswertung ihrer Aufzeichnungen beschränkt man sich meist auf die Feststellung der Stundenmengen, und nur von einigen wenigen Stationen werden Angaben über die Häufigkeit, Dauer und Stärke der Niederschläge veröffentlicht. Als ich meinen 1897 konstruierten mechanisch registrierenden Regenmesser beschrieb, machte ich auch bald Vorschläge zu einer intensiveren Auswertung der Aufzeichnungen (Meteorolog. Zeitschr. 1900, S. 136) und brachte sie bei den im norddeutschen Beobachtungsnetz tätigen zur Ausführung. Nachdem 10jährige Registrierungen von 10 Stationen vorlagen, suchte ich aus ihnen einige Ergebnisse über das Auftreten der Regenfälle zu ziehen, die in der genannten Arbeit und, in größerer Ausführlichkeit, in den Abhandlungen des Preuß. Meteorol. Instituts, Bd. IV, Nr. 6, publiziert sind. Die Untersuchung erstreckte sich auf die von Mai bis September fallenden Regen, da der Apparat nur zur Registrierung flüssiger Niederschläge eingerichtet ist. Mein 1906 konstruierter registrierender Schneemesser wurde zwar an einigen Stationen in Gebrauch genommen, doch liegen von ihm nicht genug Auswertungen vor, um die einschlägigen Verhältnisse bei den Winterniederschlägen ableiten zu können. Das Meteorologische Observatorium bei Potsdam besitzt aber solches Material, das mit dem auf dem Prinzip der Wägung beruhenden Sprung-Fuessschen Laufgewichts-Regen- und Verdunstungsmesser gewonnen wurde. Da ich nun in der genannten Arbeit von 1912 zeigen konnte, daß das Auftreten der Regenfälle an allen 10 Stationen Norddeutschlands im wesentlichen denselben Verlauf nimmt, und daß daher eine zentral gelegene Station in dieser Beziehung das ganze Gebiet repräsentieren kann, darf man ein gleiches Verhalten auch für die Niederschläge der kalten Jahreszeit annehmen und somit die für den Winter in Potsdam gefundenen Verhältnisse als maßgebend für ganz Norddeutschland ansehen. In diesem Sinne kann ich also dem am Schluß jener Untersuchung gegebenen Versprechen, in ähnlicher Weise die Winterniederschläge zu behandeln, jetzt nachkommen.

Die Einführung meines selbstregistrierenden Regenmessers auf vielen tropischen und subtropischen Stationen, wo er das ganze Jahr hindurch funktioniert, war mir besonders erfreulich, weil ich hoffen durfte, von einem solchen Ort einmal die nötigen Angaben zu erhalten, um einen genaueren Vergleich zwischen der Art des Auftretens des Regens bei uns in der gemäßigten Zone und in der Tropenzone anstellen zu können. Das ist jetzt dadurch möglich geworden, daß das Magnetisch-Meteorologische Observatorium in Batavia, für dessen Errichtung und fortlaufende Indiensthaltung wir der Niederländischen Regierung besonders dankbar sein müssen, die Aufzeichnungen des dort aufgestellten Pluviographen meines Systems in ähnlich ausführlicher Weise bekannt gibt, wie ich es 1900 vorgeschlagen habe. Es wird von jedem einzelnen Regenfall Anfang und Ende, Dauer und Menge mitgeteilt, so daß, allerdings erst nach vielen Zwischenrechnungen, die weiter unten folgenden Zahlenangaben und Tabellen abgeleitet werden konnten. Die Gegenüberstellung der Werte von Potsdam auf der linken und von Batavia auf der rechten Seite ermöglicht, die Übereinstimmung, Ähnlichkeit und Verschiedenheit im Auftreten des Regens an beiden Orten genauer zu verfolgen. Man darf zwar nicht annehmen, daß je ein Ort die ganze gemäßigte und die Tropenzone vollständig vertreten kann, aber der allgemeine Charakter der Regenverhältnisse beider Zonen wird in ihnen doch genügend zum Ausdruck kommen, zumal beide Stationen mittlere und nicht extreme Verhältnisse aufweisen. Darin liegt auch die Rechtfertigung für den absichtlich etwas allgemein gehaltenen Titel der vorliegenden Arbeit.

Der Untersuchung liegen zugrunde bei Potsdam die 10 Jahrgänge 1904—1913 und bei Batavia die 8 Jahrgänge 1910—1917, d. h. alles von dieser Station bisher veröffentlichte Material. Die Verschiedenheit der beiden Beobachtungsperioden ist im vorliegenden Fall nicht störend, da die gleichzeitigen Witterungsverhältnisse an zwei so weit von einander entfernten Orten ohnehin nicht denselben Charakter bzw. dieselbe Anomalie haben werden.

Ehe ich auf die Sache eingehe, muß ich eine kleine sprachliche Bemerkung vorausschicken. Unter Regenfällen werden hier der Kürze halber alle Niederschläge, also in Potsdam auch die Schneefälle, verstanden. Es wird ferner angenommen, daß jeder zeitlich scharf begrenzte Regenfall, den ich im Gegensatz zum Regenfall eines ganzen Tages, Monats usw. Einzelregen nennen will, keine regenlose Pause in sich schließt. Der in der niederländischen Publikation (Observations made at the R. Magnetical and Meteorological Observatory at Batavia) für Einzelregen gebrauchte Ausdruck »shower« scheint mir nicht ganz passend zu sein, da man darunter, ebenso wie beim deutschen Wort Schauer, einen kurz dauernden Regen versteht. Ein Einzelregen kann aber viele Stunden lang anhalten. Hervé-Mangon, der nach den Aufzeichnungen eines Pluvioskops Studien über die Häufigkeit und Dauer der Regenfälle in Paris gemacht hat, verwendet dafür die Bezeichnung »ondée de pluie« (Annuaire d. l. Soc. Mét. d. France; X, XI, XXXV, 1862—1887). Ich will in einem Anhang zu der vorliegenden Arbeit die Terminologie der Regenfälle, beurteilt nach der Art ihres Auftretens, besonders behandeln.

Über die Häufigkeit der Einzelregen geben folgende Zahlen zunächst allgemeinen Aufschluß:

Mittlere Zahl der Einzelregen in den Monaten

	Januar	Februar	März	April	Mai	Juni	Juli	August	Sept.	Okt.	Nov.	Dez.	Jahr
Potsdam...	41.0	39.9	35.8	34.5	31.8	34.8	42.1	43.2	34.6	30.3	36.8	41.3	446.1
Batavia ...	69.5	56.2	45.2	29.9	22.5	20.1	14.9	12.9	14.3	24.0	37.1	50.1	396.7

Mittlere Zahl der Einzelregen an einem Regentag

	Januar	Februar	März	April	Mai	Juni	Juli	August	Sept.	Okt.	Nov.	Dez.	Jahr
Potsdam...	2.5	2.5	2.3	2.4	2.4	2.6	2.8	2.6	2.6	2.5	2.2	2.4	2.4
Batavia ...	2.9	2.4	2.3	1.8	1.8	1.7	1.7	1.8	1.6	1.9	2.1	2.5	2.2

In der Hauptregenzeit von Batavia, die von Dezember bis Anfang März reicht, ist die Häufigkeit der Einzelregen größer als zur regenreichsten Zeit in Potsdam (Dezember, Januar, sowie Juli, August), dagegen bleibt sie in den Monaten April bis Oktober hinter der für Potsdam gültigen erheblich zurück. Im Juli und August hat Potsdam dreimal soviel Einzelregen als Batavia in denselben Monaten. Während in Potsdam in der Anzahl der Einzelregen die Monate keine großen Verschiedenheiten aufweisen, zeigt Batavia in dieser Beziehung eine stark ausgesprochene jährliche Periode: der Januar hat fünfmal soviel Einzelregen als der August, der nach 48jährigen Beobachtungen (1866—1913) der trockenste Monat ist, mit 36 mm mittlerer Regenmenge und 5.4 Regentagen. Ähnliches gilt für die auf einen Regentag entfallenden Einzelregen, deren mittlere monatliche Zahl in Potsdam zwischen 2.8 und 2.2, in Batavia aber zwischen 2.9 und 1.6 schwankt.

Die größte Zahl der in einem Monat vorgekommenen Einzelregen war 91 in Potsdam (Oktober 1905) und 121 in Batavia (Januar 1916), doch dürften in längeren Beobachtungsreihen als den hier verwandten höhere Werte vorkommen.

Entsprechend den Durchschnittswerten verhalten sich auch die nach Stufenwerten geordneten Häufigkeitszahlen in den am Schluß folgenden Tabellen 1a und 1b. In Batavia regnet es in den Monaten Mai bis September an mehr als der Hälfte aller Regentage nur einmal am Tage, so daß dieser Jahresabschnitt am ehesten als Trockenzeit angesehen werden kann. In Potsdam hat kein Monat soviele Tage mit einem Regenfall, hier regnet es durchschnittlich nur an einem Drittel aller Regentage einmal am Tage. An beiden Orten ist aber der Prozentsatz der Regentage mit zwei Einzelregen in fast allen Monaten von derselben Größenordnung. Die größte Zahl von Einzelregen an einem Tage war in Potsdam 14 und in Batavia 10. Aus diesen Zahlen geht schon hervor, daß in der tropischen Regenzeit von Batavia der Regen nicht, wie man wohl öfters annimmt, nahezu unaufhörlich herabfällt, sondern daß er sehr häufig Unterbrechungen erleidet. Das ersieht man noch deutlicher aus der Dauer der Einzelregen und der Gesamtregen an einem Tage, zu deren Besprechung ich nun übergehe.

Die Dauer der Einzelregen ist in Potsdam durchschnittlich um die Hälfte länger als in Batavia, wie folgende Zahlen zeigen:

Mittlere Dauer der Einzelregen in Stunden

	Januar	Februar	März	April	Mai	Juni	Juli	August	Sept.	Okt.	Nov.	Dez.	Jahr
Potsdam...	1.7	2.1	1.7	1.4	1.2	0.8	1.0	1.1	1.3	1.2	2.1	2.0	1.5
Batavia....	1.1	0.9	0.8	0.9	0.9	0.6	0.6	0.6	0.8	0.8	1.0	0.9	0.9

Weitere Einzelheiten lassen die Tabellen 2a und 2b erkennen, in denen die Einzelregen nach Stufenwerten der Dauer geordnet sind. Das erste Stundenintervall habe ich bei Potsdam, wie bei den früher bearbeiteten deutschen Stationen, deren Sommerregen untersucht wurden, in Viertelstunden und bei Batavia auch noch die erste Viertelstunde in drei Teile (1—5, 6—10, 11—15 Minuten) zerlegt, wodurch viele interessante Einzelheiten aufgedeckt wurden. Es zeigt sich z. B., daß in Batavia die kurz dauernden Regen bis zu 5 Minuten Dauer fast in allen Monaten, besonders aber während der Regenzeit, am häufigsten, und zwar ebenso häufig wie die von 16—30 Minuten Dauer sind.

Einstündige Regen gibt es, absolut und prozentisch genommen, in Batavia in der eigentlichen Regenzeit erheblich mehr als in Potsdam in den Sommermonaten. Die Abnahme der Häufigkeit erfolgt bei den ersten drei Stundenintervallen an beiden Orten ungefähr in gleichem Maße, jedoch sind in der Regenzeit der Tropenzone die etwas länger dauernden Einzelregen (bis zu 5 Stunden) zahlreicher als in der gemäßigten. Dafür hat die gemäßigte Zone mehr ganz lang dauernde Regenfälle aufzuweisen. Die längste vorgekommene Dauer eines Einzelregens betrug in Potsdam 39.5, in Batavia 17.6 Stunden; in den einzelnen Monaten gehören die Extreme folgenden Stufenwerten an:

	Januar	Februar	März	April	Mai	Juni	Juli	August	Sept.	Okt.	Nov.	Dez.
Potsdam...	16/17	23/24	28/29	17/18	9/10	7/8	18/19	12/13	12/13	14/15	39/40	27/28
Batavia....	14/15	13/14	8/9	9/10	9/10	4/5	5/6	4/5	7/8	7/8	9/10	17/18

Aus der Kombination von Zahl und Dauer der Einzelregen wird die Gesamtdauer des Regens in Stunden abgeleitet. Ich teile zunächst wieder die monatlichen Mittelwerte mit:

Mittlere Zahl der Regenstunden

	Januar	Februar	März	April	Mai	Juni	Juli	August	Sept.	Okt.	Nov.	Dez.	Jahr
Potsdam...	70.8	80.6	62.3	46.8	38.3	32.2	41.8	45.9	43.9	35.9	77.7	80.5	656.7
Batavia ...	74.6	51.2	35.8	24.5	21.6	12.9	9.6	7.4	11.6	20.4	39.7	47.8	357.1

Mittlere Dauer des Regens an einem Regentage

	Januar	Februar	März	April	Mai	Juni	Juli	August	Sept.	Okt.	Nov.	Dez.	Jahr
Potsdam...	4.3	5.0	4.1	3.2	3.0	2.4	2.6	2.7	3.2	2.6	4.2	4.7	3.5
Batavia ...	3.1	2.2	1.8	1.7	1.7	1.1	1.1	1.0	1.3	1.6	2.1	2.3	1.8

Die Gesamtdauer des Regens ist also in Batavia beinahe halb so groß wie in Potsdam, und nur in der Mitte der eigentlichen Regenzeit (Januar) regnet es ebensolange wie in Potsdam. Von den 744 Stunden, die der Januar hat, sind demnach in Batavia durchschnittlich 10 Prozent mit Regen ausgefüllt; in Potsdam ist dieser Prozentsatz im Februar und Dezember größer. Selbst in der Regenzeit ist in Batavia die Dauer des Regens an einem Regentage erheblich kürzer als in den Monaten der kalten Jahreszeit in Potsdam. Man wird danach seine Anschauungen über den Charakter der tropischen Regen vielfach berichtigen müssen.

Die am Schluß folgenden Tabellen 3a und 3b lassen ferner erkennen, daß in Potsdam vom Mai bis Oktober an rund einem Drittel aller Tage die Gesamtregendauer bis zu einer Stunde beträgt, während in den übrigen Monaten nur 12 bis 17 Prozent der Tage eine solche Dauer haben. Die umgekehrte jährliche Periode zeigen die Tage mit 2—3, 3—4, ... Stunden Regendauer; sie sind im Winter zahlreicher als im Sommer.

Ich gebe nun noch eine Gegenüberstellung der größten Zahl von Regenstunden, die in einigen Monaten der eingangs genannten 10- bzw. 8jährigen Periode vorgekommen sind, und füge die Zahl der Regentage hinzu.

Potsdam	Zahl der Regenstunden	Zahl der Regentage	Batavia	Zahl der Regenstunden	Zahl der Regentage
Dezember 1913 . . .	162.9	24	Januar 1916	135.3	30
Februar 1904	133.9	24	Januar 1917	97.3	23
Januar 1907	125.1	22	Dezember 1917 . . .	93.1	27
März 1905	125.0	21	November 1915 . . .	78.1	21
Juli 1907	91.5	22	Juli 1911	27.0	16
August 1912	83.4	26	Juni 1915	20.4	14

Der krasse Fall, daß in Potsdam der Monat (August 1912) mit der größten Zahl von Regentagen die kleinste Zahl von Regenstunden aufweist, zeigt deutlich, wie wenig sich die Zahl der Regentage zur Beurteilung der wirklichen Regendauer eignet.

Während in Batavia die längste Gesamtdauer des Regens an einem Regentage nicht ganz 20 Stunden betrug, erreichte sie in Potsdam den größtmöglichen Wert von 24 Stunden im Dezember 1905, indem es vom 11. bis 13. insgesamt 39.5 Stunden hintereinander regnete. In der gemäßigten Zone kommt es auch relativ oft vor, daß mehrere Tage mit langer Regendauer aufeinander folgen; so hat es in Potsdam in den 10 Jahren 1904—1913 16mal je 10 oder mehr Stunden an zwei aufeinanderfolgenden Tagen geregnet. Folgen von drei solchen Tagen gibt es namentlich in der kalten Jahreszeit, aber auch im Sommer fehlen sie nicht, z. B.

1907 Juli	11.	12.	13.
Regendauer	11.9	10.5	16.6 Stunden,
1913 August	16.	17.	18.
Regendauer	11.0	17.7	10.2 Stunden.

Zur Physiognomie des Regens gehört auch die Art seiner Verteilung auf die einzelnen Stunden des Tages. Ich habe daher die tägliche Periode der Regenhäufigkeit und der Regendauer berücksichtigt, teile aber nur für die letztere die Zahlenwerte in den Tabellen 4a und 4b mit, und zwar aus längeren Beobachtungsreihen als den bisher benutzten, nämlich bei Potsdam aus 18 Jahrgängen (1893—1910) und bei Batavia aus 35 Jahrgängen (1879—1913), weil zur Ableitung der täglichen Periode längere Reihen notwendig sind. Die Ähnlichkeit der Periode im Winter zu Potsdam und in der Hauptregenzeit zu Batavia mit einem Maximum in den späten Nacht- bzw. frühen Morgenstunden fällt sofort in die Augen[1]. Auch zeigt sich manche Übereinstimmung im Eintreten des Minimums in den Vormittagsstunden (9—11 Uhr) in den anderen Monaten. Wir müssen uns aber hüten, dieses Verhalten in Batavia als eine allgemeine Eigentümlichkeit der Tropenzone anzusehen: denn es ist bekannt, daß die tägliche Periode der Niederschläge von der speziellen Lage der Station stark beeinflußt wird. Und in der Tat, nur die am oder

[1] Im Januar und Februar hat Batavia mehr Nacht- als Taggewitter, in den übrigen Monaten treten die Gewitter hauptsächlich zwischen Mittag und 6 Uhr abends auf.

nahe am Meere gelegenen Orte von Java scheinen nächtliche Maxima des Regenfalls zu haben. Es hat nämlich kürzlich C. Braak den 3. Teil seiner Monographie »Het Klimaat van Nederlandsch-Indië« (Batavia 1923, Gr.-8°) veröffentlicht, in der von einer großen Zahl von Stationen die tägliche Periode der Regenmenge bekannt gegeben wird. Da diese der täglichen Periode der Regendauer gewöhnlich sehr ähnlich ist, können wir aus den Angaben von Braak mit großer Wahrscheinlichkeit schließen, daß die im Innern der Insel gelegenen Orte den kontinentalen Sommertypus der täglichen Periode der Regendauer aufweisen, d. h. ein Maximum am Nachmittag. Das gilt z. B. für das relativ nahe südlich von Batavia gelegene Buitenzorg, das infolge seiner höheren Lage viel größere Regenmengen erhält als jenes.

Die starken nächtlichen Regenfälle, die viele Reisende in den Tropen erlebt haben, müssen auf einige von ihnen einen so nachhaltigen Eindruck gemacht haben, daß sie ihrer in den Reisebeschreibungen als etwas besonders Charakteristischem ausführlich gedenken. Das kann beim Leser leicht den Glauben erwecken, daß starke Nachtregen eine allgemeine Eigentümlichkeit der Tropen seien. Ich möchte ausdrücklich betonen, daß dies nicht zutrifft. Vom täglichen Gange des Regens in den eigentlichen Tropen hatten wir bis jetzt nur von sehr wenigen Orten, die zufällig meist an oder nahe der Küste liegen, genauere, aus wirklichen Registrierungen abgeleitete, Kenntnis. Die eben genannte sehr dankenswerte Publikation von Braak gibt zum erstenmal aus einem größeren tropischen Gebiet die Ergebnisse eines reichen diesbezüglichen Beobachtungsmaterials bekannt, nämlich von 37 auf den Inseln von Niederländisch-Indien zerstreut liegenden Stationen. Aus dieser Fülle von Registrierungen, meist durch Regenmesser meiner Konstruktion, geht mit Sicherheit hervor, daß starke Nachtregen nur die im Luv des West- oder des Ostmonsuns liegenden Orte haben. In der Zeit des Übergangs des einen Monsuns in den andern (Kentern, »Kentring«) und wenn die Orte im Lee zu liegen kommen, tritt der kontinentale Typus mit einem stark ausgeprägten Nachmittagmaximum ein, das sich bisweilen bis in die Abendstunden verschiebt. So hat Batavia an der Nordwestecke von Java ein nächtliches Regenmaximum zur Zeit des Nordwestmonsuns im Januar und Februar, Rogodjampi aber, in der Südostecke von Java, nahe der Balistraße, ein solches in den Monaten Juli bis September, wenn der Südostmonsun weht. Im Innern der Inseln besteht das hauptsächlich durch die Gewitter verursachte Nachmittagmaximum des Regenfalls das ganze Jahr hindurch, und nur ein kleines sekundäres Maximum in den Nachtstunden einiger Monate zeigt an, daß ein geringer Einfluß des Monsuns noch vorhanden ist[1].

---

[1] Ähnliche Gegensätze in der täglichen Periode zeigen sich auch auf der Luv- und der Leeseite des Kamerungebirges, wo die Regenmengen viel größer als in Batavia sind; vgl. K. Langbeck, Niederschlagsregistrierungen am Kamerungebirge vom Jahre 1909/10 unter Berücksichtigung der täglichen Regenverteilung in den Tropen (Mitteil. aus d. Deutschen Schutzgebieten, XXIV, 1911, Heft I). Auch die folgenden Jahre bis März 1912 sind vom Verfasser bearbeitet und in derselben Zeitschrift, Bd. XXVI, XXVII, veröffentlicht worden. Die Registrierungen erfolgten mit einem Pluviographen meines Systems, und ich hätte sie gern in gleicher Weise wie die von Batavia für die vorliegende Arbeit verwertet, aber die Lücken waren zu zahlreich, um vergleichbare Häufigkeits- und Dauerwerte ableiten zu können.

Die tägliche Periode des Regens ist in Niederländisch-Indien, und wahrscheinlich allgemein in den Tropen, viel ausgeprägter als bei uns in der gemäßigten Zone. In einzelnen Monaten, in denen der Südostmonsun weht (Juli, August, September) oder zur Zeit des Kenterns (März, April; Oktober, November) ist das Maximum der stündlichen Regendauer 4- bis 9 mal so groß als das Minimum. In Potsdam erreicht das Verhältnis Maximum : Minimum in keinem Monat den Wert 2. Die Regenfälle sind hier also sehr gleichmäßig über den ganzen 24 stündigen Zeitraum verteilt, während in Batavia einer ziemlich regenfreien Tageszeit eine regenreiche gegenübersteht.

Aus dem Vorstehenden geht hervor, daß die Regenfälle in Batavia etwas seltener und merklich kürzer als in Potsdam sind, dagegen ist, wie sich gleich zeigen wird, die Ergiebigkeit des Regens viel größer. Der Grund dafür liegt in dem höheren Wasserdampfgehalt der Luft in Batavia. Er beträgt im Jahresmittel 20.7 mm und bleibt das ganze Jahr hindurch fast gleich hoch (April 21.6, August 19.6), während er in Potsdam bei einem Jahresdurchschnitt von nur 6.9 mm zwischen 10.7 (Juli) und 4.0 (Januar) schwankt. Wenn es also in Batavia zum Regnen kommt, kann eine viel größere Menge Wasserdampf in der Form flüssigen Wassers ausgeschieden werden, als im gleichen Falle in Potsdam. Dazu kommt, daß die Regen in Batavia sehr viel häufiger als in Potsdam als Gewitterregen niedergehen, die weit ergiebiger als die gewöhnlichen Regen sind. Potsdam hat im Jahre rund 27 Tage mit Gewitter, die fast ausschließlich den Monaten April bis September angehören, in Batavia aber wird an 131 Tagen im Jahre der Donner gehört (November 15.7, August 4.9)[1].

In den Tabellen 5a und 5b, in denen die Tagesmengen des Regens nach Schwellenwerten geordnet sind, tritt das eben geschilderte Verhalten deutlich zutage. Schwache Regen von 0.1—1.0 mm gibt es in Potsdam das ganze Jahr hindurch 35 bis 50 Prozent, in Batavia während der Hauptregenzeit aber nur 18 bis 28 Prozent. Dafür treten starke Regen mit Tagesmengen von mehr als 30 mm in Batavia noch mit 5 bis 11 Prozent auf, während sie in Potsdam schon zu den ganz seltenen Ausnahmen gehören. Der große Unterschied in der Stärke des Regens in der gemäßigten und in der Tropenzone zeigt sich auch in der verschiedenen Häufigkeit der Stundenmengen von mindestens 10 mm. Zählt man aus den Tabellen der Stundenwerte des Regenfalls aus, wie oft in einem Stundenintervall mindestens 10 mm gemessen wurden, so findet man für beide Orte folgende Mittelwerte[2]:

Mittlere Zahl von Stundenmengen des Regens $\geqq$ 10 mm

	Januar	Febr.	März	April	Mai	Juni	Juli	August	Sept.	Okt.	Nov.	Dez.	Jahr
Potsdam	.	.	.	.	0.7	0.7	0.3	0.1	0.2	.	.	.	2.0
Batavia	8.4	5.6	3.8	3.0	2.8	1.9	1.2	1.2	2.1	3.2	3.5	4.0	40.7

[1] Nur diese Angabe wird vom Observatorium in Batavia gemacht; es sind also in obiger Zahl die Ferngewitter mit enthalten, während in Potsdam nur die Nahgewitter gezählt wurden.

[2] Es handelt sich also nicht um selbständige Regenfälle von der Dauer einer Stunde, sondern um stündliche Ausschnitte aus länger dauernden Regen.

Ähnlich verhält es sich mit dem mittleren und absoluten stündlichen Maximum der Regenmenge:

	Potsdam	Batavia
Mittleres Stundenmaximum	15.9	55.4
Absolutes Stundenmaximum	28.7	69.1

Mit der Gewitternatur vieler Starkregen in Batavia hängt es zusammen, daß die großen Stundenmengen meist gleich zu Beginn des Regens fallen, was mit der von vielen Reisenden berichteten Tatsache übereinstimmt, daß die tropischen Regen sehr stark einsetzen.

Da noch in weiten Kreisen die Meinung herrscht, daß es in den Tropen immer stark regnet, muß hier ausdrücklich hervorgehoben werden, daß auch viele Schwachregen vorkommen, d. h. Regen, die in der Stunde 1 mm liefern. Die Regenintensität wechselt eben auch in den Tropen außerordentlich oft und schnell; an ein und demselben Tage kann es ungewöhnlich stark regnen und kurze Zeit darauf nur ein sanfter Regen herabgehen. Die ausführlich veröffentlichten Registrierungen des Regens in Batavia bieten viele Hunderte von Beispielen dafür. Ich will nur ein paar extreme Fälle hier anführen. Am 28. September 1912 bringt ein Regen von $3^h 44^m$ Dauer 74.2 mm, nach einer Pause von 44 Minuten setzt ein zweiter Regenfall ein, der in $4^h 22^m$ nur 7.6 liefert. Ähnlich am 10. November desselben Jahres: nachdem 57.5 mm in $4^h 15^m$ gefallen sind, beginnt es 36 Minuten später so schwach zu regnen, daß nach $5^h 4^m$ bloß 3.8 mm gemessen werden.

Wie ungleich stark auch in der eigentlichen Regenzeit, im Januar, die Regenfälle sind, zeigen folgende beide Tage aus dem Januar 1913:

12. Januar 1913		
$10^h.57^m$a—$11^h.10^m$a	13^m	0.5 mm,
2.10 p— 2.12 p	2^m	0.3 » ,
4. 4 p— 6.59 p	$2^h.55^m$	0.7 » .

20. Januar 1913		
$2^h.1^m$a—$2^h.54^m$	53^m	1.1 mm,
3.36 a—5. 0 a	$1^h.24^m$	11.3 » ,
6.18 a—6.22 a	4^m	0.1 » ,
7.16 a—7.21 a	5^m	0.1 » ,
8.16 a—3.36 p	$7^h.20^m$	62.4 » ,
7.34 p—7.36 p	2^m	0.1 » .

Die langdauernden und dabei wenig ergiebigen Regenfälle in Batavia erinnern ganz an unsere Landregen, die jetzt nach dem Vorgang der norwegischen Meteorologen als »Kursregen« aufgefaßt werden. Im Äquatorialgebiet, wo barometrische Depressionen fast ganz fehlen, müssen sie anders gedeutet werden. Zunächst müßte man mit synoptischen Karten untersuchen, ob diese schwachen langdauernden Regenfälle auch eine weite Verbreitung haben. Wir wissen darüber noch nichts.

Beispiele von besonders langdauernden Regen geringer Stärke sind folgende:

11. Februar 1910	$5^h.14^m$	0.7 mm,
20. Februar 1910	5. 4	1.8 » ,
15. März 1913[1]	4. 2	1.6 » ,
24. November 1913	$3^h.51^m$	2.5 mm.
3. November 1917	3.47	1.4 » .

[1] An demselben Tage fielen aber von $2^h.39^m$p—$9^h.30^m$p, also in $6^h.51^m$, 84.8 mm.

Bezeichnet man einen Einzelregen von der Dauer einer Stunde als schwach, wenn er höchstens 1 mm liefert, so sind in der Hauptregenzeit von Batavia (Dezember, Januar, Februar) rund 25 Prozent schwach zu nennen.

Wenn es also in den Tropen auch nicht immer »schüttet« und »gießt«, so ist ihnen doch eine große Zahl von Starkregen eigen, die mehrere Stunden mit annähernd gleicher Stärke anhalten und die dann große Regenmengen liefern, wie sie in der gemäßigten Zone nur ganz vereinzelt vorkommen. Ich verweise in dieser Beziehung auf die Tabellen 5a und 5b.

Seit 1912 veröffentlicht das Observatorium in Batavia in den genannten »Observations« unter der Überschrift »Cloudbursts. One Millimeter and more pro Minute. Minimum Duration of the whole Shower 5 Minutes« jedes Jahr eine ziemlich lange Liste von starken Regenfällen in kurzer Zeit, die man nach der eben wiedergegebenen Bezeichnung für Platzregen halten könnte und über deren große Zahl man sich wundern müßte. Es handelt sich aber nicht um eigentliche Platzregen (Gußregen), d. h. um kurzdauernde Einzelregen von großer Intensität, sondern um Abschnitte aus länger dauernden Einzelregen, deren wechselnde Stärke den in der Überschrift genannten Bedingungen entspricht. Selbständige Platzregen von 1 bis 5 Minuten Dauer und mindestens 1 mm Regenmenge sind in Batavia selten. In der 8jährigen Reihe 1910—1917 habe ich nur zwei gefunden, die diese Bedingungen erfüllen: im November einmal 3.1 mm in 3 Minuten und im Dezember einmal 4.1 mm in 5 Minuten. In den übrigen zehn Monaten waren die Maxima der Regenmenge in Einzelregen bis zu 5 Minuten Dauer folgende:

	Millimeter	Minuten		Millimeter	Minuten
Januar	0.6	4	Juni	0.6	4
Februar	0.8	2	Juli	0.4	5
März	0.6	5	August	0.3	5
April	0.6	5	September	0.7	4
Mai	0.7	5	Oktober	0.8	4
	(5.0	8)			

Diese Werte werden in den Platzregen der gemäßigten Zone bei weitem übertroffen. Ich habe die Frage der starken Niederschläge in kurzer Zeit so oftmals in meinen Regenuntersuchungen behandelt, daß es wohl genügt, auf diese Schriften hinzuweisen und nur hervorzuheben, daß ich im Text meiner Provinzregenkarten in die Tabelle der exzessiv großen Regenfälle von kurzer Dauer bei der ersten Gruppe, von 1—5 Minuten Dauer, nur diejenigen Platzregen aufgenommen habe, deren Intensität pro Minute mindestens 2 mm war; denn bei Einhaltung einer tieferen Grenze wäre die Zahl zu groß geworden. Es hat in Norddeutschland Platzregen von dreimal so großer Intensität als in Batavia gegeben. Dagegen sind Platzregen von etwas längerer Dauer (> 45 Minuten) dort häufiger und auch stärker als bei uns, worauf ich schon 1907 in der Meteorol. Zeitschr. XIX, 474 hingewiesen habe. Dieser Unterschied zwischen Potsdam und Batavia findet wohl darin seine Erklärung, daß das durch einen plötzlichen Impuls eingeleitete Emporsteigen dampfreicher Luft und die dabei stattfindende Kondensation in der gemäßigten Zone nicht genügend lange in gleicher Stärke anhalten kann, weil der vor-

Tab. 1a. Mittlere Zahl der Regentage mit *n* Einzelregen in Potsdam, ausgedrückt in Prozenten aller Regentage.

n	Jan.	Febr.	März	April	Mai	Juni	Juli	Aug.	Sept.	Okt.	Nov.	Dez.
1	29.3	32.5	34.8	42.6	38.7	31.7	27.9	34.2	31.7	36.5	39.7	30.6
2	25.6	28.1	27.8	15.4	26.5	24.2	25.0	26.3	28.3	25.2	25.0	29.4
3	20.1	14.4	16.8	19.6	9.1	15.0	19.9	15.1	15.8	17.4	12.2	16.4
4	14.0	9.4	9.7	8.4	8.3	13.3	8.1	7.9	10.0	7.8	11.0	10.0
5	3.7	6.2	5.8	6.3	10.6	9.2	8.1	8.6	5.0	4.5	7.3	7.1
6	4.9	3.7	1.3	2.8	3.0	4.2	4.4	3.9	4.2	3.5	1.8	2.3
7	1.8	1.9	2.6	2.8	3.0	0.8	4.4	—	1.7	2.6	1.2	1.8
8	—	1.9	—	0.7	0.8	1.6	1.5	1.3	1.7	2.6	1.8	0.6
9	0.6	1.9	0.6	0.7	—	—	—	1.3	0.8	—	—	1.2
10	—	—	0.6	—	—	—	0.7	0.7	0.8	—	—	0.6
11—14	—	—	—	0.7	—	—	—	0.7	—	—	—	—

handende Wasserdampf, der aus der weiteren Umgebung herbeigezogen wird, dazu nicht ausreicht. In den Tropen aber ist er überall reichlich vorhanden, zumal in Batavia, das an einem warmen Meere liegt.

Alle bisherigen Ausführungen und Vergleiche bezogen sich auf die Niederschläge mit messbaren Mengen. Es gibt aber auch solche, die **unmeßbare Mengen** liefern und die zur Physiognomie der Niederschläge viel beitragen. Sie sind bisher fast gar nicht studiert worden. Wohl notiert mancher Beobachter in der Spalte »Regenmenge« seines Journals 0.0, wenn es seiner Wahrnehmung nach Niederschläge gegeben hat, die keine meßbare Menge im Regenmesser zurückgelassen haben — die Benetzung der Innenwandung des Auffanggefäßes verschluckt ja beinahe ein zehntel Millimeter —, aber aus diesen wenig systematischen Aufzeichnungen läßt sich die Häufigkeit und Dauer der unmeßbaren Niederschläge nicht ableiten. Auch hierzu bedarf es eines selbstregistrierenden Regenmessers, der sehr empfindlich sein muß, um die kleinsten Kondensationsmengen sofort aufzuzeichnen. Hierzu ist der eingangs genannte selbstschreibende Regen- und Verdunstungsmesser Sprung-Fuess, der bei 23facher Vergrößerung der Ausschläge der Wage kleinste Mengen anzeigt, sehr gut geeignet. Soviel ich weiß, ist das Potsdamer Exemplar des Apparates das einzige überhaupt vorhandene, und ich habe bereits nach seinen Registrierungen in meiner Arbeit »Häufigkeit und Dauer der Niederschläge« (Ber. über d. Tätigkeit d. Preuß. Met. Inst. i. J. 1915. Berlin 1916. 8°. S. [6]—[16]) die unmeßbaren Niederschläge zum ersten Male eingehend berücksichtigt. Ich will aber hier noch einige Ergänzungen dazu geben.

Unmeßbare Niederschläge rühren her von vereinzelt fallenden Regentropfen und Tröpfchen, Schneekristallen, Spritzern, Beschlag[1], Sprüh- oder Nieselregen, feinstem Nebelregen; sie haben wahrscheinlich eine sehr große Verbreitung, von der wir aber noch wenig wissen. Für einige Küstengegenden, wie die Normandie und Bretagne, scheinen sie typisch zu sein, auch weiß

[1] Vgl. meine Abhandlung »System der Hydrometeore« S. 8 (Abh. d. Preuß. Met. Inst. V 3. Berlin 1915. 4°).

Tab. 1b. Mittlere Zahl der Regentage mit n Einzelregen in Batavia, ausgedrückt in Prozenten aller Regentage.

n	Jan.	Febr.	März	April	Mai	Juni	Juli	Aug.	Sept.	Okt.	Nov.	Dez.
1	24.2	30.7	38.0	44.8	52.0	53.2	52.2	56.9	55.6	46.9	40.6	29.2
2	26.3	28.5	27.8	37.6	27.0	32.3	24.5	24.2	31.9	29.6	25.4	27.4
3	20.4	17.8	17.7	8.0	13.0	10.4	17.5	8.6	11.1	14.3	19.5	18.0
4	12.0	11.2	8.9	5.6	5.0	3.1	3.0	5.2	1.4	4.1	8.7	16.8
5	5.7	6.1	3.2	4.0	2.0	1.0	1.4	3.4	—	5.1	4.3	4.3
6	5.7	3.4	1.9	—	1.0	—	1.4	1.7	—	—	1.5	3.1
7	3.7	1.1	1.3	—	—	—	—	—	—	—	—	1.2
8	—	0.6	1.2	—	—	—	—	—	—	—	—	—
9	0.5	0.6	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
10	1.5	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—

ich aus der Literatur, daß sie an den regenarmen Küsten von Südwestafrika und Südamerika, ferner im trockenen Niltal bei Assuan öfter vorkommen. Daß sie auch in den Tropen nicht ganz fehlen, werde ich gleich zeigen.

Aus den Potsdamer Registrierungen habe ich ausgezählt, in wie vielen Stundenintervallen die Angabe 0.0, d. h. kein meßbarer Niederschlag, verzeichnet ist und aus den so erhaltenen Zahlen folgende Ergebnisse abgeleitet:

Unmeßbare Niederschläge in Potsdam

Mittlere Zahl der	Januar	Februar	März	April	Mai	Juni	Juli	August	Sept.	Okt.	Nov.	Dez.	Jahr
Tage	12.5	13.0	10.6	9.4	8.4	7.0	8.4	9.8	9.5	7.4	13.3	14.8	124.1
Stundenintervalle	28.3	33.4	21.9	16.3	15.3	11.9	13.9	15.9	17.5	12.8	30.3	38.0	255.5
Stunden pro Regentag	2.3	2.6	2.1	1.7	1.8	1.7	1.7	1.7	1.8	1.7	2.3	2.6	2.1

Unmeßbare Niederschläge kommen hiernach in Potsdam häufig vor, besonders in der kalten Jahreshälfte, die fast doppelt so viele hat als die warme. Die größte Zahl von Stundenintervallen mit unmeßbarem Niederschlag hatte der Dezember 1905 mit 83; die kleinste Zahl war dreimal 1, nämlich im April und Juli 1906 und Oktober 1910.

Eine ausgesprochene tägliche Periode des Auftretens scheinen die unmeßbaren Regen in Potsdam nicht zu haben, doch läßt sich nicht verkennen, daß sie in vielen Monaten mit Vorliebe in den frühesten Morgen- und späten Nachmittag- bzw. Abendstunden vorkommen, d. h. zu einer Tageszeit, in der die Lufttemperatur stark sinkt. Sie werden ferner meist an Tagen aufgezeichnet, an denen auch meßbare Niederschläge fallen. Sehr viele Regen- und Schneefälle, namentlich die Landregen, fangen nämlich mit unmeßbaren Niederschlägen an und endigen auch häufig mit solchen. Die Registrierungen lassen das deutlich erkennen, aber in den Tabellenwerten der Stundenintervalle kommt es dann nicht zum Ausdruck, wenn in demselben Intervall außer dem unmeßbaren auch meßbarer Niederschlag registriert wird. Auch mitten in einem länger dauernden Regenfall gibt es bisweilen kurze Perioden unmeßbaren Regens, die in den Stundenmengen gleichfalls oft nicht in die Erscheinung treten. Aus diesen Gründen stellen die oben angegebenen mittleren

Tab. 2a. Mittlere Zahl der Einzelregen in Potsdam, geordnet nach ihrer Dauer.

a. Absolute Zahlen.

Dauer der Einzelregen	Jan.	Febr.	März	April	Mai	Juni	Juli	Aug.	Sept.	Okt.	Nov.	Dez.
1—15^m	6.0	5.3	5.5	8.4	7.0	8.8	12.3	13.0	7.4	4.5	4.2	5.7
16—30	8.5	7.8	8.9	8.4	8.0	9.9	11.3	11.6	9.4	8.0	6.5	7.8
31—45	3.2	4.0	3.5	3.4	2.9	4.3	4.1	4.5	4.0	3.5	4.7	4.5
46—60	4.1	3.6	3.9	3.1	3.3	3.9	4.0	3.5	3.3	4.3	4.4	4.1
1^m—1^h	21.8	20.7	21.8	23.3	21.2	26.9	31.7	32.6	24.1	20.3	19.8	22.1
1—2	8.8	7.9	6.2	5.1	5.9	4.3	5.5	5.2	4.5	4.5	6.5	8.2
2—3	4.4	3.9	2.5	2.2	1.4	1.8	2.6	2.0	1.9	1.4	4.2	3.6
3—4	2.2	2.5	1.4	1.1	1.5	1.0	0.9	0.9	1.3	0.9	1.4	2.8
4—5	0.8	1.4	1.7	0.9	0.7	0.4	0.4	0.9	0.8	1.0	1.2	1.3
5—6	1.0	0.3	0.5	0.5	0.4	0.3	—	0.4	0.8	0.1	0.8	0.9
6—7	0.6	0.8	0.4	0.3	0.2	—	0.2	0.4	0.1	—	0.5	0.8
7—8	0.2	0.4	0.2	0.5	0.2	0.3	0.2	0.1	0.2	0.1	0.5	—
8—9	0.3	0.5	0.2	0.2	0.2	—	—	—	0.1	0.2	0.3	0.1
9—10	0.2	0.1	0.1	0.1	0.1	—	0.1	0.1	0.2	—	0.6	0.5
10—11	—	0.3	—	—	—	—	—	0.2	0.1	—	0.2	0.3
11—12	0.1	0.4	0.2	0.1	—	—	0.1	0.2	0.1	—	0.1	0.1
12—13	0.1	0.1	0.1	—	—	—	—	0.1	0.1	—	0.2	0.1
13—14	0.2	—	0.2	—	—	—	—	—	—	—	0.1	—
14—15	0.1	0.3	—	0.1	—	—	—	—	—	0.1	—	0.1
15—16	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0.1	—
16—17	0.2	0.1	—	—	—	—	—	—	—	—	0.1	0.1
17—18	—	—	—	0.1	—	—	0.1	—	—	—	—	—
18—19	—	0.1	—	—	—	—	0.1	—	—	—	—	—
19—20	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0.2
20—40	—	0.1	0.3	—	—	—	—	—	—	—	0.2	0.1

b. Prozente.

Dauer der Einzelregen	Jan.	Febr.	März	April	Mai	Juni	Juli	Aug.	Sept.	Okt.	Nov.	Dez.
1^m—1^h	53.2	51.9	60.9	67.5	66.7	76.6	75.5	75.3	70.1	71.0	53.8	53.5
1—2	21.5	19.8	17.3	14.8	18.6	12.3	13.2	12.1	13.2	15.7	17.7	19.9
2—3	10.7	9.8	7.0	6.4	4.4	5.1	6.1	4.6	5.5	4.9	11.4	8.7
3—4	5.4	6.3	3.9	3.2	4.7	2.8	2.1	2.1	3.9	3.1	3.8	6.8
4—5	2.0	3.5	4.7	2.6	2.2	1.3	1.1	2.1	2.3	3.5	3.3	3.2
5—6	2.4	0.8	1.4	1.4	1.3	1.0	—	1.0	2.3	0.4	2.2	2.2
6—7	1.5	2.0	1.1	0.9	0.6	—	0.5	1.0	0.3	—	1.4	2.0
7—8	1.5	1.0	0.6	1.4	0.6	1.0	0.5	0.3	0.6	0.4	1.4	—
8—9	0.7	1.3	0.6	0.6	0.6	—	—	—	0.3	0.7	0.8	0.2
9—10	0.5	0.2	0.3	0.3	0.3	—	0.3	0.3	0.6	—	1.6	1.2
10—11	—	0.8	—	—	—	—	—	0.5	0.3	—	0.5	0.8
11—12	0.2	1.0	0.6	0.3	—	—	0.3	0.5	0.3	—	0.3	0.2
12—13	0.2	0.2	0.3	—	—	—	—	0.3	0.3	—	0.5	0.2
13—14	0.5	—	0.6	—	—	—	—	—	—	—	0.3	—
14—15	0.2	0.8	—	0.3	—	—	—	—	—	0.4	—	0.2
15—16	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0.3	—
16—17	0.5	0.2	—	—	—	—	—	—	—	—	0.3	0.2
17—18	—	—	—	0.3	—	—	0.3	—	—	—	—	—
18—19		0.2		—	—	—	0.3	—	—	—	—	—
19—20	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0.5
20—40	—	0.2	0.9	—	—	—	—		—	—	0.5	0.2

Tab. 2b. Mittlere Zahl der Einzelregen in Batavia, geordnet nach ihrer Dauer.

a. Absolute Zahlen.

Dauer der Einzelregen	Jan.	Febr.	März	April	Mai	Juni	Juli	Aug.	Sept.	Okt.	Nov.	Dez.
1—5^m	11.9	11.0	9.0	5.2	3.4	4.2	2.8	2.8	2.4	2.6	6.4	7.9
6—10	7.0	6.4	4.8	3.6	2.9	1.5	2.4	1.6	1.4	2.9	4.5	7.5
11—15	6.1	3.0	3.6	2.4	1.5	2.0	1.1	1.6	1.5	2.2	2.2	4.6
1—15^m	25.0	20.4	17.4	11.2	7.8	7.7	6.3	6.0	5.3	7.7	13.1	20.0
16—30	11.6	10.6	9.2	5.6	4.6	5.0	3.2	3.1	3.5	5.2	5.6	8.0
31—45	5.9	5.4	4.9	3.0	2.0	1.8	1.5	0.9	1.2	2.9	4.2	6.6
46—60	6.2	4.5	3.5	1.8	1.1	1.2	0.6	1.1	1.0	1.8	2.1	3.8
1^m—1^h	48.7	40.9	35.0	21.6	15.5	15.7	11.6	11.1	11.0	17.6	25.0	38.4
1—2	11.1	7.6	6.2	3.3	4.1	2.5	2.4	1.0	1.9	4.1	6.9	6.4
2—3	4.1	3.5	2.1	2.0	1.1	0.5	0.5	0.6	0.5	0.8	2.2	2.9
3—4	1.5	2.2	0.6	1.0	0.9	0.5	0.1	—	0.2	0.9	1.0	1.2
4—5	1.2	0.9	0.5	0.4	0.5	0.2	0.1	0.1	0.4	0.2	0.8	1.1
5—6	0.6	0.8	0.3	0.2	0.2	—	0.1	—	0.1	0.1	0.5	0.5
6—7	0.9	0.1	0.2	—	—	—	—	—	—	—	0.5	0.2
7—8	0.8	—	—	0.1	—	—	—	—	0.1	0.2	0.1	—
8—9	—		0.1	—	—	—	—	—	—	—	—	—
9—10	—	—	—	0.1	0.1	—	—	—	—	—	0.1	0.1
10—11	0.1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
11—12	0.1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
12—13	0.1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0.1
13—14	—	0.1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
14—15	0.1		—	—	—	—	—	—	—	—	—	
15—18	—	—	—	—	—	—	—	—	—		—	0.1

b. Prozente.

Dauer der Einzelregen	Jan.	Febr.	März	April	Mai	Juni	Juli	Aug.	Sept.	Okt.	Nov.	Dez.
1^m—1^h	70.1	70.0	77.6	75.2	68.9	80.8	78.2	86.4	77.2	73.4	67.4	75.2
1—2	16.0	13.5	13.8	11.3	18.3	12.9	16.0	7.8	13.1	17.2	18.5	12.5
2—3	5.9	6.2	4.7	7.0	5.0	2.6	3.4	4.9	3.5	3.2	6.1	5.6
3—4	2.2	4.0	1.4	3.5	3.9	2.5	0.8	—	1.8	3.7	2.7	2.4
4—5	1.8	1.6	1.1	1.3	2.2	1.2	0.8	0.9	2.6	1.0	2.0	2.2
5—6	0.9	1.3	0.6	0.9	1.1	—	0.8	—	0.9	0.5	1.4	1.0
6—7	1.2	0.2	0.5	—	—	—	—	—	—	—	1.3	0.5
7—8	1.1	—	—	0.4	—	—	—	—	0.9	1.0	0.3	—
8—9	—	—	0.3	—	—	—	—	—	—	—	—	—
9—10	—	—	—	0.4	0.6	—	—	—	—	—	0.3	0.2
10—11	0.2	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
11—12	0.2	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
12—13	0.2	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0.2
13—14	—	0.2	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
14—15	0.2	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
15—18	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0.2

Tab. 3a. Mittlere Zahl der Regentage in Potsdam mit einer Regendauer von *n* Stunden, ausgedrückt in Prozenten aller Regentage.

n	Jan.	Febr.	März	April	Mai	Juni	Juli	Aug.	Sept.	Okt.	Nov.	Dez.
$1-15^m$	—	1.2	3.9	7.0	6.8	11.7	10.3	9.2	4.2	4.4	3.7	2.4
16—30	6.7	4.4	7.1	5.6	14.4	7.5	8.1	11.8	12.5	8.7	3.7	6.5
31—60	9.8	6.9	13.6	14.7	17.4	18.3	17.6	13.8	18.3	19.1	12.8	8.2
1^m-1^h	16.5	12.5	24.6	27.3	38.6	37.5	36.0	34.8	35.0	32.2	20.2	17.1
1—2	18.9	14.4	13.6	21.7	15.1	25.0	25.8	22.4	17.5	19.1	11.6	12.9
2—3	14.6	13.8	8.4	7.0	12.9	7.5	9.6	11.8	8.3	14.7	12.2	14.1
3—4	9.1	10.0	12.3	10.5	8.3	11.7	8.8	8.6	8.3	9.6	9.7	11.8
4—5	8.5	13.1	14.2	8.4	9.8	3.3	6.6	5.3	10.0	6.1	11.0	7.6
5—6	6.1	6.9	9.0	9.1	3.8	7.5	1.5	3.3	5.9	5.2	6.1	4.7
6—7	4.3	3.8	1.9	2.8	3.0	1.7	1.5	4.6	—	5.2	6.7	8.2
7—8	9.2	6.2	2.6	6.3	0.8	1.7	1.5	3.9	2.5	3.5	3.6	5.3
8—9	1.2	5.6	3.2	2.1	3.0	1.7	2.2	1.3	2.5	1.7	4.3	3.5
9—10	1.2	1.2	2.6	0.7	0.8	0.8	1.5	0.7	2.5	0.9	4.9	2.9
10—11	3.1	1.9	1.3	1.4	0.8	—	2.2	1.3	3.3	—	1.8	4.1
11—12	3.1	3.8	0.7	1.4	—	—	0.7	—	1.7	—	1.2	2.4
12—13	0.6	0.6	1.9	1.4	—	0.8	—	0.7	0.8	0.9	2.4	1.2
13—14	1.8	1.3	1.9	—	0.8	—	—	0.7	—	—	1.2	—
14—15	0.6	1.9	0.7	—	—	—	0.7	—	—	—	—	1.8
15—16	0.6	0.6	—	—	1.5	0.8	0.7	—	0.8	—	0.6	0.6
16—17	—	—	—	—	0.8	—	0.7	—	0.8	—	1.2	1.2
17—18	—	0.6	1.3	—	—	—	—	0.7	—	—	—	—
18—19	—	0.6	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0.6
19—20	0.6	0.6	—	—	—	—	—	—	—	—	0.6	—
20—21	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
21—22	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
22—23	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0.9	—	—
23—24	—	0.6	—	—	—	—	—	—	—	—	0.6	—

Zahlen der Stundenintervalle mit unmeßbarem Niederschlag nur eine untere Grenze vor. Es kommen aber auch viele ganz selbständige unmeßbare Niederschläge vor, die sich an einem Tage wiederholt einstellen können. Solche Tage gibt es in jedem Monat 1—2, im Jahre rund 18. Die Dauer der unmeßbaren Regen ist kurz, meist 5 bis 15 Minuten, wenn sie auch ausnahmsweise einige Stunden anhalten können, so wurden z. B. von 9^hp des 4. März 1905 bis Mittag des 5., also 15 Stunden hintereinander, in jedem Stundenintervall unmeßbare Niederschläge registriert, die aber nicht jede Stunde ausfüllten.

Ob es unmeßbare Regen auch in Batavia gibt, verraten die Beobachtungen und Registrierungen des Observatoriums nicht. Auch in der modernen meteorologischen Literatur über Niederländisch Indien fand ich keinen Aufschluß darüber, wohl aber einige Angaben in einer kleinen Schrift vom Jahre 1858. Der aus der Schweiz stammende Lehrer und Botaniker H. Zollinger, der jahrelang auf Java gelebt und die meteorologischen Erscheinungen daselbst aufmerksam verfolgt hat, erwähnt in seiner Abhandlung »Über die

Tab. 3b. Mittlere Zahl der Regentage in Batavia mit einer Regendauer von n Stunden, ausgedrückt in Prozenten aller Regentage.

n	Jan.	Febr.	März	April	Mai	Juni	Juli	Aug.	Sept.	Okt.	Nov.	Dez.
1—15^{m}	6.8	10.0	18.4	17.6	20.0	21.8	29.0	29.3	27.7	13.1	13.8	17.5
16—30	8.9	15.5	8.3	16.0	15.0	19.8	20.3	12.1	15.3	16.2	10.8	3.7
31—60	14.7	14.4	19.1	24.4	13.0	21.0	15.8	20.7	15.3	19.2	16.6	13.7
1^{m}—1^{h}	30.4	39.9	45.8	52.0	48.0	62.6	65.1	62.1	58.3	48.5	41.2	34.9
1—2	21.1	16.6	25.4	18.4	21.0	21.8	17.4	18.9	25.0	24.2	26.4	25.0
2—3	13.7	10.6	10.1	12.8	11.0	9.5	7.2	13.8	8.3	9.1	10.1	16.9
3—4	7.9	11.1	9.5	4.8	4.0	3.1	5.8	3.4	1.4	9.1	5.8	5.0
4—5	5.8	5.6	4.4	5.6	7.0	2.1	1.5	—	1.4	4.1	5.1	4.4
5—6	4.2	6.7	1.3	2.4	2.0	1.0	1.5	1.7	2.8	—	4.3	5.0
6—7	2.1	5.0	0.7	0.8	3.0	—	1.5	—	—	2.0	1.4	1.9
7—8	4.2	2.8	0.7	1.6	2.0	—	—	—	1.4	2.0	1.4	2.5
8—9	2.6	—	—	—	—	—	—	—	1.4	—	1.4	1.9
9—10	2.6	0.6	0.7	1.6	—	—	—	—	—	1.0	—	—
10—11	1.6	—	1.3	—	—	—	—	—	—	—	0.8	1.3
11—12	1.0	0.6	0.7	—	—	—	—	—	—	—	—	—
12—13	1.6	—	—	—	1.0	—	—	—	—	—	—	—
13—14	0.5	0.6	—	—	—	—	—	—	—	—	0.8	—
14—15	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
15—16	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
16—17	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1.4	—
17—18	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0.6
18—19	0.5	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
19—20	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0.6

Gewitter und andere damit verwandte meteorologische Erscheinungen im indischen Archipel« (S.-A. Vierteljahrsschr. d. Naturf. Ges. i. Zürich III) auf Seite 6, daß er »diejenigen Fälle, die keine meßbare Regenmenge erzeugen«, angemerkt habe, und auf Seite 61 teilt er von der schon oben genannten Station Rogodjampi neben der Zahl der Regentage im Jahre 1857 (261) diejenigen Tage mit, an denen das Regenwasser nicht meßbar war (37 im Jahr, 7 im August, je 1 im September und Oktober). Man wird daraus, allerdings mit allem Vorbehalt, schließen dürfen, daß unmeßbare Regen in den Tropen nicht so häufig als in der gemäßigten Zone sind.

Will man die Hauptunterschiede in der Art des Auftretens des Regens in der gemäßigten und in der Tropenzone in einem Satze zusammenfassen, so kann man sagen:

> Die Regen sind in der gemäßigten Zone im allgemeinen häufiger und von längerer Dauer, aber weniger ergiebig als in der Tropenzone.

Tab. 4a. Tägliche Periode der Regendauer in Potsdam (Minuten) (1893—1910).

Stundenintervall	Jan.	Febr.	März	April	Mai	Juni	Juli	Aug.	Sept.	Okt.	Nov.	Dez.
0—1ª	166	161	153	106	107	82	112	90	110	135	185	163
1—2	160	148	152	98	80	76*	114	82	115	118	173	162
2—3	169	159	156	100	79	80	116	88	118	130	184	176
3—4	181	171	168	94	74*	95	113	97	134	135	171	169
4—5	194	196	153	110	102	98	101	101	**137**	123	168	171
5—6	**194**	**200**	161	140	107	105	110	82	118	113	168	166
6—7	164	183	178	125	**128**	**109**	107	99	130	125	164	164
7—8	169	175	161	122	110	99	126	87	124	117	**202**	174
8—9	173	171	152	137	101	93	118	65	128	115	180	177
9—10	165	181	145	**152**	93	87	100	57*	107	115	176	165
10—11	170	180	117	128	120	74	100*	68	84*	104*	165	173
11—12	171	159	124	124	111	64*	103	70	94	107	164	173
12—1ᵖ	148*	151	113	104	107	79	109	75	97	106	172	148*
1—2	151	172	114	110	99	81	119	82	100	118	153	162
2—3	155	167	87*	123	100	85	**142**	88	127	119	134	156
3—4	169	153	126	120	105	76	116	**109**	119	122	132*	158
4—5	159	166	160	106	91*	70	104	85	103	126	149	149
5—6	169	157	159	106	93	87	124	90	93	129	148	158
6—7	166	145*	172	124	107	**102**	111	69	113	**144**	138	176
7—8	171	168	**197**	96	120	80	124	90	121	131	162	163
8—9	177	168	189	105	117	80	130	86	101	131	157	171
9—10	155	183	195	94*	**131**	88	125	89	107	138	175	**184**
10—11	147	146	182	99	122	86	126	76	87	134	171	180
11—12	177	178	162	111	98	80	116	90	104	138	175	165

Tab. 5a. Mittlere Zahl der Regentage in Potsdam nach Stufenwerten der Menge, ausgedrückt in Prozenten aller Regentage.

	Jan.	Febr.	März	April	Mai	Juni	Juli	Aug.	Sept.	Okt.	Nov.	Dez.
0.1—1.0 mm	18.3	28.1	32.3	31.3	38.6	40.2	45.7	38.9	39.7	30.0	33.3	28.4
1.1—5.1	27.6	25.4	29.8	30.5	20.8	29.9	22.9	27.1	23.3	34.0	24.8	30.9
0.1—5.0 mm	89.2	85.2	86.9	89.1	78.6	73.9	72.0	75.9	78.3	87.1	82.7	81.6
5.1—10.0	7.9	11.3	10.0	8.7	8.9	20.7	14.7	13.3	11.6	10.3	11.2	13.7
10.1—15.0	2.3	2.4	2.5	2.2	5.8	3.1	6.0	7.0	6.2	2.6	4.5	4.7
15.1—30.0	0.6	1.1	0.1	—	3.7	2.3	4.0	3.8	3.9	—	1.6	—
31.1—60.0	—	—	—	—	3.0	—	3.3	—	—	—	—	—

Die Ursachen für dieses verschiedene Verhalten sind einerseits die große Zahl der von Regen begleiteten barometrischen Depressionen in der gemäßigten Zone, während sie in den Tropen fast ganz fehlen, andererseits der durch die hohe Temperatur bedingte gleichmäßig große Wasserdampfgehalt und der erheb-

Tab. 4b. Tägliche Periode der Regendauer in Batavia (Minuten) (1879—1913).

Stundenintervall	Jan.	Febr.	März	April	Mai	Juni	Juli	Aug.	Sept.	Okt.	Nov.	Dez.
0—1[a]	167	166	63*	42	42	32	37	19	25	31	45	72
1—2	171	171	78	45	39	31	40	15	24	36	47	80
2—3	196	185	85	41	29	29	41	19	28	29	45	72
3—4	**204**	207	101	41	22	26	35	17	25	30	35	71
4—5	201	**220**	**110**	36	24	23	37	17	16	22	37	83
5—6	193	200	110	33	24	22	30	16	16	19	35	78
6—7	178	172	95	22	34	23	35	13	13	19	32	73
7—8	159	141	87	18	27	23	24	15	14	15	27	56
8—9	98*	104	52*	15	25	12	15	7	13	11	22*	49
9—10	110	91	56	14	22	9*	19	5	11	9*	26	42*
10—11	110	76*	56	13*	15*	12	14*	5*	10*	13	32	49
11—12	113	85	66	31	16	15	19	7	13	31	62	77
12—1[p]	133	84	83	46	29	25	22	12	21	56	80	105
1—2	106	90	92	54	34	26	35	19	25	42	77	106
2—3	105	106	101	59	39	28	36	22	30	45	68	129
3—4	125	111	123	74	48	35	31	17	32	44	101	**159**
4—5	143	128	**146**	94	61	51	30	14	46	59	125	156
5—6	168	**168**	144	103	80	67	42	12	58	67	148	153
6—7	160	166	144	**122**	**100**	**71**	**48**	19	**63**	72	**176**	148
7—8	161	148	132	112	75	68	46	27	52	**73**	157	127
8—9	167	122*	113	89	53	67	37	23	36	59	123	113
9—10	177	139	102	72	60	57	42	**29**	30	52	90	93
10—11	164	151	82	57	60	55	42	26	26	39	69	87
11—12	177	147	73	48	46	46	46	13	22	32	60	73

Tab. 5b. Mittlere Zahl der Regentage in Batavia nach Stufenwerten der Menge, ausgedrückt in Prozenten aller Regentage.

	Jan.	Febr.	März	April	Mai	Juni	Juli	Aug.	Sept.	Okt.	Nov.	Dez.
0.1—1.0 mm	50.0	42.0	48.4	43.5	38.6	43.1	35.3	35.4	31.0	45.7	46.4	45.8
1.1—5.0	39.2	43.2	38.5	45.6	40.0	30.8	36.7	40.5	47.3	41.4	36.3	35.8
0.1—5.0 mm	45.9	53.5	62.1	61.8	59.4	70.1	68.6	66.0	63.0	64.0	58.1	59.3
5.1—10.0	13.5	15.2	12.7	15.6	12.9	10.3	12.9	13.6	10.9	9.0	12.8	11.2
10.1—15.0	11.4	8.7	10.1	7.8	7.9	5.2	5.7	10.2	9.6	7.0	9.9	8.0
15.1—30.0	16.7	12.4	8.2	7.0	6.9	9.3	5.7	5.1	8.2	8.0	12.8	12.3
30.1—60.0	7.3	8.0	5.7	7.0	10.9	4.1	5.7	5.1	5.5	8.0	5.0	5.6
60.1—90.0	5.2	1.6	1.2	0.8	1.0	1.0	1.4	—	2.8	4.0	1.4	0.6
> 90	—	0.6	—	—	1.0	—	—	—	—	—	—	—

liche Anteil der Gewitterregen an der Gesamtregenmenge in der Tropenzone.

Zum Schluß sei noch die bekannte Tatsache in Erinnerung gebracht, daß die Form der Niederschläge in der gemäßigten Zone viel mannigfaltiger als in den Tropen ist, wo neben dem Regen nur noch der Hagel vorkommt.

Anhang.

Einteilung und Namengebung der Regenfälle nach der Art ihres Auftretens.

Als Einteilungsprinzip kommen in Betracht die räumliche Ausdehnung, die Dauer und die Stärke der Regenfälle. Die Namen sind schon in den Sprachen der Kulturvölker vorhanden; es handelt sich nur darum, die Begriffe genauer zu fixieren. Die große Masse des Volkes beachtet nämlich von allen meteorologischen Elementen am meisten den Regen, und es ist daher begreiflich, daß sich für das verschiedene Auftreten des Regens besondere Worte und Ausdrücke herausgebildet haben, deren sich das Volk zwanglos bedient. Sie weisen bei den verschiedenen Nationen von Europa große Ähnlichkeit untereinander auf, wie die nachfolgenden Proben aus Sprachen, die mir einigermaßen geläufig sind, zeigen.

Die modernen Lehrbücher der Meteorologie berücksichtigen diese Nomenklatur fast gar nicht; nur der alte Lampadius (Systematischer Grundriß der Atmosphärologie. Freiberg 1806, 8°, S. 143—145) hat den Versuch einer solchen Einteilung gemacht, die Kastner (Handbuch der Meteorologie. Erlangen 1830, 8°, II S. 561) fast wörtlich übernahm.

Ausdehnung bzw. Verbreitung.

Landregen, ein weit verbreiteter Regen von längerer Dauer und (gewöhnlich) mäßiger Stärke. Er kann natürlich auch auf dem Meere vorkommen, insofern ist die Bezeichnung Landregen etwas irreführend. In der Tat bin ich einmal der ganz mißverständlichen Übersetzung »pluie de terre« begegnet. Die englische und die romanischen Sprachen besitzen kein eigenes Wort für Landregen und umschreiben ihn gewöhnlich mit »allgemeiner Regen« (pluie générale, lluvia jeneral etc.).

Den Gegensatz zum Landregen bildet der

Strichregen, der nur strichweise auftritt; häufig ein Böenregen; vgl. Regenschauer.

Dauer.

Dauerregen, ein lange Zeit andauernder Regen, gewöhnlich ein Landregen.

Regenschauer (Schauer, Regenhusche, Husche), ein rasch kommender und rasch vorübergehender Regen, meist von mäßiger Stärke; tritt häufig als Strichregen auf. *Englisch:* shower, *Französisch:* ondée, giboulée (wenn Schnee oder Graupel dabei sind).

Stärke.

Für starke Regen gibt es in allen Sprachen mannigfache Worte und bildliche Ausdrücke. Im *Deutschen* gebrauchen wir für einen sehr starken Regen von kurzer Dauer die Worte Gußregen, Regenguß, Platzregen, Schlagregen, Pladderregen, Schnürlregen (Oberbayern und Österreich), und für die Tatsache, daß es sehr stark regnet, bedienen wir uns der Ausdrücke: es gießt, es schüttet, es pladdert, es dreescht, es regnet in Strömen, es regnet Bindfaden, es regnet Strippen, es regnet Bauernjungen (Spitzbuben), es gießt wie mit Mulden (Mollen), es gießt wie mit Kannen.

Englisch: downpour, pour; it pours, it rains cats and dogs, it rains pitchforks.

Französisch: averse, pluie torrentielle, pluie battante; il pleut à verse, il pleut à seaux, il pleut des hellebardes.

Italienisch: nembo, scossa, rovescio, pioggia dirotta, pioggia a torrente, pioggia a catinelle; piove a cielo rotto, piove a bocca di barile, piove a secchie, piove a orci.

Spanisch: aguacero, chaparron, turbion, chubasco[1] (mit starkem Wind); llueve a cántaros.

Portugiesisch: aguaceiro, chuvaceiro, chuveiro; chuva (chove) a cantaros, a potes, a beldes.

Ein sehr starker Regen von etwas längerer Dauer mit verwüstenden Wirkungen heißt Wolkenbruch (*engl.* cloudburst, *ital.* nubifragio, acquazzone; in *Chile* temporal, das in Mittelamerika mehr die Bedeutung von Landregen hat.

Schwache Regen heißen im *Deutschen:* Sprühregen, Rieselregen, Nieselregen (Niesel), Spritzregen, Staubregen[2], Nebelregen, Dunstregen (Lampadius); es spritzelt, es nieselt, es drippelt.

Englisch: drizzling rain. *Französisch:* bruine, brouée; il bruine. *Italienisch:* spruzzo, spruzzolo, spruzzata; pioveggenare, pioviscolare, spruzzare, spruzzolare. *Spanisch:* llovizna, garúa (Peru und Chile); lloviznar. *Portugiesisch:* chuvisco, chuvinha; chuviscar, chovisnar.

---

[1] Der chilenische Beobachter auf der am Westausgang der Magellanstraße gelegenen Isla de los Evangelistas notiert sehr häufig chubasco.

[2] Natürlich nicht zu verwechseln mit der bei uns seltenen Erscheinung, daß Staub herabfällt (pluie de poussière, pioggia di polvere etc.).

Ausgegeben am 29. November.

Berlin, gedruckt in der Reichsdruckerei.

1923 XXVIII—XXXIV

SITZUNGSBERICHTE

DER PREUSSISCHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

Physikalisch-mathematische Klasse

MIT TAFEL V

BERLIN 1923

VERLAG DER AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

IN KOMMISSION BEI WALTER DE GRUYTER U. CO.

Aus dem Reglement für die Redaktion der akademischen Druckschriften

Aus § 1.

Die Akademie gibt gemäß § 41, 1 der Statuten zwei fortlaufende Veröffentlichungen heraus: »Sitzungsberichte der Preußischen Akademie der Wissenschaften« und »Abhandlungen der Preußischen Akademie der Wissenschaften«.

Aus § 2.

Jede zur Aufnahme in die Sitzungsberichte oder die Abhandlungen bestimmte Mitteilung muß in einer akademischen Sitzung vorgelegt werden, wobei in der Regel das druckfertige Manuskript zugleich einzuliefern ist. Nichtmitglieder haben hierzu die Vermittelung eines ihrem Fache angehörenden ordentlichen Mitgliedes zu benutzen.

§ 3.

Der Umfang einer aufzunehmenden Mitteilung soll in der Regel in den Sitzungsberichten bei Mitgliedern 32, bei Nichtmitgliedern 8 Seiten in der gewöhnlichen Schrift der Sitzungsberichte, in den Abhandlungen 12 Druckbogen von je 8 Seiten in der gewöhnlichen Schrift der Abhandlungen nicht übersteigen.

Überschreitung dieser Grenzen ist nur mit Zustimmung der Gesamtakademie oder der betreffenden Klasse statthaft und ist bei Vorlage der Mitteilung ausdrücklich zu beantragen. Läßt der Umfang eines Manuskripts vermuten, daß diese Zustimmung erforderlich sein werde, so hat das vorlegende Mitglied es vor dem Einreichen von sachkundiger Seite auf seinen mutmaßlichen Umfang im Druck abschätzen zu lassen.

§ 4.

Sollen einer Mitteilung Abbildungen im Text oder auf besonderen Tafeln beigegeben werden, so sind die Vorlagen dafür (Zeichnungen, photographische Originalaufnahmen usw.) gleichzeitig mit dem Manuskript, jedoch auf getrennten Blättern, einzureichen.

Die Kosten der Herstellung der Vorlagen haben in der Regel die Verfasser zu tragen. Sind diese Kosten aber auf einen erheblichen Betrag zu veranschlagen, so kann die Akademie dazu eine Bewilligung beschließen. Ein darauf gerichteter Antrag ist vor der Herstellung der betreffenden Vorlagen mit dem schriftlichen Kostenanschlage eines Sachverständigen an den vorsitzenden Sekretar zu richten, dann zunächst im Sekretariat vorzuberaten und weiter in der Gesamtakademie zu verhandeln.

Die Kosten der Vervielfältigung übernimmt die Akademie. Über die voraussichtliche Höhe dieser Kosten ist — wenn es sich nicht um wenige einfache Textfiguren handelt — der Kostenanschlag eines Sachverständigen beizufügen. Überschreitet dieser Anschlag für die erforderliche Auflage 200000 M., so ist Vorberatung durch das Sekretariat geboten.

Aus § 5.

Nach der Vorlegung und Einreichung des **vollständigen druckfertigen** Manuskripts an den zuständigen Sekretar oder an den Archivar wird über Aufnahme der Mitteilung in die akademischen Schriften, und zwar, wenn eines der anwesenden Mitglieder es verlangt, verdeckt abgestimmt.

Mitteilungen von Verfassern, welche nicht Mitglieder der Akademie sind, sollen der Regel nach nur in die Sitzungsberichte aufgenommen werden. Beschließt eine Klasse die Aufnahme der Mitteilung eines Nichtmitgliedes in die Abhandlungen, so bedarf dieser Beschluß der Bestätigung durch die Gesamtakademie.

Aus § 6.

Die an die Druckerei abzuliefernden Manuskripte müssen, wenn es sich nicht bloß um glatten Text handelt, ausreichende Anweisungen für die Anordnung des Satzes und die Wahl der Schriften enthalten. Bei Einsendungen Fremder sind diese Anweisungen von dem vorlegenden Mitgliede vor Einreichung des Manuskripts vorzunehmen. Dasselbe hat sich zu vergewissern, daß der Verfasser seine Mitteilung als vollkommen druckreif ansieht.

Die erste Korrektur ihrer Mitteilungen besorgen die Verfasser. Fremde haben diese erste Korrektur an das vorlegende Mitglied einzusenden. Die Korrektur soll nach Möglichkeit nicht über die Berichtigung von Druckfehlern und leichten Schreibversehen hinausgehen. Umfängliche Korrekturen Fremder bedürfen der Genehmigung des redigierenden Sekretars vor der Einsendung an die Druckerei, und die Verfasser sind zur Tragung der entstehenden Mehrkosten verpflichtet. Übersteigen die Kosten der Korrektur einen gewissen Prozentsatz der Satzkosten, so fallen die Mehrkosten den Verfassern selbst ganz oder teilweise zur Last.

Aus § 8.

Von allen in die Sitzungsberichte oder Abhandlungen aufgenommenen wissenschaftlichen Mitteilungen, Reden, Adressen oder Berichten werden für die Verfasser, von wissenschaftlichen Mitteilungen, wenn deren Umfang im Druck 4 Seiten übersteigt, auch für den Buchhandel Sonderabdrucke hergestellt, die alsbald nach Erscheinen ausgegeben werden.

Von Gedächtnisreden werden ebenfalls Sonderabdrucke für den Buchhandel hergestellt, indes nur dann, wenn die Verfasser sich ausdrücklich damit einverstanden erklären.

§ 9.

Von den Sonderabdrucken aus den Sitzungsberichten erhält ein Verfasser, welcher Mitglied der Akademie ist, zu unentgeltlicher Verteilung ohne weiteres 50 Freiexemplare; er ist indes berechtigt, zu gleichem Zwecke auf Kosten der Akademie weitere Exemplare bis zur Zahl von noch 100 und auf seine Kosten noch weitere bis zur Zahl von 200 (im ganzen also 350) abziehen zu lassen, sofern er dies rechtzeitig dem redigierenden Sekretar angezeigt hat; wünscht er auf seine Kosten noch mehr Abdrucke zur Verteilung zu erhalten, so bedarf es dazu der Genehmigung der Gesamtakademie oder der betreffenden Klasse. — Nichtmitglieder erhalten 50 Freiexemplare und dürfen nach rechtzeitiger Anzeige bei dem redigierenden Sekretar weitere 200 Exemplare auf ihre Kosten abziehen lassen.

Von den Sonderabdrucken aus den Abhandlungen erhält ein Verfasser, welcher Mitglied der Akademie ist, zu unentgeltlicher Verteilung ohne weiteres 30 Freiexemplare; er ist indes berechtigt, zu gleichem Zwecke auf Kosten der Akademie weitere Exemplare bis zur Zahl von noch 100 und auf seine Kosten noch weitere bis zur Zahl von 100 (im ganzen also 230) abziehen zu lassen, sofern er dies rechtzeitig dem redigierenden Sekretar angezeigt hat; wünscht er auf seine Kosten noch mehr Abdrucke zur Verteilung zu erhalten, so bedarf es dazu der Genehmigung der Gesamtakademie oder der betreffenden Klasse. — Nichtmitglieder erhalten 30 Freiexemplare und dürfen nach rechtzeitiger Anzeige bei dem redigierenden Sekretar weitere 100 Exemplare auf ihre Kosten abziehen lassen.

(Fortsetzung auf S. 3 des Umschlags.)

SITZUNGSBERICHTE
DER PREUSSISCHEN
AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.
1923

XXVIII. Gesamtsitzung. 8. November.

Vorsitzender Sekretar: Hr. Rubner.

1. Hr. Schmidt sprach über einen Beweis des Satzes, daß ein offener Jordanscher Kurvenbogen die Ebene nicht zerlegt.

Der Beweis wird mit Hilfe der Grundeigenschaften des Charakteristikenbegriffs geführt.

2. Vorgelegt wurde das Werk des Inhabers der goldenen Leibnizmedaille, Hrn. Dr. Heinrich Schnee, über »Weltpolitik vor, in und nach dem Kriege«.

Über den Jordanschen Kurvensatz.

Von Erhard Schmidt.

(Vorgetragen am 14. April 1921 [s. Jahrgang 1921 S. 369].)

Einleitung.

Im folgenden soll ein Beweis des Jordanschen Kurvensatzes gegeben werden, der sich in konsequenter und einheitlicher Weise auf den Begriff der Charakteristik stützt. Die entsprechenden Sätze werden für Polygone nicht vorausgesetzt, sondern für alle Jordanschen Kurven gemeinsam bewiesen.

Im Interesse der Übersichtlichkeit des Aufbaus werden im § 1 die Grundeigenschaften der Charakteristik nebst ihren Beweisen kurz auseinandergesetzt. Im § 2 wird der Satz bewiesen, daß eine geschlossene Jordansche Kurve die Ebene in mindestens zwei Gebiete zerlegt, im § 3 der Satz, daß sie die Ebene in nicht mehr als zwei Gebiete zerlegt, im § 4 endlich der Satz, daß ein offener Jordanscher Kurvenbogen die Ebene nicht zerlegt.

Die Bezeichnungsweise betreffend sei vorausgeschickt, daß im folgenden unter einem Kurvenstück resp. einer geschlossenen Kurve das eindeutige stetige Bild einer Strecke resp. eines Kreises zu verstehen ist. Wird Eineindeutigkeit der Abbildung vorausgesetzt, so sollen die Kurven Jordansche heißen.

Die Charakteristik ist zuerst von Schoenflies[1] zum Beweise des Jordanschen Satzes herangezogen worden. Dann hat Hadamard[2] mit Hilfe der Charakteristik einen schönen Beweis des Satzes gegeben, daß eine geschlossene Jordansche Kurve die Ebene in mindestens zwei Gebiete zerlegt. Mit diesem Beweise stimmt der im § 2 auseinandergesetzte im wesentlichen überein. Es ist selbstverständlich, daß sich auch meine Beweismethoden auf die in den klassischen Arbeiten von Jordan[3] und Brouwer[4] entwickelten Gedanken stützen, wie ich denn überhaupt den nachfolgenden Beweis ohne Anspruch auf Originalität nur wegen der Einheitlichkeit und Durchsichtigkeit, welche mir ihm innezuwohnen scheinen, der Öffentlichkeit übergebe.

Zum Schluß möchte ich Hrn. Dr. Feigl für seine wertvolle Unterstützung bei der Redaktion dieser kleinen Arbeit meinen Dank aussprechen.

[1] A. Schoenflies, Über einen Satz aus der Analysis Situs; Göttinger Nachrichten 1896, S. 79.

[2] J. Tannery, Introduction à la théorie des fonctions d'une variable; t. 2, 2e éd., 1910. Note de J. Hadamard sur quelques applications de l'indice de Kronecker. § 1; n° 3. 4, p. 439. 440.

[3] C. Jordan, Cours d'analyse; 3e éd., t. I, p. 92.

[4] L. E. J. Brouwer, Beweis des Jordanschen Kurvensatzes. Mathematische Annalen Bd. 69, S. 169.

§ 1.

Die Charakteristik.

Es sei ein auf den Parameter t ($\alpha \leqq t \leqq \beta$) eindeutig und stetig bezogenes Kurvenstück gegeben, dessen Endpunkte A und B den Parameterwerten α und β entsprechen mögen. Eineindeutigkeit der Abbildung auf den Parameter wird dabei nicht vorausgesetzt. Es bezeichne ferner T den dem Parameterwert t entsprechenden laufenden Kurvenpunkt und P einen Punkt, der nicht auf der Kurve liegt.

Legt man in der Ebene einen positiven Drehungssinn fest, so ist $\measuredangle APB$ zunächst nur bis auf Vielfache von 2π bestimmt. Es handelt sich nun darum, diese Vielfachen so festzulegen, daß der Winkel eine stetige Funktion von T wird, die im Anfangspunkte A verschwindet. Eine solche Winkelfunktion soll mit $\phi(A, P, T)$ bezeichnet werden.

Zunächst ist klar, daß die Definition einer derartigen Winkelfunktion $\phi(A, P, T)$ auf nicht mehr als eine Weise möglich ist. Denn die Differenz zweier solcher Funktionen wäre eine stetige Funktion, die als Werte nur ganze Vielfache von 2π annehmen kann; sie müßte also konstant und, da sie im Anfangspunkt A verschwindet, identisch Null sein.

Es bezeichne nun A_1 einen Kurvenpunkt zwischen A und B und A_2 einen Kurvenpunkt zwischen A_1 und B. Läßt sich dann die Funktion $\phi(A, P, T)$ für das Intervall von A bis A_1 (einschließlich A_1) und eine ebensolche Funktion $\phi(A_1, P, T)$ für das Intervall A_1 bis A_2 (einschließlich A_2) definieren, so läßt sich das Definitionsgebiet von $\phi(A, P, T)$ bis A_2 einschließlich fortsetzen, indem man für das Intervall von A_1 bis A_2 setzt

$$\phi(A, P, T) = \phi(A, P, A_1) + \phi(A_1, P, T).$$

Wenn man also die Kurve AB durch endlich viele Teilpunkte A_ν so zerlegen kann, daß für jeden Teilbogen $A_\nu A_{\nu+1}$ die Winkelfunktion $\phi(A_\nu, P, T)$ definiert ist, so ist damit die Winkelfunktion $\phi(A, P, T)$ auch für die ganze Kurve definiert.

Um eine derartige Einteilung der Kurve zu bewirken, verfahre man folgendermaßen:

Es sei d die Minimalentfernung des Punktes P von der Kurve und $d' < d$. Man wähle die Teilpunkte A_ν so nahe beieinander, daß jedes Kurvenintervall $A_\nu A_{\nu+1}$ ganz in das Innere eines mit dem Radius d' um A_ν beschriebenen Kreises fällt. Wegen der gleichmäßigen Stetigkeit der Beziehung der Kurve auf den Parameter ist die Ausführbarkeit dieser Einteilung gesichert.

Da nun jeder Punkt T des Intervalls $A_\nu A_{\nu+1}$ im Innern und P im Äußern des um A_ν beschriebenen Kreises liegt, so bilden die Halbstrahlen PA_ν und PT einen spitzen Winkel. Durch diesen spitzen, ohne Hinzufügung eines ganzzahligen Vielfachen von 2π zu nehmenden Winkel, dessen Vorzeichen durch den in der Ebene festgelegten Drehungssinn bestimmt ist, definiere man die Winkelfunktion $\phi(A_\nu, P, T)$.

Damit ist, wie oben gezeigt, auch die Aufgabe, $\phi(A, P, T)$ zu bestimmen, durchgeführt.

Es soll nun das Verhalten der Winkelfunktion $\phi\,(A, P, T)$ bei variablem P untersucht werden.

In einer hinreichend kleinen Umgebung der Ausgangslage des Punktes P und bei festgehaltenen A_ν bleibt die obige Regel zur Bestimmung der Funktionen $\phi\,(A_\nu, P, T)$ anwendbar, die sich dabei als stetige Funktionen von P ergeben. Mithin ist die durch Zusammensetzung gewonnene Funktion $\phi\,(A, P, T)$ in jedem nicht auf dem Kurvenstück gelegenen Punkte P stetig.

Läßt man insbesondere T mit B zusammenfallen, so ergibt sich der Winkel $\phi\,(A, P, B)$ als eine in jedem nicht auf der Kurve gelegenen Punkte P wohldefinierte stetige Funktion von P. Im Unendlichen hat sie den Grenzwert Null.

Fällt B mit A zusammen, so ist die Kurve geschlossen, d. h. sie läßt sich eindeutig und stetig auf eine Kreisperipherie beziehen, wobei nochmals darauf hingewiesen werde, daß die Eineindeutigkeit dieser Abbildung nicht vorausgesetzt wird. Der Winkel $\phi\,(A, P, B)$ wird dann als die *Charakteristik* des Punktes P in bezug auf die geschlossene Kurve bezeichnet. Um diese Bezeichnung zu rechtfertigen, ist zunächst zu zeigen, daß die Charakteristik von der Lage des Anfangspunktes A der Durchlaufung unabhängig ist. Durchläuft man die Kurve in derselben Weise vom Punkte A' aus, so wird die Charakteristik gleich $\phi\,(A', P, B')$, wo B' mit A' zusammenfällt. Nun ist

$$\phi\,(A, P, B) = \phi\,(A, P, A') + \phi\,(A', P, B)$$
$$\phi\,(A', P, B') = \phi\,(A', P, B) + \phi\,(B, P, B').$$

Da das Kurvenstück AA' mit dem Kurvenstück BB' identisch ist, so folgt

$$\phi\,(A, P, A') = \phi\,(B, P, B')$$

und mithin

$$\phi\,(A, P, B) = \phi\,(A', P, B'),$$

w. z. b. w.

Um die Hauptsätze über die Charakteristik in der üblichen Weise formulieren zu können, sei an folgende Bezeichnungen erinnert.

Von zwei nicht auf einer endlichen Kurve $\mathfrak{C}$ gelegenen Punkten P und Q sagt man: sie sind in bezug auf $\mathfrak{C}$ verbindbar, wenn ein Weg von P nach Q führt, der $\mathfrak{C}$ nicht trifft. Andernfalls heißen die Punkte durch $\mathfrak{C}$ getrennt. Unter einem Weg ist dabei zunächst ein stetiges Kurvenstück mit den Endpunkten P und Q zu verstehen. Jedoch kann man sich ohne weiteres auf Polygonzüge mit endlich vielen Ecken beschränken. Denn ein von P nach Q führendes Kurvenstück, das $\mathfrak{C}$ nicht trifft, hat eine endliche Minimalentfernung von $\mathfrak{C}$. Mithin läßt sich in das Kurvenstück ein Polygonzug mit endlich vielen Ecken einschreiben, welcher dem Kurvenstück so nahe bleibt, daß auch er noch $\mathfrak{C}$ vermeidet. Unter einem durch $\mathfrak{C}$ definierten *Gebiet* versteht man die Gesamtheit von Punkten, welche mit einem Punkte verbindbar sind. Da zwei Punkte, welche mit einem dritten verbindbar sind, sich über diesen auch miteinander verbinden lassen, so sind je zwei Punkte eines Gebietes miteinander verbindbar.

Nunmehr lassen sich die aus der oben begründeten Definition unmittelbar hervorgehenden Grundeigenschaften der Charakteristik in folgenden Sätzen aussprechen:

I. *Die Charakteristik eines Punktes in bezug auf eine geschlossene Kurve ist ein ganzes Vielfaches von* 2π. *Sie wechselt ihr Vorzeichen bei Umkehrung des Durchlaufungssinns der Kurve.*

II. *Die Charakteristik hat in allen Punkten ein und desselben Gebietes denselben Wert.*

Denn sie ist auf jedem die geschlossene Kurve nicht treffenden Wege stetig und mithin als ganzes Vielfaches von 2π konstant.

III. *In dem das Unendliche enthaltenden Gebiete ist die Charakteristik gleich Null.*

Denn sie ist in diesem Gebiete eine Konstante und hat den Grenzwert Null, wenn der Punkt ins Unendliche rückt.

IV. *Die Charakteristik eines Punktes P ist Null, wenn P und die geschlossene Kurve in bezug auf eine Gerade in verschiedenen Halbebenen liegen.*

Zusatz: Der Satz IV bleibt bestehen, wenn die geschlossene Kurve teilweise in die Gerade hineinfällt.

V. Die geschlossene Kurve $\mathfrak{C}$ werde durch die beiden auf ihr gelegenen Punkte M und N in die beiden Teilkurven von $\mathfrak{C}_1$ und $\mathfrak{C}_2$ zerlegt. $\mathfrak{C}_1$ führe bei der festgelegten Durchlaufungsweise von M nach N und $\mathfrak{C}_2$ von N nach M. Man ziehe nun eine Kurve $\mathfrak{B}$ von M nach N. *Dann ist die Charakteristik von P in bezug auf $\mathfrak{C}$ gleich der Summe der Charakteristiken von P in bezug auf die beiden geschlossenen Umläufe, von denen der eine längs $\mathfrak{C}_1$ von M nach N und längs $\mathfrak{B}$ zurück von N nach M führt, während der andere längs $\mathfrak{B}$ von M nach N und längs $\mathfrak{C}_2$ zurück von N nach M führt.*

§ 2.

Beweis des Satzes, daß eine geschlossene Jordansche Kurve die Ebene in mindestens zwei Gebiete zerlegt[1].

Es bezeichne $\mathfrak{C}$ eine geschlossene Jordansche Kurve, d. h. das eineindeutige stetige Bild eines Kreises.

Gemäß Satz III § 1 gibt es Punkte, deren Charakteristik in bezug auf $\mathfrak{C}$ Null ist. Gemäß Satz II gehören Punkte mit verschiedener Charakteristik verschiedenen Gebieten an. Der Beweis des Satzes, daß die geschlossene Jordansche Kurve $\mathfrak{C}$ die Ebene in mindestens zwei Gebiete zerlegt, ist also geführt, wenn die Konstruktion eines Punktes mit von Null verschiedener Charakteristik angegeben wird.

Man ziehe eine die Kurve nicht schneidende Gerade d und wähle jenseits d einen Punkt S (siehe Fig. 1). Dann ziehe man von S aus zwei nicht zusammenfallende, die Kurve noch treffende Halbstrahlen a und b. Ihre ersten Schnittpunkte mit der Kurve mögen mit A und B bezeichnet werden. Setzt man nun auf der Kurve einen bestimmten Umlaufssinn fest, so zerfällt sie in den Bogen $\mathfrak{C}_1$, der von A nach B führt, und in den Bogen $\mathfrak{C}_2$, der von B nach A führt.

Man bezeichne bei diesem Umlaufssinn mit $U(P)$ die Charakteristik eines willkürlichen Punktes P in bezug auf $\mathfrak{C}$. Ferner bezeichne man mit $U_1(P)$ die Charakteristik von P in bezug auf den geschlossenen Kurvenzug, der aus dem Bogen $\mathfrak{C}_1$ von A nach B und den Geradenstücken BS und SA besteht.

---

[1] J. Hadamard, l. c.

Fig. 1.

Dementsprechend bezeichne man mit $U_2(P)$ die Charakteristik von P in bezug auf den geschlossenen Kurvenzug, der aus dem Bogen $\mathfrak{C}_2$ von B nach A und den Geradenstücken AS und SB besteht.

Dann ist zunächst, wenn P weder auf $\mathfrak{C}$ noch auf einer der beiden Strecken SA und SB liegt, gemäß Satz V § 1

$$U(P) = U_1(P) + U_2(P). \qquad (1)$$

Läßt man einen Punkt den Bogen $\mathfrak{C}_2$ durchlaufen, so durchsetzt er nicht den U_1 bestimmenden geschlossenen Kurvenzug. Die Charakteristik U_1 ist mithin gemäß Satz II § 1 für alle inneren Punkte des Bogens $\mathfrak{C}_2$ die gleiche. Ebenso ist die Charakteristik U_2 für alle inneren Punkte des Bogens $\mathfrak{C}_1$ die gleiche. Wir bezeichnen diese beiden Charakteristiken mit $U_1(\mathfrak{C}_2)$ und $U_2(\mathfrak{C}_1)$ und wollen jetzt zeigen, daß die eine von ihnen gleich Null und die andere von Null verschieden ist.

Es seien A_1 und B_1 die Schnittpunkte der Halbstrahlen a und b mit der Geraden d. Man ziehe von S aus einen Halbstrahl f, der die Gerade d zwischen A_1 und B_1 schneidet.

Bezeichnet nun F einen Punkt auf f, der zwischen S und dem Schnittpunkt von f mit d liegt, so ist $U_1(F)$ gemäß Satz V § 1 gleich der Summe der Charakteristiken von F in bezug auf das Dreieck A_1B_1S und in bezug auf den geschlossenen Kurvenzug, der aus dem Bogen $\mathfrak{C}_1$ von A nach B und dem Geradenzug BB_1A_1A besteht. Die erste dieser beiden Charakteristiken ist gleich $\pm 2\pi$[1]. Die letztere ist nach dem Zusatz zu Satz IV § 1 gleich Null. Also ist

$$U_1(F) = \pm 2\pi. \qquad (2)$$

[1] Daß die Charakteristik des Dreiecks A_1B_1S in bezug auf den Punkt F gleich $\pm 2\pi$ ist, kann aus der Elementargeometrie vorausgesetzt werden, ist aber auch leicht etwa folgendermaßen zu beweisen:

Die in § 1 eingeführte stetige Winkelfunktion $\phi(A_1, F, T)$ nimmt, wenn T das Dreieck im Sinne $A_1B_1SA_1$ durchläuft, in B_1 einen von Null verschiedenen Wert an. Ist dieser etwa positiv, so hat man, wenn D den zwischen A_1 und B_1 gelegenen Schnittpunkt von f mit d bezeichnet,

$$0 < \phi(A_1, F, D) < \phi(A_1, F, B_1) < \pi.$$

Wäre nun die Charakteristik ≤ 0, d. h. würde die Funktion $\phi(A_1, F, T)$ bei der Rückkehr des laufenden Punktes T nach A_1 einen Wert ≤ 0 annehmen, so müßte es auf dem Wege B_1SA_1 mindestens einen Punkt T' geben, für welchen

$$\phi(A_1, F, T') = \phi(A_1, F, D)$$

Ebenso ergibt sich

$$U_2(F) = \mp 2\pi. \tag{3}$$

Läßt man nun einen Punkt auf dem Halbstrahl f ins Unendliche rücken, so verschwinden für ihn gemäß Satz III § 1 die beiden Charakteristiken U_1 und U_2. Aus (2) und (3) folgt daher, daß der Halbstrahl f die beiden U_1 und U_2 bestimmenden geschlossenen Kurvenzüge schneidet. Also schneidet f die beiden Bogen $\mathfrak{C}_1$ und $\mathfrak{C}_2$. Es sei etwa $\mathfrak{C}_1$ der erste der beiden Bogen, der von f getroffen wird, und F_1 der erste Schnittpunkt von f mit $\mathfrak{C}_1$. Dann trifft das Geradenstück FF_1 den die Charakteristik U_2 bestimmenden geschlossenen Kurvenzug nicht. Es ist daher gemäß Satz II § 1 $U_2(F_1) = U_2(F)$ und wegen (3) $U_2(F_1) = \mp 2\pi$. Da F_1 auf $\mathfrak{C}_1$ liegt, so ist mithin

$$U_2(\mathfrak{C}_1) = \mp 2\pi. \tag{4}$$

Ist insbesondere F_1' der letzte Schnittpunkt von f mit $\mathfrak{C}_1$, so liefert (4)

$$U_2(F_1') = \mp 2\pi. \tag{5}$$

Da die Charakteristik U_2 im Punkte F_1' gemäß der letzten Gleichung von Null verschieden und im Unendlichen gleich Null ist, so schneidet f gemäß Satz II § 1 den U_2 bestimmenden geschlossenen Kurvenzug und mithin den Bogen $\mathfrak{C}_2$ noch in mindestens einem Punkte hinter F_1'. Der erste dieser hinter F_1' gelegenen Schnittpunkte von f mit $\mathfrak{C}_2$ sei F_2. Da F_1' der letzte Schnittpunkt des Halbstrahls f mit $\mathfrak{C}_1$ und mithin auch mit dem U_1 bestimmenden Kurvenzug ist, so bleibt gemäß Satz II § 1 die Charakteristik U_1 auf dem Halbstrahl f hinter dem Punkte F_1' konstant, und zwar, da sie im Unendlichen verschwindet, gleich Null. Bezeichnet also F' einen Punkt von f zwischen F_1' und F_2, so ist insbesondere

$$U_1(F') = 0, \quad (6) \qquad U_1(F_2) = 0. \quad (7)$$

Da F_2 auf $\mathfrak{C}_2$ liegt, so folgt aus der letzten Gleichung

$$U_1(\mathfrak{C}_2) = 0. \tag{8}$$

Da ferner das Geradenstück $F_1'F'$ den Bogen $\mathfrak{C}_2$ und mithin auch den U_2 bestimmenden geschlossenen Kurvenzug nicht schneidet, so ist gemäß Satz II § 1

$$U_2(F') = U_2(F_1')$$

und folglich wegen (5)

$$U_2(F') = \mp 2\pi. \tag{9}$$

---

wird. Wäre aber die Charakteristik $\geqq 4\pi$, so müßte es auf demselben Wege mindestens einen Punkt T' geben, für welchen

$$\phi(A_1, F, T') = \phi(A_1, F, D) + 2\pi$$

wird. In beiden Fällen müßte der von F nach D gerichtete Halbstrahl das Dreieck noch in mindestens einem zweiten von D verschiedenen Punkte T' schneiden, was unmöglich ist. Also ist die Charakteristik gleich 2π. Ebenso folgt, daß bei negativem $\phi(A_1, F, B_1)$ die Charakteristik gleich -2π wird.

Aus (1), (6), (9) ergibt sich

$$U(F') = \mp 2\pi. \tag{10}$$

Damit ist die Konstruktion eines Punktes mit von Null verschiedener Charakteristik durchgeführt und gemäß der am Eingang dieses Paragraphen gemachten Bemerkung der zu führende Beweis erbracht.

§ 3.

Beweis des Satzes, daß eine geschlossene Jordansche Kurve die Ebene in nicht mehr als zwei Gebiete zerlegt.

Es sei folgender Satz vorausgeschickt, dessen Beweis im nächsten Paragraphen nachgeholt wird.

Durch ein offenes Jordansches Kurvenstück wird die Ebene nicht zerlegt.

Wir halten die Bezeichnungen des vorigen Paragraphen fest. Dann gilt

I. Es sei P ein Punkt, für welchen

$$U(P) = 0 \tag{11}$$

ist. Dann läßt sich P mit S durch einen $\mathfrak{C}$ nicht schneidenden Weg verbinden.

Beweis. Wir können annehmen, daß P nicht auf einem der Geradenstücke SA und SB liegt. Dann ist wegen (1) und (11)

$$U_1(P) + U_2(P) = U(P) = 0. \tag{12}$$

Diese Gleichung in Verbindung mit den Gleichungen (4) und (8) zeigt, daß mindestens eine der beiden folgenden Ungleichungen bestehen muß:

$$U_1(P) \neq U_1(\mathfrak{C}_2), \quad (13) \qquad U_2(P) \neq U_2(\mathfrak{C}_1). \quad (14)$$

Es bestehe etwa die Ungleichung (13).

Man lege auf Grund des am Eingang dieses Paragraphen angeführten Hilfssatzes einen $\mathfrak{C}_1$ nicht treffenden Weg von P nach S. Der erste Schnittpunkt dieses Weges mit dem Streckenpaar ASB sei P_1. Das Stück PP_1 des Weges hat dann mit dem die Charakteristik U_1 bestimmenden geschlossenen Kurvenzug nur den Punkt P_1 gemein. Die Charakteristik U_1 bleibt daher auf dem Wege von P bis P_1 konstant und wegen (13) von $U_1(\mathfrak{C}_2)$ verschieden. Also kann der Weg PP_1 den Bogen $\mathfrak{C}_2$ nicht treffen. Da er gemäß Voraussetzung auch $\mathfrak{C}_1$ nicht trifft, so sind P und P_1 und mithin auch P und S durch einen die ganze Kurve $\mathfrak{C}$ nicht treffenden Weg verbunden, w. z. b. w.

II. Es seien nun P' und S' zwei Punkte, für welche die Ungleichungen gelten:

$$U(P') \neq 0, \quad (15) \qquad U(S') \neq 0. \quad (16)$$

Dann lassen sich P' und S' durch einen $\mathfrak{C}$ nicht treffenden Weg verbinden.

Beweis: Man ziehe von S' aus zwei Halbstrahlen a' und b'. Da die Charakteristik U in S' gemäß Voraussetzung von Null verschieden und im Unendlichen gleich Null ist, so muß jeder der beiden Halbstrahlen die Kurve $\mathfrak{C}$ schneiden. Ihre ersten Schnittpunkte mit $\mathfrak{C}$ seien A' und B'. Dann zerfällt $\mathfrak{C}$ in den Bogen $\mathfrak{C}'_1$, der bei dem festgelegten Umlaufssinn von A' nach B' führt, und in den Bogen $\mathfrak{C}'_2$, der von B' nach A' führt.

Mit $U'_1(Q)$ bezeichnen wir die Charakteristik eines willkürlichen Punktes Q in bezug auf den geschlossenen Kurvenzug, der aus dem Bogen $\mathfrak{C}'_1$ und dem Streckenpaar $B'S'A'$ besteht. Dementsprechend bezeichnen wir mit $U'_2(Q)$ die Charakteristik von Q in bezug auf den geschlossenen Kurvenzug $\mathfrak{C}'_2 A'S'B'$. Dann ist zunächst, wenn Q weder auf $\mathfrak{C}$ noch auf einer der Strecken $S'A'$ und $S'B'$ liegt, gemäß Satz V § 1

$$U(Q) = U'_1(Q) + U'_2(Q). \tag{17}$$

Wie im vorigen Paragraphen folgt aus Satz II § 1 unmittelbar, daß die Charakteristik U'_1 längs $\mathfrak{C}'_2$ konstant bleibt, ebenso die Charakteristik U'_2 längs $\mathfrak{C}'_1$. Die betreffenden Werte dieser Charakteristiken bezeichnen wir mit $U'_1(\mathfrak{C}'_2)$ und $U'_2(\mathfrak{C}'_1)$. Nun ist, wie wir, um hier den Gedankengang nicht zu unterbrechen, am Schluß des Paragraphen beweisen wollen,

$$U'_1(\mathfrak{C}'_2) = 0, \quad (18) \qquad U'_2(\mathfrak{C}'_1) = 0. \quad (19)$$

Aus (15) (17) folgt $U'_1(P') + U'_2(P') = U(P') \neq 0$.

Mithin muß gemäß (18) (19) mindestens eine der beiden nachfolgenden Ungleichungen bestehen:

$$U'_1(P') \neq U'_1(\mathfrak{C}'_2), \quad (20) \qquad U'_2(P') \neq U'_2(\mathfrak{C}'_1). \quad (21)$$

Es bestehe etwa die Ungleichung (20).

Von hier ab verläuft der Beweis genau wie der des Satzes I.

Zunächst führe man auf Grund des am Eingang dieses Paragraphen angeführten Hilfssatzes einen $\mathfrak{C}'_1$ nicht treffenden Weg von P' nach S', dessen erster Schnittpunkt mit dem Streckenpaar $A'S'B'$ der Punkt P'_1 sei. Das Stück $P'P'_1$ des Weges hat dann mit dem die Charakteristik U'_1 bestimmenden geschlossenen Kurvenzug nur den Punkt P'_1 gemein. Die Charakteristik U'_1 bleibt daher auf dem Wege von P' bis P'_1 konstant und wegen (20) von $U'_1(\mathfrak{C}'_2)$ verschieden. Also kann der Weg $P'P'_1$ den Bogen $\mathfrak{C}'_2$ nicht treffen. Da er gemäß Voraussetzung auch $\mathfrak{C}'_1$ nicht trifft, so sind P' und P'_1 und mithin auch P' und S' durch einen die Kurve $\mathfrak{C}$ nicht scheidenden Weg verbunden, w. z. b. w.

Jetzt haben wir noch den Beweis der Gleichungen (18) und (19) nachzuholen.

Es sei S ein Punkt, für welchen

$$U(S) = 0, \quad (21) \qquad U'_1(S) = 0, \quad (22) \qquad U'_2(S) = 0 \quad (23)$$

ist. Die Existenz eines solchen ist durch jeden der Sätze III und IV § 1 gesichert. Man führe nun auf Grund des am Eingang dieses Paragraphen angeführten Hilfssatzes einen $\mathfrak{C}'_1$ nicht treffenden Weg von S nach S'. Da die Charakteristik U gemäß (16) (21) in S und S' verschiedene Werte hat, so muß dieser Weg die Kurve $\mathfrak{C}$ und mithin $\mathfrak{C}'_2$ treffen. Der erste Schnittpunkt mit $\mathfrak{C}'_2$ sei C_2. Die Charakteristik U bleibt dann auf dem Wege SC_2, der mit $\mathfrak{C}$ nur den Punkt C_2 gemein hat, bis C_2 konstant, und zwar wegen (21) gleich Null. Andererseits bleibt die Charakteristik U längs den von S' ausgehenden Halbstrahlen a' und b' bis zu den Punkten A' und B' ebenfalls konstant, und zwar wegen (16) von Null verschieden. Also hat der Weg SC_2 mit keiner der beiden Strecken $S'A'$ und $S'B'$ einen Punkt gemein und trifft mithin

den U'_1 bestimmenden geschlossenen Kurvenzug $\mathfrak{C}'_1 B' S' A'$ nicht. Folglich ist bei Berücksichtigung von (22)

$$U'_1(C_2) = U'_1(S) = 0 .$$

Da C_2 auf $\mathfrak{C}'_2$ liegt, so ergibt sich hieraus die zu beweisende Gleichung (18). Ebenso beweist man die Gleichung (19).

Die Sätze I und II dieses Paragraphen zeigen, daß die Ebene durch $\mathfrak{C}$ in nicht mehr als zwei Gebiete zerlegt wird.

Vereinigen wir dies Ergebnis mit dem Resultat des vorigen Paragraphen und berücksichtigen wir den Satz III § 1 und die Gleichung (10), so läßt sich zusammenfassen:

Eine geschlossene Jordansche Kurve zerlegt die Ebene in zwei und nur zwei Gebiete. In demjenigen dieser beiden Gebiete, welches das Unendliche enthält, dem sogenannten Äußern der Kurve, ist die Charakteristik gleich Null; in dem anderen, dem Innern, gleich $\pm 2\pi$.

§ 4.

Beweis des Satzes, daß ein offenes Jordansches Kurvenstück die Ebene nicht zerlegt.

Es sei $\mathfrak{C}$ eine offene Jordan-Kurve mit den Endpunkten A und B. Es seien C ein Kurvenpunkt zwischen A und B und P und Q zwei nicht auf der Kurve gelegene Punkte. Dann gilt:

I. Werden die Punkte P und Q durch den Teilbogen AC nicht getrennt und bedeutet D einen beliebigen Kurvenpunkt in einer gewissen Umgebung von C, so werden P und Q auch durch den Bogen AD nicht getrennt.

Lassen sich nämlich P und Q durch einen Weg verbinden, der den Teilbogen AC nicht trifft, so läßt sich dieser längs der Kurve $\mathfrak{C}$ noch um ein gewisses Stück verlängern, ohne den Weg zu treffen.

Zu diesem selbstverständlichen Satz beweisen wir nun das Korollar:

II. Werden zwei gegebene Punkte P und Q durch keinen Teilbogen AG getrennt, wo G einen beliebigen Kurvenpunkt zwischen A und C bedeutet, so werden sie auch durch den Bogen AC nicht getrennt.

Beweis (siehe Fig. 2).

Man beschreibe um C als Mittelpunkt einen Kreis $\mathfrak{K}'$, welcher die Punkte A, P, Q in seinem Äußern läßt. Man durchlaufe die Kurve AC von A bis zu ihrem letzten Schnittpunkt mit $\mathfrak{K}'$. Der so durchlaufene Teilbogen hat eine von Null verschiedene Minimalentfernung von C. Man kann also um C einen zweiten konzentrischen Kreis $\mathfrak{K}$ beschreiben, dessen Radius kleiner als diese Minimalentfernung ist. Dann liegt der letzte Schnittpunkt der Kurve AC mit $\mathfrak{K}'$ vor dem ersten mit $\mathfrak{K}$.

III. Es ist also dadurch erreicht, daß kein Schnittpunkt der Kurve AC mit dem Kreise $\mathfrak{K}$ zwischen zwei Schnittpunkten mit dem Kreise $\mathfrak{K}'$ liegt.

Es sei λ ein Bogen von $\mathfrak{K}$, der bei Durchlaufung des Kreises in positivem Sinn den Anfangspunkt F_1 und den Endpunkt F_2 hat. λ soll als »*freier Kreisbogen*« bezeichnet werden, wenn F_1 und F_2 der Kurve AC angehören, aber

Fig. 2.

kein weiterer Punkt von λ. Ist λ ein freier Kreisbogen, so bezeichne man mit U_λ den geschlossenen Kurvenzug, der von F_1 über λ nach F_2 und von F_2 längs der Kurve zurück nach F_1 führt. Mit $\bar{\lambda}$ bezeichne man den Komplementärbogen von λ und mit $U_{\bar{\lambda}}$ den geschlossenen Kurvenzug, der von F_2 über $\bar{\lambda}$ nach F_1 und von F_1 längs der Kurve zurück nach F_2 führt. Dabei kann natürlich der Kurvenbogen $F_1 F_2$ den Kreisbogen λ unendlich oft schneiden.

Es mögen nun $\mathfrak{K}(X)$, $U_\lambda(X)$, $U_{\bar{\lambda}}(X)$ die Charakteristiken des willkürlichen Punktes X in bezug auf den im positiven Sinn durchlaufenen Kreis $\mathfrak{K}$ und die obigen geschlossenen Kurvenzüge bezeichnen. Dann ist zunächst, wenn X weder auf dem Kreise noch auf dem Kurvenbogen $F_1 F_2$ liegt, wegen Satz V § 1

$$\mathfrak{K}(X) = U_\lambda(X) + U_{\bar{\lambda}}(X) \quad (24), \qquad U_\lambda(X) = \mathfrak{K}(X) - U_{\bar{\lambda}}(X) \quad (25).$$

Wegen Satz III des gegenwärtigen Paragraphen liegt ferner der ganze geschlossene Kurvenzug U_λ innerhalb des Kreis $\mathfrak{K}'$. Da P und Q außerhalb dieses Kreises liegen, so folgt hieraus gemäß Satz III § 1

$$U_\lambda(P) = 0 \quad (26), \qquad U_\lambda(Q) = 0 \quad (27).$$

Es sei nun G der letzte Schnittpunkt der Kurve AC mit dem Kreise $\mathfrak{K}$. Gemäß Voraussetzung läßt sich dann ein Weg von P nach Q führen, der den Bogen AG nicht trifft. Wie im § 1 ausgeführt, kann man diesem Wege die Gestalt eines Polygonzuges mit endlich vielen Ecken geben. Seine Schnittpunkte mit dem Kreise $\mathfrak{K}$ zerfallen in drei Klassen: *Eintrittspunkte*, d. h. solche, bei welchen der von P nach Q durchlaufene Polygonzug aus dem Äußern des Kreises in das Innere führt, *Austrittspunkte*, bei welchen er aus dem Innern in das Äußere führt, und *Berührungspunkte*, bei welchen ein Gebietswechsel nicht stattfindet. Die Anzahl aller dieser Punkte ist endlich.

Wir wollen nun ein Verfahren angeben, um die Anzahl der Eintrittspunkte, solange sie von Null verschieden ist, um mindestens einen herabzusetzen.

Es sei E der erste Eintrittspunkt. E liegt dann auf einem freien Kreisbogen λ mit dem Anfangspunkte F_1 und dem Endpunkte F_2. Dabei schließen wir zunächst den trivialen Fall aus, daß F_1 und F_2 zusammenfallen, was bedeuten würde, daß die Kurve AC mit dem Kreise $\mathfrak{K}$ nur einen einzigen Punkt gemein hat. Dann verläuft das von P bis E gehende Stück des Polygonzuges ganz außerhalb von $\mathfrak{K}$, kann also mit dem freien Kreisbogen λ höchstens Berührungspunkte gemein haben. Beim Durchgang durch einen solchen bleiben aber die Charakteristiken $\mathfrak{K}(X)$ und $U_{\bar{\lambda}}(X)$ — letztere wegen Satz II § 1 — unverändert und mithin wegen (25) auch $U_{\lambda}(X)$. Bis zum Punkte E bleibt also die Charakteristik $U_{\lambda}(X)$ auf dem Polygonzuge PE konstant, und zwar wegen (26) gleich Null. Im Punkte E springt $\mathfrak{K}(X)$ um $+2\pi$, während $U_{\bar{\lambda}}(X)$ unverändert bleibt. Also nimmt wegen (25) $U_{\lambda}(X)$ nach dem Durchgang durch E den Wert 2π an. Wegen (27) müssen daher auf dem Polygonzuge EQ noch weitere Schnittpunkte mit λ liegen, und zwar, da, wie eben gezeigt, in einem auf λ gelegenen Eintrittspunkte die Charakteristik U_{λ} um $+2\pi$ springt, während sie in einem Berührungspunkte unverändert bleibt, auch Austrittspunkte. E' sei der letzte dieser Austrittspunkte. Das zwischen E und E' liegende Stück des freien Kreisbogens λ hat mit der Kurve AC keinen Punkt gemein und mithin eine von Null verschiedene Minimalentfernung von derselben. Man kann daher das zwischen E und E' liegende Stück von λ durch einen außerhalb des Kreises $\mathfrak{K}$ von E nach E' führenden Polygonzug mit endlich vielen Ecken so approximieren, daß dieser die Kurve AC ebenfalls vermeidet. Durch diesen ersetze man jetzt das zwischen E und E' liegende Stück des ursprünglichen polygonalen Weges von P nach Q. Dadurch erhält man einen neuen polygonalen Weg von P nach Q, der ebenfalls den Kurvenbogen AG nicht trifft und mindestens einen Eintrittspunkt weniger aufweist.

Durch Wiederholung dieses Verfahrens erhält man einen von P nach Q führenden polygonalen Weg, der den Kurvenbogen AG nicht trifft und keinen einzigen Eintrittspunkt aufweist. Dieser Weg kann mithin keinen im Innern des Kreises $\mathfrak{K}$ gelegenen Punkt enthalten und umgeht daher auch den im Innern des Kreises verlaufenden Kurvenbogen GC. Somit vermeidet dieser Weg die ganze Kurve AC, was zu beweisen war.

Wir haben bei diesem Beweise den trivialen Fall ausgeschlossen, daß der Kreis $\mathfrak{K}$ mit der Kurve AC nur einen einzigen Punkt G gemein hat. Es seien in diesem Falle P' der erste und Q' der letzte Schnittpunkt des den Bogen AG nicht treffenden Weges von P nach Q mit dem Kreise $\mathfrak{K}$. Dann liegen die Wegstücke PP' und $Q'Q$ ganz außerhalb des Kreises $\mathfrak{K}$, während der Kurvenbogen GC ganz in seinem Innern liegt. Die Wegstücke PP' und $Q'Q$ vermeiden daher auch das Kurvenende GC und haben mithin mit der Kurve AC keinen Punkt gemein. Ersetzt man nun das von P' nach Q' führende Wegstück durch denjenigen Bogen des Kreises $\mathfrak{K}$ mit den Endpunkten P' und Q', der den Punkt G nicht enthält, so sind P und Q durch einen die ganze Kurve AC nicht treffenden Weg verbunden, w. z. b. w.

Das in diesem Paragraphen zu beweisende Theorem ist in den eben bewiesenen Sätzen I und II enthalten.

Es sei nämlich der Kurvenbogen $\mathfrak{C}$ eineindeutig und stetig auf den Parameter t ($\alpha \leqq t \leqq \beta$) so abgebildet, daß den Endpunkten A und B die Parameterwerte α und β entsprechen. Der laufende Kurvenpunkt, welcher dem Parameterwert t entspricht, möge mit T bezeichnet werden.

Es sei nun c die obere Grenze derjenigen Werte von t, für welche der Kurvenbogen AT die gegebenen Punkte P und Q nicht trennt. C sei der dem Parameterwert c entsprechende Kurvenpunkt.

Bezeichnet dann G einen beliebigen Punkt zwischen A und C, so können P und Q nicht durch den Bogen AG getrennt werden. Denn andernfalls würden sie a fortiori durch jeden Bogen AC' getrennt werden, wenn C' zwischen G und C liegt, was der Voraussetzung über C widerspricht.

Aus Satz II dieses Paragraphen folgt daher, daß auch der Bogen AC die Punkte P und Q nicht trennt.

Fiele nun C nicht mit B zusammen, so müßte wegen Satz I dieses Paragraphen der Bogen AC sich noch über C hinaus längs der Kurve $\mathfrak{C}$ um ein gewisses Stück so verlängern lassen, daß P und Q ungetrennt bleiben, was wiederum der Voraussetzung über C widerspricht. Also fällt C mit B zusammen, d. h. der Bogen AB trennt die Punkte P und Q nicht, w. z. b. w.

Ausgegeben am 15. Januar 1924.

SITZUNGSBERICHTE
DER PREUSSISCHEN
AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.
1923

XXIX. Sitzung der physikalisch-mathematischen Klasse. 15. November.

Vorsitzender Sekretar: Hr. Rubner.

Hr. Fick sprach über seine Untersuchungen an den Muskeln einiger der Teneriffa-Schimpansen. (Ersch. später.)

Er untersuchte hauptsächlich die Gewichts- und Querschnittsgröße. Erstere verglich er mit der von ihm beim Menschen, Orang und Hund sowie von Schmaltz beim Pferd gefundenen Größe. Die Querschnitte setzte er in Vergleich mit den von ihm beim Menschen und beim Hund gefundenen Werten.

Ausgegeben am 15. Januar 1924.

SITZUNGSBERICHTE
DER PREUSSISCHEN
AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.
1923

XXX. Gesamtsitzung. 22. November.

Vorsitzender Sekretar: Hr. Rubner.

*1. Hr. Meinecke sprach über Rankes Stellung zum Problem des Machiavellismus und der Staatsraison.

Die Beziehungen der deutschen Identitätsphilosophie zu Rankes Beurteilung der Machtpolitik wurden dabei gezeigt und der verhüllte Dualismus der Maßstäbe des Wandelbaren und Unwandelbaren in seiner Geschichtsauffassung nachgewiesen.

2. Hr. Kehr legte den Bericht über die Herausgabe der Monumenta Germaniae historica 1922—23 vor.

3. Hr. Roethe legte die von Hrn. Wrede in Marburg, außerakademischem Mitglied der Deutschen Kommission, übersandten 4 Wortkarten 'Harke', 'Jauche'. 'Klempner' und 'Hefe' vor, die in dem Institut für den Deutschen Sprachatlas in Marburg entworfen worden sind.

4. Vorgelegt wurde das mit Unterstützung der Akademie herausgegebene Werk von Otto Hoetzsch »Peter von Meyendorff, ein russischer Diplomat an den Höfen von Berlin und Wien«, 3 Bände (Berlin und Leipzig 1923).

Ausgegeben am 15. Januar 1924.

SITZUNGSBERICHTE

DER PREUSSISCHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

1923

XXXI. Sitzung der physikalisch-mathematischen Klasse. 29. November.

Vorsitzender Sekretar: Hr. Rubner.

Hr. Pompeckj sprach über seine Untersuchungen an fossilen Walen. II. Das Ohrskelett von *Protocetus*. (Ersch. später.)

Durch erneute Präparation des Fraasschen Originales von *Protocetus atavus* (unteres Mittel-Eozän des Mokattam) konnte bei diesem ältesten Archäozeten in bezug auf das Ohrskelett das Folgende festgestellt werden. 1. Das Petrosum ist noch an der unmittelbaren Umrahmung des Hirnraumes beteiligt; es ist mit dem Squamosum fest verwachsen und sendet einen groben, sphenoidischen Mastoidfortsatz zwischen Squamosum und Parokzipitale. 2. Das Tympanicum ist nach Form und Größe das eines Wales, mit Anklängen sowohl an Zahn- wie Bartenwale; mit dem Petrosum steht es einzig durch das Mastoid in knöcherner Verbindung. 3. Von den nicht erhaltenen Gehörknöchelchen muß angenommen werden, daß der anscheinend federnd mit der Bulla verbundene Hammer mehr nach Art der Landsäugetiere als nach der der Wale gestellt war, und der kurze Schenkel des Amboß scheint grob und dick gewesen zu sein. 4. Obwohl das Ohrskelett durch seine Größe und Massigkeit bereits ganz dem Walcharakter entspricht, muß die Art des Hörens bei *Protocetus* doch viel mehr die eines Landsäugetieres gewesen sein als die eines einseitigst ans Wasserleben angepaßten Wales.

Ausgegeben am 15. Januar 1924.

SITZUNGSBERICHTE
DER PREUSSISCHEN
AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.
1923

XXXII. Gesamtsitzung. 6. Dezember.

Vorsitzender Sekretar: Hr. Rubner.

1. Hr. v. Laue sprach über die von glühenden Metallen ausgesandten positiven Ionen und Elektronen.

Es handelt sich um das thermodynamische Gleichgewicht zwischen Metall und dem über ihm liegenden, ionisierten Dampf und um die Schlüsse, die man daraus auf die positiven und negativen Sättigungsströme ziehen kann.

2. Hr. Eduard Meyer legte die 34. wissenschaftliche Veröffentlichung der Deutschen Orient-Gesellschaft, 4. Heft, vor: Erich Ebeling »Keilschrifttexte aus Assur religiösen Inhalts«, 8. Heft (Leipzig 1923); Hr. Fick seine Schrift »Weitere Bemerkungen über die Vererbung erworbener Eigenschaften« (Sonderabdr. 1923).

3. Die Witwe des ordentlichen Mitgliedes Hrn. Eduard Seler übersandte dessen »Gesammelte Abhandlungen zur amerikanischen Sprach- und Alterthumskunde«, herausgegeben von Caecilie Seler-Sachs, 4. Band (Berlin 1923).

4. Das korrespondierende Mitglied Hr. James George Frazer in Cambridge übersandte sein Werk: »Apollodorus, The Library«, 2 Bände (London 1921).

5. Vorgelegt wurde der »Briefwechsel zwischen Wilhelm Dilthey und dem Grafen Paul Yorck v. Wartenburg 1877—1897« (Halle a. S. 1923) sowie die 25. Lieferung der mit Unterstützung der Akademie herausgegebenen »Bibliotheca Zoologica II.« von O. Taschenberg (Leipzig 1922).

Die Akademie hat den ordentlichen Professor an der Universität Greifswald, Hrn. Dr. Gustav Ehrismann, und den ordentlichen Professor an der Universität Basel, Hrn. Dr. Paul Wernle, zu korrespondierenden Mitgliedern ihrer philosophisch-historischen Klasse gewählt.

Zur Theorie der von glühenden Metallen ausgesandten positiven Ionen und Elektronen.

Von M. v. Laue.

1. Das Gleichgewicht zwischen glühenden Leitern und den von ihnen entsandten Elektronen ist schon oft thermodynamisch untersucht worden[1]. Dabei wurde stets vorausgesetzt, daß positive Ionen nicht in merklicher Zahl auftreten. Nach neueren Versuchen, z. B. von Spanner[2], treten aber bei vielen Metallen und Metallverbindungen dabei auch diese, manchmal sogar ganz überwiegend auf. Wir wollen die früheren Betrachtungen daraufhin verallgemeinern.

Obwohl auch die Theorie verwickelterer Fälle keine Schwierigkeiten bereitete, nehmen wir hier an, daß alle negativen Ladungsträger Elektronen, alle positiven aber unter sich gleichartig, und zwar einatomig und mit einem Elementarquantum Elektrizität geladen sind. Selbstverständlich treten dann aber auch die neutralen Atome auf, welche aus der Vereinigung eines Ions mit einem Elektron hervorgehen und welche den ungeladenen Dampf bilden, der im Gleichgewicht über dem glühenden, festen oder flüssigen Körper vorhanden sein muß.

Wir bezeichnen mit ε die positive Elementarladung, mit m die Massen eines positiven Ions oder eines neutralen Moleküls, mit m_- die Masse eines Elektrons. T ist, wie üblich, die absolute Temperatur, k die Boltzmannsche, h die Plancksche Konstante und N die Zahl der Molekeln im Mol. p, p_+ und p_- sollen die Partialdrucke der neutralen Atome, der positiven Ionen und der Elektronen sein, E/N, E_+/N und E_-/N die Energie je eines Atoms, Ions oder Elektrons, sofern es ruht. Die freie Energie eines Gemischs von n Molen neutraler Molekeln, n_+ Molen positiver und n_- Molen negativer Ladungsträger ist nach der quantentheoretischen Statistik[3], sofern sich das Ganze in einem Raum nicht merklich veränderlichen Potentials ϕ befindet:

$$\begin{aligned} F = n &\left[E - kNT\left(1 + \log\frac{(2\pi m)^{3/2}}{h^3} + \frac{5}{2}\log kT - \log p\right)\right] \\ + n_+ &\left[E_+ - kNT\left(1 + \log\frac{(2\pi m)^{3/2}}{h^3} + \frac{5}{2}\log kT - \log p_+\right)\right] \qquad (1) \\ + n_- &\left[E_- - kNT\left(1 + \log\frac{(2\pi m_-)^{3/2}}{h^3} + \frac{5}{2}\log kT - \log p_-\right)\right]. \end{aligned}$$

[1] z. B. M. v. Laue, Jahrb. d. Radioactivität **15**, 205 u. 257, 1918.

[2] Die Arbeit von H. J. Spanner erscheint demnächst in den Annalen der Physik.

[3] M. Planck, Vorlesungen über die Theorie der Wärmestrahlung, 5. Auflage (Leipzig 1923), S. 201 u. f., besonders Gleichung 440.

Auf ein System, bestehend aus diesem Gemisch und dem mit ihm im Gleichgewicht stehenden Körper, dessen Potential aber Φ sein mag, wenden wir nun die Gleichgewichtsbedingung an, daß bei einer virtuellen isothermen Überführung von δn_+ Molen positiver und δn_- Molen negativer Ladungsträger vom Gemisch in den Körper (und zwar hinreichend tief in dessen Inneres) die Zunahme der freien Energie gleich der zugeführten Arbeit sein muß. Diese Arbeit setzt sich zusammen aus der am Gemisch von den umgebenden Gasteilen geleisteten Kompressionsarbeit $kNT(\delta n_+ + \delta n_-)$ und der Arbeit $N\varepsilon(\delta n_- - \delta n_+)(\Phi - \phi)$ der elektrischen Kräfte. Die freie Energie des Körpers aber mag bei der Zuführung von δn_- Molen Elektronen um $-\mu_-\delta n_-$ zunehmen, so daß μ_- seine Elektronenaffinität bedeutet, und bei Zuführung von δn_+ Molen positiver Ionen um $-\mu_+\delta n_+$. Dann ergibt jene Gleichgewichtsbedingung die beiden Beziehungen:

$$\left.\begin{aligned} p_+ &= \frac{(2\pi m)^{3/2}}{h^3}(kT)^{5/2} e^{-\frac{\mu_+ + E_+}{kNT}} \times e^{-\frac{\varepsilon}{kT}(\phi - \Phi)} \\ p_- &= \frac{(2\pi m_-)^{3/2}}{h^3}(kT)^{5/2} e^{-\frac{\mu_- + E_-}{kNT}} \times e^{+\frac{\varepsilon}{kT}(\phi - \Phi)} \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Man könnte ihnen eine dritte, durch Überführung von δn Molen neutralen Gases zu gewinnende Beziehung an die Seite stellen, welche mit ihnen zusammen die Gleichung der Dampfdruckkurve ergibt. Sie unterscheidet sich von jenen im wesentlichen nur durch das Fehlen der Exponentialfunktion, welche in (2) das elektrostatische Potential ϕ enthält. p ist somit im Gegensatz zu p_+ und p_- räumlich konstant. Das Massenwirkungsgesetz $\frac{p_+ p_-}{p} = K$ für die Dissoziation der neutralen Molekel in die Ionen[1] verlangt daher die Konstanz des Produkts $p_+ \cdot p_-$; die Beziehungen (2) genügen dieser Forderung.

Die Zahl ν der Molekeln in der Volumeneinheit hängt bei einem Gase mit dessen Partialdruck durch die Gleichung

$$\nu = \frac{p}{kT}$$

zusammen. Wendet man sie auf die Zahl ν_+ und ν_- der positiven und negativen Ladungsträger an, so folgt aus (2):

$$\left.\begin{aligned} \nu_+ &= \frac{1}{h^3}(2\pi m kT)^{3/2} e^{-\frac{\mu_+ + E_+}{kNT}} \times e^{-\frac{\varepsilon}{kT}(\phi - \Phi)} \\ \nu_- &= \frac{1}{h^3}(2\pi m_- kT)^{3/2} e^{-\frac{\mu_- + E_-}{kNT}} \times e^{\frac{\varepsilon}{kT}(\phi - \Phi)} \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Wir erinnern hier an die Bedeutung der Elektronenaffinitäten μ_-' und μ_-'' für das Gleichgewicht zwischen zwei verschiedenen Leitern, zwischen denen die Potentialdifferenz $\Phi' - \Phi''$ besteht. Die oben angewandte Gleichgewichtsbedingung verlangt:

$$\mu_-' - \mu_-'' = -N\varepsilon(\Phi' - \Phi'') \qquad (4)$$

[1] M. N. SAHA (Phil. Mag. **40**, 472, 1920) berechnet die Dissoziationskonstante K für viele der hier in Betracht kommenden Metalldämpfe.

Die Peltierwärme aber, welche bei der Überführung eines Mols Elektronen vom eingestrichenen zum zweigestrichenen Leiter frei wird, berechnet sich zu

$$Q = -T\left(\frac{\partial \mu'}{\partial T} - \frac{\partial \mu''}{\partial T}\right). \tag{5}$$

Die diesen Formeln zugrunde liegende Voraussetzung, daß die metallische Stromleitung lediglich von Elektronen getragen wird, haben neuerdings die Versuche von Tolman und seinen Mitarbeitern[1] sichergestellt.

2. Die elektrische Dichte in dem Gasgemisch beträgt $\rho = \varepsilon(\nu_+ - \nu_-)$. Da andererseits

$$\Delta\phi. = -4\pi\rho$$

ist, so beherrscht die Differentialgleichung

$$\Delta\phi = -4\pi(\rho_- e^{\beta\phi} + \rho_+ e^{-\beta\phi}) \qquad \left(\beta = \frac{\varepsilon}{kT}\right) \tag{6}$$

die Potential- und Dichteverteilung in dem betrachteten Gemisch von Ladungsträgern und neutralen Gasmolekeln. Die Konstanten ρ_+ und ρ_- müssen wir dabei als die Beiträge der beiden Arten von Ladungsträgern zur Dichte ρ betrachten, die beim Potential Null herrschen. Wir dürfen ohne Beschränkung der Allgemeinheit diesen Wert dem Leiter zuschreiben, mit dem das Gemisch im Gleichgewicht ist.

Gleichung (6) läßt sich nun in die Form

$$\Delta\phi = \beta\varkappa \operatorname{Sin}(\beta(\phi - \alpha)) \tag{7}$$

schreiben. Die Konstante

$$\alpha = \frac{1}{2\beta}\log\frac{\rho_+}{(-\rho_-)}$$

bedeutet dann das Potential, bei welchem infolge gleicher Dichte beider Ladungsträger die Dichte $\rho = 0$ wird; und die Konstante

$$\varkappa = \frac{8\pi}{\beta}\sqrt{\rho_+(-\rho_-)} = \frac{8\pi\varepsilon}{\beta}\sqrt{\nu_+\nu_-} = 8\pi\sqrt{p_+p_-} = 8\pi\sqrt{Kp}$$

hängt unmittelbar mit der Dissoziationskonstanten K zusammen. Hat man eine Lösung ϕ_1 von (7), so ist $\phi_2 = 2\alpha - \phi_1$ eine weitere. Hängt ϕ nur von einer Koordinate (x) ab, so liefert einmalige Integration von (7):

$$\left(\frac{d\phi}{dx}\right)^2 = 2\varkappa[\operatorname{Cof}\beta(\phi - \alpha) - c] \tag{8}$$

c ist die Integrationskonstante.

Der hyperbolische Kosinus ist immer größer als 1. Ist also $c < 1$, so kann $\frac{d\phi}{dx}$ nie verschwinden und auch niemals sein Vorzeichen wechseln. Wir erhalten daher einen Potentialverlauf, wie ihn ungefähr Fig. 1 darstellt. Die Kurve besteht aus zwei zu ihrem Schnittpunkt P mit der Geraden $\phi = \alpha$ sym-

[1] Tolman und Stewart, Phys. Rev. **9**, 164, 1917; Tolman, Karrer und Guernsey, Phys. Rev. **21**, 525, 1923.

metrischen Teilen. Soweit die den verschiedenen Werten von x entsprechenden Bereiche verwirklicht sind, sammeln sich also die negativen Ladungsträger vorwiegend links von P, die positiven rechts. Als Begrenzungen dieser Gasschicht wären zwei Körper gleicher Temperatur zu denken, welche außer den Elektronen positive Ionen der gleichen Art aussenden, also etwa ein Metall und eine seiner Verbindungen. Sie müssen sich bei den Werten von ϕ befinden, für welche die Ionendichten die an ihrer Grenze vorgeschriebenen

Fig. 1.

Fig. 2.

Werte annehmen; für die eine ist dies nach Voraussetzung der Wert $\phi = 0$. Die danach zwischen ihnen bestehende Potentialdifferenz ist dieselbe, wie wenn sie sich unmittelbar berühren.

Ist aber $c > 1$, so verschwindet $\frac{d\phi}{dx}$ dort, wo

$$\mathfrak{Cos}\,\beta(\phi - \alpha) = c$$

wird. Es muß daher dieser hyperbolische Kosinus stets größer sein. $\phi - \alpha$ läuft dann von (positiv oder negativ) unendlich großen Werten zu diesem Extremum und kehrt dann wieder zurück. So ergeben sich Kurven nach Art der beiden in Fig. 2 dargestellten. Je nachdem $\rho_+ \gtrless (-\rho_-)$, $\alpha \lesseqgtr 0$, enthält die obere oder die untere den Wert $\phi = 0$, bei welchem nach Voraussetzung die Grenze der Gasschicht gegen den Leiter liegt. Nur diese Kurve ist also zu verwirklichen, und sie stellt dann, wenn man etwa an den beiden Stellen $\phi = 0$ sich diesen Leiter denkt, den Zustand in einem planparallelen Spalt im Innern eines solchen Leiters dar. Wäre $\rho_+ = (-\rho_-)$, so wäre $\alpha = 0$, und das Potential wäre, wie unmittelbar einzusehen, überall Null; in (8) wäre dann $c = 1$.

Den Grenzfall $c = 1$ erhalten wir aus Fig. 1, indem wir den Wendepunkt P ins Unendliche rücken und gleichzeitig die Tangente in ihm horizontal

Fig. 3.

werden lassen; und ebensogut aus Fig. 2, indem wir den Extremwert von ϕ in den unendlich fernen Punkt der Geraden $\phi = \alpha$ legen. Auf beiden Wegen findet sich ein Potentialverlauf, der je nach dem Vorzeichen von α durch die obere oder die untere Kurve in Fig. 3 dargestellt ist. Dieser Fall stellt den Übergang zwischen dem Leiter und dem ungeladenen Dampf dar, mit dem er im Gleichgewicht ist. Die Übergangsschicht enthält je nach dem Vorzeichen von α einen Überschuß positiver oder negativer Ladung. Da die entgegengesetzt gleiche Ladung auf der Grenzfläche des Leiters liegt, so sehen wir hier die Doppelschicht vor uns, welche die Potentialdifferenz α zwischen dem Leiter und dem Dampf hervorruft[1]. Für spätere Zwecke wollen wir hier hervorheben, daß bei dieser Ionenverteilung die Oberfläche einen Druck erfährt, der einfach die Summe aus dem Partialdruck p der neutralen Molekeln und den Partialdrucken p_+ und p_- ist, welche in dem feldfreien Bereich bei $\phi = \alpha$ herrschen. Denn diesen Druck erfährt die Übergangsschicht selbst von dem neutralen Teil des Gases. In dem Fall der Fig. 1 ist der Druck auf die Oberfläche hingegen geringer, weil am Ort von $\phi = \alpha$ elektrische Kraftlinien vorhanden sind, längs deren bekanntlich ein Zug herrscht. Im Fall von Fig. 2 wäre der Druck größer als nach Fig. 3.

Da sich in der Literatur irrige Angaben über die Integration der Differentialgleichung (7) finden[2], möchten wir hier deren Integration zu Ende führen. Setzen wir

$$x = \frac{2u}{\beta\sqrt{\varkappa}}\,, \quad e^{\beta(\phi-\alpha)} = p(u) + \frac{2}{3}c\,,$$

so geht (8) über in die Differentialgleichung der Weierstrassschen p-Funktion:

$$\left(\frac{dp}{du}\right)^2 = 4p^3 - g_2 p - g_3 \quad \left(g_2 = 4\left(\frac{4}{3}c^2 - 1\right),\ g_3 = \frac{8}{3}c\left(\frac{8}{9}c^2 - 1\right)\right) \tag{9}$$

[1] Vielfach ist die Ansicht vertreten, daß stets, auch bei tiefen Temperaturen, bei denen keinerlei Ionen ausgesandt werden, eine Doppelschicht unmittelbar an der Grenze eines Metalls gegen den leeren Raum besteht, welche einen Potentialunterschied zwischen Außenraum und Innerem hervorruft. Wir lassen hier dahingestellt, ob dies zutrifft. Ist dem so, so ist diese Potentialdifferenz, oder vielmehr die potentielle Energie, welche ein Ladungsträger infolgedessen im Inneren des Metalls besitzt, in den Beträgen $-\mu_-$ und $-\mu_+$ der freien Energie mit enthalten; sie ist infolgedessen bei unserem Potential ϕ und auch bei dessen Wert α nicht mehr in Rechnung zu setzen.

[2] G. W. Walker (Phil. Mag. **49**, 529, 1900) leitet aus einer Differentialgleichung, welche sich von (6) nur in der Bedeutung der Konstanten unterscheidet, ein periodisches Verhalten von ϕ als Funktion von x ab und will damit die Periodizität in der geschichteten Glimmentladung erklären. Obwohl sich in den folgenden Formeln ϕ auf die periodische Funktion $p(u)$ zurückführen läßt, ist diese Erklärung dennoch unmöglich, weil ϕ innerhalb jeder Periode an ein oder zwei Stellen unendlich groß wird.

Also ist

$$\phi - \alpha = \pm \frac{1}{\beta} \log \left[p \left(\frac{1}{2} \beta \sqrt{\varkappa}\, x \right) + \frac{2}{3} c \right] \tag{10}$$

die Lösung, wobei wir das Recht, das doppelte Vorzeichen vor die rechte Seite zu setzen, der allgemeinen Bemerkung auf S. 336 über die Lösungen der Differentialgleichung (6) entnehmen. Die drei Nullstellen der rechten Seite von (9) sind

$$e_1 = -\frac{2}{3} c, \quad e_2 = \frac{1}{3}\left(c - 3\sqrt{c^2 - 1}\right), \quad e_3 = \frac{1}{3}\left(c + 3\sqrt{c^2 - 1}\right)$$

Sie sind alle reell, wenn $c > 1$, oder $c < -1$. Ein bekannter Satz aus der Theorie der elliptischen Funktionen sagt, daß bei drei reellen Nullstellen von den Perioden der doppeltperiodischen Funktion $p(u)$ diejenige, $2\omega_i$, reell ist, welche mit der größten der drei Nullstellen e_i durch die Beziehung

$$p(\omega_i) = e_i$$

verbunden ist. Ist $c > 1$, so ist e_3 diese größte Nullstelle. Da bei $u = 0$ die p-Funktion wie u^{-2} unendlich wird, wird $\phi - \alpha$ bei $x = 0$, sofern wir in (10) das positive Vorzeichen gelten lassen, positiv unendlich. Mit wachsendem x sinkt dann die p-Funktion bis zum Wert e_3, den sie bei

$$x = \frac{2\omega_3}{\beta\sqrt{\varkappa}}$$

erreicht, um dann dauernd anwachsend bei

$$x = \frac{4\omega_3}{\beta\sqrt{\varkappa}}$$

wieder unendlich groß zu werden. Da das Argument des Logarithmus in (10) dabei immer größer als Null bleibt, so hat in diesem Intervall $\phi - \alpha$ beim ersteren Wert von x ein endliches Minimum. Wir finden also eine Kurve von der in Fig. 2 dargestellten Art. Ist hingegen $c < -1$, so ist e_1 die größte Nullstelle. Dann wird zwar immer noch $\phi - \alpha$ positiv unendlich bei $x = 0$, aber die p-Funktion sinkt, indem x bis zum Wert

$$x = \frac{2\omega_1}{\beta\sqrt{\varkappa}}$$

wächst, auf den Wert e_1 herab, so daß das Argument des Logarithmus in (10) verschwindet. Dann wird also $\phi - \alpha$ negativ unendlich, wie es Fig. 1 angibt.

Von den drei e-Werten werden e_2 und e_3 konjugiert komplex, wenn $-1 < c < +1$ ist. Dann sagt ein weiterer Satz aus der Theorie der elliptischen Funktionen, daß von den Perioden von $p(u)$ diejenige reell ist, welche zu der reellen Nullstelle, e_1, in der Beziehung

$$p(\omega_1) = e_1$$

steht. Daraus folgt, daß auch hier ein Verlauf von $\phi - \alpha$ herauskommt, wie ihn Fig. 1 veranschaulicht.

Für den Grenzfall $c = 1$ endlich lautet die Lösung der Differentialgleichung (8)

$$\beta\sqrt{\varkappa}\, x = -\log \mathfrak{Tang}\left(\pm \frac{1}{4}\beta(\phi - \alpha)\right) \text{ oder } \mathfrak{Sin}(\beta\sqrt{\varkappa}\, x)\cdot\mathfrak{Sin}\left(\frac{1}{2}\beta(\phi-\alpha)\right) = \pm 1$$

Diese Formel, welche schon Herzfeld[1] benutzt hat, um das Verhalten der Grenzschichten elektrolytischer Lösungen zu erörtern, stimmt zur Fig. 3. Doch besteht zwischen den von Herzfeld betrachteten und den hier in Rede stehenden Grenzschichten der Unterschied, daß bei den Dämpfen wegen der im allgemeinen weit geringeren Ionendichte $\varkappa$ viel kleiner und die Dicke der geladenen Schicht weit größer ist als bei den Lösungen. Deswegen können die in Fig. 1 und 2 dargestellten Fälle, in denen zwei solche Schichten zusammengeflossen sind, hier eher ein physikalisches Interesse darbieten.

3. Die bisherigen Betrachtungen gelten genau genommen nur für Bereiche, welche von der Grenzfläche zwischen dem leitenden Körper und dem Gase hinreichend entfernt sind. Und es war insofern nicht ganz berechtigt, als wir im Abschnitt 2 die Feldverteilung bis in die nächste Nähe dieser Grenzfläche zu berechnen unternahmen. Denn in der Nähe dieser Grenzfläche ist noch die Bildkraft zu berücksichtigen, welche auf ein Ion im Abstand x von der Fläche mit der Stärke $\varepsilon^2/4x^2$ wirkt, falls die Fläche eben ist.

Es kann im ersten Augenblick verwunderlich scheinen, daß wir diese neben der aus dem (räumlich gemittelten) Potential ϕ ableitbaren elektrischen Feldstärke in Betracht ziehen. Denn es herrscht doch die Überzeugung, daß es lediglich elektrische (und, falls wir auch mit bewegten Ladungen zu tun hätten, magnetische) Felder sind, die Kräfte auf Ladungsträger ausüben. Könnten wir das Potential ϕ wirklich auf alle vorhandenen Ladungen zurückführen, so dürften wir gewiß keine Bildkraft neben der elektrischen Feldstärke einführen.

Aber diese Voraussetzung ist eben nicht erfüllt und zur Zeit auch schwerlich erfüllbar. ϕ ist nämlich durch die Differentialgleichung (6) auf die mittlere elektrische Dichte in der Gasschicht zurückgeführt, aber wir führen den Einfluß aller der im Leiter liegenden positiven und negativen Ladungen durch die Grenzbedingung ein, daß die »Grenzfläche«, für die es nicht einmal eine klare Definition gibt, eine Fläche konstanten Potentials ist. Diese Bedingung ist in der Wirklichkeit sicher mit großer Annäherung erfüllt; das beweisen Versuche über die weitere Steigerung des Sättigungsstroms durch sehr starke, die Bildkraft teilweise überwindende Felder[2]. Dennoch liegt in ihr eine Art Inkonsequenz der Theorie, und das rächt sich dadurch, daß wir nunmehr die Bildkraft zu berücksichtigen haben. Erst eine Theorie der elektrischen Leitung, die den Zustand im Leiter auch dann kennen lehrte, wenn sich dicht an seiner Begrenzung eine Ladung befindet, könnte darüber hinweghelfen.

Daß jene Grenzbedingung die Schuld trägt, zeigt die folgende Betrachtung. Wir fassen ein bestimmtes Ion im Gasbereich ins Auge und nennen es in Boltzmannscher Sprechweise das »hervorgehobene«. Wir halten nun alle anderen Ionen fest an ihren Plätzen, denken uns aber das hervorgeho-

[1] K. F. Herzfeld, Phys. Z. S. **21**, 28, 1920.

[2] W. Schottky, Jahrb. d. Radioact. **12**, 199, 1912 oder Zeitschr. f. Phys. **14**, 63, 1923.

bene entfernt. Um die Grenzbedingung aufrechtzuerhalten, müssen wir dann auch seine Bildladung beseitigen und setzen dazu an deren Ort eine Punktladung von der Größe und dem Vorzeichen der Ionenladung. Unter diesen Umständen hat sich das mittlere Potential ϕ nicht merklich geändert; denn, falls es sich überhaupt definieren läßt, darf es von der Anwesenheit eines einzelnen Ladungsträgers nicht erheblich abhängen. Dies mittlere Potential ist aber am Ort des hervorgehobenen Ions identisch mit dem mittleren Potential aller anderen Ladungsträger. Setzen wir nun das hervorgehobene Ion samt seinem Spiegelbild wieder an seinen Ort, so erfährt es von den anderen Ladungen die Kraft $\pm \varepsilon \operatorname{grad} \phi$. Von seinem Spiegelbild her aber kommt die erwähnte Anziehungskraft noch hinzu; daß sie nicht immer klein gegen erstere ist, hat SCHOTTKY rechnerisch dargelegt.

Natürlich ist dafür auch noch die atomistische Verteilung der Ladungen wesentlich. Gäbe es eine wirklich stetige Verteilung, so berechnete sich die Kraft auf einen unendlich kleinen Teil von ihr rein aus dem Gradienten des Potentials ϕ; denn diese Kraft wäre zwar klein wie die Ladung selbst, die Bildkraft aber wäre zu ihrem Quadrat proportional.

Ebenfalls hat schon SCHOTTKY betont, daß man die Bildkraft nicht für beliebig kleine Abstände x nach dem angegebenen Ausdruck berechnen darf. Nähert man sich der »Grenzfläche« auf molekulare Abstände, so kommt die molekulare Struktur zur Geltung; so wird vor allem das unbegrenzte Anwachsen der Bildkraft bei abnehmendem x vermieden. Auch selbst in erheblich größeren Abständen gelten für gekrümmte oder rauhe Oberflächen andere Ausdrücke. Auf jeden Fall aber ist die Bildkraft aus einem Potential ableitbar, das wir mit Ψ bezeichnen; in unendlich großem Abstand setzen wir es gleich o.

Nun könnte es zunächst scheinen, als müßte dies Potential in den thermodynamischen Betrachtungen von Abschnitt 1 bei Berechnung der zugeführten Arbeit berücksichtigt werden. Das hätte zur Folge, daß in den Gleichungen (2) und (3) neben den anderen Exponentialfunktionen nun auch ein Faktor

$$e^{\frac{\Psi}{kT}}$$

auftritt, wobei Ψ der für die Grenzfläche selbst geltende Wert dieses Potentials ist. Wir haben soeben gesehen, daß Ψ aber sehr von der Gestalt der Fläche abhängt und auch von dem Grade ihrer Rauhigkeit. Die Partialdrucke p_+ und p_- sowie die Dichten ν_+ und ν_- hingen dann auch an Stellen, die von der Grenzfläche beliebig weit entfernt sind, noch von den zufälligen Eigenschaften dieser Fläche ab. Denn die Größen, die sie sonst bestimmen, sind alle von diesen Zufälligkeiten unabhängig und nicht geeignet, deren Einfluß aufzuheben.

Eine solche Folgerung scheint uns unannehmbar; und in der Tat befreit uns eine genauere Überlegung von ihr. Denken wir uns ein einzelnes Ion oder Elektron auf einem beliebigen, aber geschlossenen Wege durch beliebige viele leitende Körper und leere oder gasgefüllte Räume hindurchgeführt. Die Arbeit, welche sich dabei aus dem gemittelten elektrostatischen Potential ϕ ergibt, ist selbstverständlich Null. Es bleibt die Summe aller der Arbeiten.

welche sich aus den Bildkräften an allen durchschrittenen Oberflächen zweier Körper ergibt. Aber auch diese Summe ist Null, da sich der Zustand und die ihm entsprechende Energie des ganzen Systems ja gar nicht geändert hat. Nun ist der Beitrag der einzelnen Fläche zu dieser Summe unabhängig von den Beiträgen der anderen zu verändern. Die Bildkraft ändert sich ja, wenn wir das Ion diese Fläche an einer anderen, etwas anders gekrümmten oder anders aufgerauhten Stelle durchschreiten lassen. Wir schließen daraus, daß der Beitrag jeder Fläche für sich gleich Null ist, daß es also an jeder Fläche als Gegenstück zu der äußeren Bildkraft, die wir betrachtet haben, auch eine innere Bildkraft gibt, welche ein im Leiter befindliches Ion zur Grenze hinzieht. In der Tat läßt sich auf ein Ion im Inneren des Leiters eine ähnliche Betrachtung durchführen, wie oben für ein außerhalb befindliches. Denken wir uns nämlich dies »hervorgehobene« Ion samt seinem Spiegelbild entfernt, während wir alle anderen Ladungen im Leiter festhalten, so muß dabei ein mittleres Potential herauskommen, welches im Leiter konstant ist. Setzen wir nunmehr Ion und Bildladung wieder ein, so finden wir als auf das Ion wirkend dieselbe Bildkraft, wie wenn es im gleichen Abstand von der Grenzfläche sich außerhalb befände.

Das hat zur Folge, daß die Betrachtungen und Gleichungen des ersten Abschnitts durch die Bildkraft nicht verändert werden[1], außer für den Fall, in dem wir Gasteile unmittelbar an der Oberfläche betrachten. In diesem Bereich ist freilich an Stelle der Gleichungen (3) zu schreiben:

$$\nu_+ = \frac{1}{h^3}(2\pi m k T)^{3/2} e^{-\frac{\mu_+ - E_+}{kNT}} \cdot e^{-\frac{1}{kT}(\varepsilon(\phi - \Phi) + \Psi)}$$

$$\nu_- = \frac{1}{h^3}(2\pi m_- k T)^{3/2} e^{-\frac{\mu_- - E_-}{kNT}} \cdot e^{-\frac{1}{kT}(-\varepsilon(\phi - \Phi) + \Psi)} \qquad (11)^2$$

Ψ ist dabei das am betrachteten Ort geltende Potential der Bildkraft. Da es für beide Arten von Ladungsträgern denselben Wert hat, ist das Produkt $\nu_+ \cdot \nu_-$ und ebenso $p_+ \cdot p_-$ nicht mehr unabhängig vom Ort. Da ferner die Bildkraft den Druck p der ungeladenen Molekeln nicht beeinflußt, gilt dann das Massenwirkungsgesetz nicht mehr. Diese Folgerung läßt sich aber ertragen, da man längst weiß, daß sich chemische Gleichgewichte in Oberflächenschichten anders einstellen als im Inneren des Gasraums.

4. Die Gleichgewichte, von denen bisher die Rede war, sind bisher noch nie unmittelbar Gegenstand von Versuchen gewesen. Alle vorliegende Erfahrung bezieht sich auf die positiven und besonders auf die negativen Sättigungsströme, d. h. auf die Ströme, welche starke elektrische Felder aus dem Leiter herausziehen, sodaß jedes Ion von der herausgezogenen Art, welches überhaupt den Leiter verläßt, sicher zur anderen Elektrode überführt wird.

---

[1] Aus demselben Grunde braucht man auch bei den bekannten thermodynamischen Betrachtungen der Elektrochemie über das Gleichgewicht zwischen einem Metall und einer elektrolytischen Lösung die Bildkraft nicht in Rechnung zu setzen.

[2] Dies läßt sich wohl kaum noch rein aus der Formel (1) für die freie Energie beweisen, da die Voraussetzungen für deren Anwendbarkeit so dicht an der Grenzfläche schwerlich erfüllt sind. Die Hinzuziehung der Boltzmann-Gibbsschen Statistik führt aber auf die Gleichungen (11).

Eine in der kinetischen Gastheorie oft angewandte Betrachtung erlaubt aber die Berechnung solcher Strömungen, sofern man das Gleichgewicht kennt. Nimmt man nämlich an, was auch mit einer gewissen Annäherung zutreffen dürfte, daß es beim Sättigungsstrom in der Nähe der Grenze eine Fläche gibt, innerhalb deren alles wie bei fehlendem äußeren Felde vor sich geht, während von außen kein Ion der betrachteten Art zu ihr zurückkehrt[1], so ist die Zahl der Ionen, welche diese Fläche in der Richtung nach außen durchschreitet, gleich der Zahl, welche im Gleichgewichtsfall von außen her auf dieselbe Fläche auftrifft[2]. Das führt dann zu der Beziehung

$$\frac{i}{\varepsilon} = \nu \sqrt{\frac{kT}{2\pi m}}$$

zwischen der Stromdichte i und der Zahl ν der Ionen, welche im Gleichgewichtsfall an dieser Fläche auf die Volumeneinheit käme.

Nehmen wir nun an, daß an jener Fläche das elektrostatische Potential φ den Wert Φ hat, den es im Innern des Metalls besitzt, und bezeichnen wir mit Ψ nunmehr den Wert des Bildkraftpotentials an dieser Fläche, so finden wir gemäß den Gleichungen (11) für den negativen Sättigungsstrom den Wert:

$$\frac{i_-}{\varepsilon} = \frac{2\pi m_-}{h^3} (kT)^2 e^{-\frac{1}{kNT}(N\Psi + \mu_- + E_-)} \qquad (12)^3$$

Der hier einzusetzende Wert von Ψ dürfte für alle Körper zwischen 0.3 und 0.4 Volt liegen, wenn wir ihn, wie üblich, in der äquivalenten Spannung ausdrücken. Denn für den Abstand $x = 10^{-7}$ cm berechnet sich

$$\Psi = -\frac{\varepsilon^2}{4x} = -\frac{(4,8)^2 10^{-20}}{4 \cdot 10^{-7}} = -5,8 \cdot 10^{-13} \text{ erg},$$

was dem Wert 0.36 Volt entspricht.

Solange nun die Elektronenaffinität μ_- nicht als Funktion der Temperatur bekannt ist, sagt Formel (12) über die Abhängigkeit des Sättigungsstroms von der Temperatur nichts aus. Was sie aber leistet, ist die Verknüpfung des gesättigten Elektronenstroms mit der in Gleichung (4) erwähnten Potentialdifferenz zwischen zwei verschiedenen Leitern. In der Tat folgt aus (12),

---

[1] Die schon angeführte Tatsache, daß sich auch der Sättigungsstrom noch ein wenig steigern läßt, wenn man zu immer höheren Feldstärken übergeht, weist darauf hin, daß diese Annahme nicht genau zutrifft. Es ist so, als ließe sich diese Fläche noch in ihrer Lage beeinflussen.

[2] Hier ist die weitere Voraussetzung benutzt, daß jene Fläche kein merkliches Reflexionsvermögen für von außen auftreffende Ionen hat; sonst käme noch ein Faktor (1 — Reflexionsvermögen) zu dem angegebenen Wert für i hinzu. Diese Voraussetzung hat für neutrale Moleküle M. KNUDSEN (Ann. d. Phys. **47**, 697, 1915) experimentell bestätigt, und für Elektronen von den hier in Betracht kommenden geringen Geschwindigkeiten (höchstens einem Volt entsprechend) scheinen Versuche von A. GEHRTS (Ann. d. Phys. **36**, 995, 1911) diese Annahme zu rechtfertigen. Für positive Ionen ist die Frage wohl noch nie untersucht.

[3] Abgesehen von dem im Exponenten auftretenden Summanden mit Ψ findet sich diese Gleichung schon in früheren Veröffentlichungen (M. v. LAUE, Jahrb. d. Radioact. u. Elektronik **15**, 205 und 257, 1918).

wenn wir die auf zwei verschiedene Körper bezogenen Werte von μ_- und i_- mit einem und zwei Strichen unterscheiden:

$$\log \frac{i'_-}{i''_-} = \frac{1}{kT}\left[\Psi'' - \Psi' + \frac{1}{N}(\mu''_- - \mu'_-)\right] \tag{13}$$

und wenn hier die (wahrscheinlich höchstens nach Hundertsteln Volt rechnende) Differenz $\Psi'' - \Psi'$ vernachlässigt werden darf, nach (4):

$$\log \frac{i'_-}{i''_-} = \frac{\varepsilon}{kT}(\Phi' - \Phi'') \tag{14}$$

Leider sind alle Messungen auf diesem Gebiet noch so schwierig und wenig genau, daß man im Augenblick diese Methode zur Messung der Voltadifferenz nicht verwerten kann.

Erfahrungsgemäß gilt nun die Richardsonsche Formel

$$\frac{i_-}{\varepsilon} = A_- T^{1/2} e^{-\frac{b_-}{T}} \tag{15}$$

mit konstanten Werten A_- und b_-[1]. Die Fehlergrenzen sind allerdings so groß, daß man den Faktor $T^{1/2}$ auch durch T^2 ersetzen könnte. Diese Gleichung ist aus der von Riecke, Drude, Lorentz eingeführten Hypothese abgeleitet, daß die Elektronen im Metall sich wie ein ideales Gas verhalten. Bezeichnet n_0 die Molzahl dieses Gases, das im Volumen V des Metalls liegt, so hat die Konstante A_- danach den Wert:

$$A_- = \frac{n_0 N}{V}\left(\frac{k}{2\pi m_-}\right)^{1/2}$$

Wollen wir aus unserer Gleichung (12) zur Richardsonschen Formel gelangen, so müssen wir

$$-\mu_- = E_- - (kNb_- - N\Psi) - kNT\left[1 + \log\frac{(2\pi m_-)^{3/2}}{h^3} + \frac{3}{2}\log kT + \log\frac{V}{n_0 N}\right] + kNT \tag{16}$$

setzen. Dieser Ausdruck entspricht in der Tat ganz jener Vorstellung eines Gases, das sich auf einem Potentialniveau $-(kNb_- - N\Psi)$ befindet. $-\mu_- \delta n$ soll ja nach der Definition der Elektronenaffinität die Zunahme der freien Energie des Metalls sein, wenn wir ihm δn Mole Elektronen zuführen. Bei diesem Vorgang müssen zunächst die im Volumen V schon vorhandenen Elektronen komprimiert werden, und dazu gehört die Arbeit $kNT \cdot \delta n$. Sie erklärt den

[1] Nach (15) ist

$$\log\left(\frac{i_-}{\varepsilon}\right) - \frac{1}{2}\log T = \log A_- - b_-/T$$

Man erhält also eine Gerade, wenn man $\log\frac{i_-}{\varepsilon} - \frac{1}{2}\log T$ als Funktion von $1/T$ aufträgt. Die ersten Anzeichen für Abweichungen von der Geraden findet H. J. Spanner a. a. O. bei den Oxyden der Erdalkalien.

letzten Summanden rechts in Gleichung (16). Die anderen Summanden geben die freie Energie eines Mols dieses Gases. Die Hypothese vom Elektronengas im metallischen Leiter entspricht gewiß nicht mehr unseren heutigen Vorstellungen. Aber die empirische Bestätigung der RICHARDSONschen Gleichung (15) beweist, daß sie die thermodynamische Funktion μ_-, die Elektronenaffinität des Metalls, richtig zu berechnen gestattet. Und damit gewinnen auch die anderen Formeln der DRUDE-LORENTZschen Theorie der metallischen Leitung, welche sich aus ihr rein thermodynamisch mit Hilfe der Elektronenaffinität ableiten lassen, eine über jene Hypothese hinausgehende Bedeutung. Dies trifft auf die Formeln für die Voltadifferenz und die Peltierwärme zu. Die tatsächliche Bedeutung von n_0 (oder A_-) bleibt dabei selbstverständlich unerklärt.

Die Konstante b_- der RICHARDSONschen Gleichung, welche dort als die Austrittsarbeit der Elektronen gilt, kann nach (16) nicht rein eine Körperkonstante sein, sondern muß auch noch von der Oberflächenbeschaffenheit abhängen. Denn der Summand $(kNb_- - N\Psi)$ muß wie die sonst dort auftretenden Größen von der Oberflächenbeschaffenheit unabhängig sein, während Ψ davon abhängt.

Auch für den positiven Sättigungsstrom gilt Gleichung (12), sofern wir in ihr die Indices — durch + ersetzen. Die Erfahrung liefert für ihn eine Gleichung, die sich von der RICHARDSONschen nur durch die Werte von A und b unterscheidet[1]. Folglich muß für μ_+ die der Gleichung (16) entsprechende Beziehung

$$-\mu_+ = E_+ - (kNb_+ - N\Psi) - kNT\left(\frac{3}{2}\log kT + f(V)\right) \qquad (17)$$

gelten. Über die Form der Funktion $f(V)$ des Volumens läßt sich nichts aussagen.

Die freie Energie eines festen Körpers ist nach der quantentheoretischen Statistik[2] pro Mol bei hohen Temperaturen

$$E_0 - kNT\left(1 + 3\log\frac{kT}{h\nu_m}\right). \qquad (18)$$

E_0 bedeutet die Energie beim absoluten Nullpunkt. Die DEBYEsche Maximalschwingungszahl ν_m muß nach RATNOWSKY und GRÜNEISEN[3] eine Funktion des Volumens sein. Andererseits ist

$$-(\mu_- + \mu_+) = E_- + E_+ - (kNb_- - N\Psi) - (kNb_+ - N\Psi) + kNT(3\log kT + F(V)) \quad (19)$$

nach der Definition von μ_- und μ_+ gleich derselben freien Energie. ($F(V)$ bedeutet eine andere Funktion des Volumens.) Die Ausdrücke (18) und (19) stimmen überein, wenn

$$(kNb_- - N\Psi) + (kNb_+ - N\Psi) = E_- + E_+ - E_0 \qquad (20)$$

---

[1] H. J. SPANNER, Ann. d. Phys. a. a. O.

[2] M. PLANCK, Vorlesungen über die Theorie der Wärmestrahlung, 5. Auflage 1923, S. 201 u. f., besonders Gl. (461).

[3] S. RATNOWSKY, Ann. d. Phys. 38, 637, 1912; E. GRÜNEISEN, Rapports et discussions de Conseil de physique Solvay, 1913, S. 243.

ist. Rechts steht hier die Arbeit, die wir aufwenden müssen, um beim absoluten Nullpunkt den Körper in positive Ionen und Elektronen aufzulösen; links findet sich die Summe der aus der Richardsonschen Formel für den positiven und den negativen Sättigungsstrom zu entnehmenden Austrittsarbeiten, aber noch korrigiert in Rücksicht auf die gegen die Bildkraft zu leistende Arbeit.

Der Faktor $3kNT$ von $\log kT$ in (18) entspricht dem Wert $3kN$ der Atomwärme, also der Regel von Dulong und Petit. Tatsächlich dürfte die Atomwärme bei Glühtemperaturen meist etwas höher sein, so daß (18) nur angenähert gilt. Trotzdem scheint es uns von Bedeutung, daß $\log T$ nach (19) in dem Ausdruck für $-(\mu_- + \mu_+)$ denselben Faktor enthält. In der Richardsonschen Formel (15) ist nämlich, wie betont, der Exponent von T einigermaßen unsicher; und diese Zweifel übertragen sich auf die Faktoren $\frac{3}{2}kNT$ von $\log T$ in den Ausdrücken (17) und (18). Daß ihre Summe aber gerade den nach dem Dulong-Petitschen Gesetz zu erwartenden Wert $3kNT$ in (19) ergibt, weist doch wohl darauf hin, daß der Exponent $^1/_2$ von T in (15) von der Wahrheit nicht allzuweit abweicht. Jedenfalls läßt sich behaupten: Sind a_- und a_+ die Werte des Exponenten von T in den Richardsonschen Formeln für den negativen und für den positiven Sättigungsstrom, so muß $a_- + a_+ = 1$ sein.

5. Neuerdings hat Goetz Versuche über das Verhalten des negativen Sättigungsstroms bei dem Schmelzpunkt oder anderen Umwandlungspunkten des leitenden Körpers veröffentlicht[1]. Wir wollen hier untersuchen, was die Theorie dafür erwarten läßt.

Wir behaupten, daß die Potentialdifferenz zwischen zwei Phasen desselben Körpers, die im Gleichgewicht miteinander sind, Null ist[2]. Angenommen nämlich, sie hätte einen von Null verschiedenen Wert P, so ließe sich ein Perpetuum mobile zweiter Art bauen.

Zum Beweise denken wir uns den Körper in zwei Hohlkugeln A und B vorliegend. Ihr Abstand sei groß gegen ihre Halbmesser a, und sie mögen beide in demselben Hohlraum liegen, dessen äußere Wandung wieder aus dem gleichen Material besteht. In dem Hohlraum herrscht der Druck des gesättigten Dampfes. Durch dünne Drähte desselben Stoffs sollen A und B mit der Hülle verbunden sein. Wir unterscheiden an A einen die innere Höhlung umgebenden, nicht aber an die äußere Begrenzung von A heranreichenden Teil A_1, und an B einen ebensolchen Teil B_1, von den äußeren Teilen A_2 und B_2. Das Ganze befinde sich bei der Schmelztemperatur, habe aber zunächst noch den festen Aggregatzustand.

Wir denken zunächst an verhältnismäßig niedrige Temperaturen, bei denen weder positive Ionen noch Elektronen in merklicher Zahl ausgesandt werden. Durch isotherme Wärmezufuhr schmelzen wir nun B_1. Auch wenn sich dabei die Potentialdifferenz P zwischen B_1 und den fest gebliebenen Teilen

[1] A. Goetz, Phys. Z., S. **24**, 377, 1923.
[2] Über die Bedeutung dieser Potentialdifferenz vgl. die Anmerkung 1 auf Seite 338.

A_1, A_2 und B_2 ausbildet, entsteht auf diese Weise kein elektrisches Feld. Denn die Höhlungen in A und B bleiben auf jeden Fall feldfrei. Infolgedessen können wir uns nun eine virtuelle Verschiebung von δn Molen, die keine elektrische Ladung tragen, also Elektronen und positive Ladungsträger in gleichen Mengen enthalten, von A_1 nach B_1 bewirkt denken. Dafür gelten streng die üblichen Betrachtungen der Thermodynamik, aus denen die Existenz einer bestimmten Schmelztemperatur folgt, solange man den Druck unverändert läßt. Und da das Gleichgewicht zwischen A_1 und B_1 samt dem Druck des weiteren erhalten bleibt, so bleibt auch die Temperatur nicht nur in A_1 und B_1 sondern auch in A_2 und B_2 unveränderlich erhalten.

Nun schmelzen wir durch weitere Wärmezufuhr den Rest des Körpers B. Dabei bildet sich nun nach Voraussetzung die Potentialdifferenz P zwischen B einerseits, A und der Hülle andererseits aus.

Dann haben wir nun in dem Hohlraum ein gewöhnliches elektrostatisches Feld von der Energie $\frac{1}{2} aP^2$. An der Kugel B beträgt die Feldstärke $\frac{P}{a}$, und der von ihr ausgeübte Zug ist $\frac{1}{2} \frac{P^2}{a^2}$; man kann ihn also durch Vergrößerung von a beliebig klein machen, während die Energie des Feldes dabei proportional zu a wächst. Eine Schmelzpunktveränderung durch Druckveränderung ist also ausgeschlossen.

Sodann unterbrechen wir die leitende Verbindung zwischen B und der Hülle des Hohlraums und lassen durch Wärmeentziehung B wieder fest werden. Es bleibt dabei die Ladung von B und somit auch die Energie des elektrischen Feldes erhalten. Wir haben also ohne sonstige Veränderung rein unter Verbrauch von Wärme elektrische Energie erzeugt, die bekanntlich mit mechanischer Arbeit thermodynamisch äquivalent ist. Die gegen den Dampfdruck zu leistende Ausdehnungsarbeit tritt nämlich zweimal auf, und zwar in gleichem Betrage, aber mit entgegengesetztem Vorzeichen.

Für hohe Temperaturen, bei denen positive und negative Ionen in erheblicher Zahl ausgesandt werden, müssen wir die Überlegung ein wenig anders führen. Dann ist nämlich jede Oberfläche mit einer geladenen Schicht bedeckt, wie wir sie im Abschnitt 2 in Fig. 3 dargestellt haben. Alle Potentialgefälle liegen in ihr, während sonst konstantes Potential herrscht. Wir haben schon damals betont, daß trotzdem der auf die Wandung ausgeübte Druck derselbe ist, welcher in dem ungeladenen Teil des Dampfes herrscht. Für Konstanz des Drucks ist somit auch jetzt gesorgt.

Schmelzen wir nunmehr die Kugel B, so muß sich diese geladene Schicht an ihr in ihrer Zusammensetzung ändern, sofern die Potentialdifferenz P zwischen B und A auftritt. Die Strömungen, welche diese Änderung bewirken, lassen sich aber zur Gewinnung mechanischer Arbeit ausnutzen. Lassen wir dann die Kugel B wieder erstarren, so treten die entgegengesetzten Veränderungen auf, welche nochmals zur Gewinnung mechanischer Arbeit Gelegenheit bieten. Da sonst das System wieder im Anfangszustand ist, ist das Perpetuum mobile auch hiernach möglich.

Jene Potentialdifferenz ist also Null, nicht nur im Schmelz-, sondern in jedem Umwandlungspunkt; und es haben weiter nach Gleichung (4) zwei Phasen desselben Stoffs im Umwandlungspunkt die gleiche Elektronenaffinität. Da nach der bekannten Gleichgewichtsbedingung der Thermodynamik ihre freien Energien pro Mol $(-(\mu_- + \mu_+))$ dann übereinstimmen[1], so stimmen sie dann weiter in dem Betrage von μ_+ überein. Auf Grund der Gleichung (13) und der entsprechenden für den positiven Sättigungsstrom schließen wir, daß solche Phasen denselben Sättigungsstrom von Elektronen wie von positiven Ionen ergeben. Voraussetzung dafür ist freilich, was aber auch sehr nahe zutreffen dürfte, daß die gegen die Bildkraft zu leistende Austrittsarbeit Ψ bei beiden Phasen übereinstimmt.

Nicht übereinzustimmen brauchen bei ihnen die Differentialquotienten $\frac{\partial \mu'_-}{\partial T}$ und $\frac{\partial \mu''_-}{\partial T}$, deren Differenz nach (5) die Peltierwärme bestimmt. Letztere könnte also auch zwischen ihnen auftreten.

Die Versuche von Goetz ergeben nun in der Tat, daß die Kurven, welche den negativen Sättigungsstrom als Funktion der Temperatur angeben, im Schmelzpunkt von Eisen, Kupfer und Mangan stetig sind; nur ihre Tangentenrichtungen zeigen einen Sprung, der, falls er sich bestätigte, nach Gleichung (5) das Auftreten einer Peltierwärme zwischen festem und geschmolzenem Metall bewiese. Bei anderen Umwandlungspunkten allerdings glaubt der Autor auch Sprünge in der Stromkurve selbst zu finden. Doch scheinen diese Versuchsergebnisse noch der Nachprüfung zu bedürfen.

[1] Bei dieser Formulierung der Gleichgewichtsbedingung vernachlässigen wir die Arbeit, welche der Druck des gesättigten Dampfes bei der mit dem Schmelzen verbundenen Volumenänderung leistet. Eine ganz ähnliche Vernachlässigung haben wir uns schon bei der Ableitung der Gleichungen (2) gestattet; denn die Zuführung von δn_+ Molen von Ionen vergrößert natürlich das Volumen des leitenden Körpers.

Ausgegeben am 15. Januar 1924.

SITZUNGSBERICHTE
DER PREUSSISCHEN
AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.
1923

XXXIII. Sitzung der physikalisch-mathematischen Klasse. 13. Dezember.

Vorsitzender Sekretar: Hr. Rubner.

*1. Hr. Planck sprach über die Natur der Wärmestrahlung.

Es wird zunächst das statistische Bildungsgesetz abgeleitet, welches die Koeffizienten einer Fourierschen Reihe erfüllen müssen, wenn der Wert des mittleren Schwankungsquadrats den Forderungen der Quantentheorie Genüge leisten soll, und sodann ein Beispiel einer derartigen Reihe angegeben.

2. Sodann legte derselbe eine Abhandlung vor: Die Energieschwankungen bei der Superposition periodischer Schwingungen.

Aufstellung des statistischen Gesetzes für die Energieschwankungen einer gegebenen Anzahl von übereinandergelagerten Sinuswellen mit gleichen Amplituden und nahezu gleichen Perioden.

3. Endlich überreichte Hr. Planck eine Bemerkung zur Quantenstatistik der Energieschwankungen.

Berechnung des Quantengesetzes der Energieschwankungen für ein Gebilde mit einer beliebigen Anzahl von Freiheitsgraden.

4. Hr. Einstein legte eine Arbeit vor über das Thema: »Bietet die Feldtheorie Möglichkeiten für die Lösung des Quantenproblems?«

Die Ansicht wird vertreten, daß den Tatsachen der Quantenerscheinungen möglicherweise durch eine Theorie entsprochen werden könnte, die auf partielle Differentialgleichungen gegründet ist. Der Grundtatsache, daß die Anfangsbedingungen gemäß der Quantentheorie nicht beliebig wählbar sind, wird durch »Überbestimmung« Rechnung getragen; d. h. die Variabeln werden mehr Gleichungen unterworfen, als für die bloße Bestimmung der zeitlichen Fortsetzung nötig wäre. Mittels der Methoden der allgemeinen Relativitätstheorie wird ein Gleichungssystem dieser Art abgeleitet, die Entscheidung über seine Brauchbarkeit aber einstweilen offengelassen.

Die Energieschwankungen bei der Superposition periodischer Schwingungen.

Von Max Planck.

Die Frage, nach welchem statistischen Gesetz die Energie einer gegebenen Anzahl von übereinandergelagerten periodischen Wellen mit gleichen Energieen und kleinen zufälligen Schwingungszahldifferenzen zeitlich hin und her schwankt, ist wohl noch niemals näher behandelt worden, vermutlich weil ihre allgemeine Lösung der Rechnung allzu große Schwierigkeiten bietet. Und doch bildet ihre Beantwortung eine wichtige Vorbedingung für ein näheres Eindringen in das zur Zeit noch dunkle Gebiet der Strahlungsschwankungen. Daher möchte ich im folgenden einen allgemeinen Ausdruck für dieses Gesetz aufstellen und denselben für einige besondere Fälle näher untersuchen.

Das Problem läßt sich allgemein folgendermaßen formulieren. Wenn eine gegebene Anzahl p von periodischen Wellen mit der nämlichen Energie ε und nahezu gleicher Frequenz sich übereinanderlagert, so werden wegen der gegenseitigen Interferenz in der resultierenden Energie Schwankungen auftreten, und die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die Energie der resultierenden Schwingung zu irgendeiner Zeit einen zwischen E und $E+dE$ befindlichen Wert besitzt, wird durch einen Ausdruck von der Form $W(E)\cdot dE$ gegeben sein, wobei:

$$\int_0^\infty W(E)\cdot dE = 1\,. \tag{1}$$

Es handelt sich darum, die Funktion $W(E)$ zu finden, für jeden gegebenen Wert der ganzen Zahl p.

Nehmen wir zunächst $p = 1$, so haben wir den trivialen Fall einer einzigen Schwingung mit der Energie ε. Die resultierende Energie E ist dann konstant $= \varepsilon$, und die entsprechende Wahrscheinlichkeitsfunktion $W_1(E)$ ist für alle Werte von E gleich Null, mit Ausnahme des Wertes $E = \varepsilon$, für welchen sie unendlich groß wird.

Für $p = 2$ setzen sich die beiden Schwingungen zusammen zu einer einzigen Schwingung mit periodisch wechselnder Amplitude, d. h. sie bilden periodische Schwebungen. Nach dem Interferenzgesetz ist dann die resultierende Energie:

$$E = 2\varepsilon + 2\varepsilon\cos\phi = 4\varepsilon\cos^2\frac{\phi}{2}\,, \tag{2}$$

wo ϕ die langsam und proportional der Zeit sich ändernde Phasendifferenz der beiden Partialschwingungen bedeutet. Um eine eindeutige Zuordnung der Größen E und ϕ zu erzielen, können wir $0 < \phi < \pi$ annehmen, wobei dann ϕ zwischen den beiden Grenzen 0 und π mit konstanter Geschwindigkeit hin und her schwankt. Dann ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß in einem beliebig herausgegriffenen Zeitpunkt die Phasendifferenz zwischen ϕ und $\phi + d\phi$ liegt, gleich $\frac{d\phi}{\pi}$, und dementsprechend, mit Einführung von E und dE statt ϕ und $d\phi$ aus (2), die gesuchte Wahrscheinlichkeit:

$$\frac{d\phi}{\pi} = W_2(E)\,dE = \frac{1}{\pi}\,\frac{dE}{\sqrt{4\varepsilon E - E^2}}. \tag{3}$$

Dieser Ausdruck ist deshalb besonders bemerkenswert, weil die extremen Werte von E, nämlich 0 und 4ε, eine unendlich große Wahrscheinlichkeit besitzen, selbstverständlich ohne daß dadurch die Gleichung (1) verletzt wird, während diejenigen Werte von E, welche dem Mittelwert

$$\overline{E} = \int_0^{4\varepsilon} E \cdot W_2(E) \cdot dE = 2\varepsilon \tag{4}$$

naheliegen, verhältnismäßig am seltensten vorkommen. Für alle Werte von $E > 4\varepsilon$ ist die Wahrscheinlichkeit $W_2 = 0$.

Zur Berechnung des Schwankungsgesetzes für $p = 3$ Schwingungen wollen wir zunächst eine allgemeine Reduktionsformel entwickeln, welche den Ausdruck von $W_{p+1}(E)$ aus demjenigen von $W_p(E)$ zu finden gestattet. Die Ableitung dieser Formel geht aus von der Überlegung dessen, was geschieht, wenn zu p vorhandenen Schwingungen sich eine neue von ihnen unabhängige Schwingung hinzugesellt. Die p Schwingungen bilden zusammen eine einzige nahezu periodische Schwingung mit irgendwie langsam veränderlicher Amplitude und Phase. Wenn nun in irgendeinem Zeitpunkt ihre Energie gleich E' ist, so entsteht aus ihr und aus der neu hinzutretenden Schwingung von der Energie ε wiederum eine nahezu periodische Schwingung mit der Energie:

$$E = E' + \varepsilon + 2\sqrt{\varepsilon E'}\cos\phi, \tag{5}$$

wo ϕ, die jeweilige Phasendifferenz, wiederum als zwischen 0 und π liegend angenommen werden kann. Da nun die hinzugetretene Schwingung gänzlich unabhängig ist von den übrigen, so muß die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die Phasendifferenz in irgendeinem Zeitpunkt zwischen ϕ und $\phi + d\phi$ liegt, wiederum gleich $\frac{d\phi}{\pi}$ sein, und es ergibt sich daher für die Wahrscheinlichkeit dafür, daß, bei gegebenem E', die resultierende Energie zwischen E und $E + dE$ liegt, aus (5) der Ausdruck:

$$\frac{d\phi}{\pi} = \frac{dE}{\pi\sqrt{4\varepsilon E' - (E - E' - \varepsilon)^2}}, \tag{6}$$

der natürlich für $E' = \varepsilon$ in (3) übergeht.

Da nun weiter die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die Energie der p Schwingungen zwischen E' und $E'+dE'$ liegt, durch $W_p(E')\cdot dE'$ gegeben wird, so ergibt sich für die Wahrscheinlichkeit, daß die Energie der $p+1$ Schwingungen zwischen E und $E+dE$ liegt, aus (6) nach einer kleinen Umformung der Ausdruck:

$$W_{p+1}(E)\cdot dE = \frac{dE}{\pi}\cdot\int\frac{W_p(E')\cdot dE'}{\sqrt{\{(\sqrt{E}+\sqrt{\varepsilon})^2-E'\}\cdot\{E'-(\sqrt{E}-\sqrt{\varepsilon})^2\}}}. \quad (7)$$

Diese Formel gilt für alle Werte von E zwischen 0 und $(p+1)^2\varepsilon$. Für $E>(p+1)^2\varepsilon$ ist $W_{p+1}(E)=0$. Für $E<(p+1)^2\varepsilon$ ist die untere Grenze des Integrals $E'=(\sqrt{E}-\sqrt{\varepsilon})^2$; die obere Grenze aber ist verschieden, je nachdem

$$E \lesseqgtr (p-1)^2\varepsilon. \quad (8)$$

Für das obere Ungleichheitszeichen ist die obere Grenze $E'=(\sqrt{E}+\sqrt{\varepsilon})^2$, für das untere Ungleichheitszeichen ist aber die obere Grenze nur $E'=p^2\varepsilon$. Denn das ist der größte Wert, den E' überhaupt haben kann, wenn $W_p(E')$ von Null verschieden sein soll.

Die Reduktionsformel (7) ermöglicht es, falls der Ausdruck von W_p bekannt ist, den von W_{p+1} zu berechnen. Da nun W_p für $p=2$ durch (3) gegeben wird, so kann man aus (7) schrittweise vorwärtsgehend $W_p(E)$ für jeden beliebigen Wert von p berechnen, und das vorgelegte Problem ist prinzipiell gelöst. Allerdings führt die Ausrechnung bald auf sehr komplizierte Funktionen.

Für $p=2$ erhält man z. B. aus (7) mit Benutzung von (3):

$$W_3(E)dE = \frac{dE}{\pi^2}\cdot\int\frac{dE'}{\sqrt{E'(4\varepsilon-E')\cdot\{(\sqrt{E}+\sqrt{\varepsilon})^2-E'\}\cdot\{E'-(\sqrt{E}-\sqrt{\varepsilon})^2\}}}, \quad (9)$$

ein elliptisches Integral erster Gattung, welches sich nach (8) für $0<E<\varepsilon$ auf die Normalform

$$\frac{\varkappa\cdot dE}{2\pi^2\sqrt{\varepsilon\sqrt{\varepsilon E}}}\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\phi}{\sqrt{1-\varkappa^2\sin^2\phi}} \quad (10)$$

$$\text{mit}\quad \frac{1}{\varkappa^2} = 1+\frac{(3\sqrt{\varepsilon}+\sqrt{E})\cdot(\sqrt{\varepsilon}-\sqrt{E})^3}{16\varepsilon\sqrt{\varepsilon E}}, \quad (11)$$

für $\varepsilon<E<9\varepsilon$ auf die Normalform

$$\frac{dE}{2\pi^2\sqrt{\varepsilon\sqrt{\varepsilon E}}}\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\phi}{\sqrt{1-\varkappa^2\sin^2\phi}} \quad (12)$$

mit

$$\varkappa^2 = 1-\frac{(3\sqrt{\varepsilon}+\sqrt{E})\cdot(\sqrt{E}-\sqrt{\varepsilon})^3}{16\varepsilon\sqrt{\varepsilon E}} \quad (13)$$

reduziert.

Wenn E von 0 bis ε ansteigt, wächst die Wahrscheinlichkeit W_3 von $\frac{1}{\sqrt{3}\pi\varepsilon}$ bis ∞. Beim weiteren Ansteigen von E sinkt W_3 stetig auf $\frac{1}{4\sqrt{3}\pi\varepsilon}$ herab und springt beim Überschreiten des Grenzwertes 9ε auf Null.

Für größere Werte von p wird der Ausdruck von $W_p(E)$ sehr kompliziert. Nur der Mittelwert der Energie:

$$\overline{E} = \int_0^\infty E \cdot W_p(E)\, dE = p\varepsilon \tag{14}$$

und das mittlere Schwankungsquadrat der Energie:

$$\overline{(E-\overline{E})^2} = p^2 \varepsilon^2 \tag{14a}$$

sowie andere Mittelwerte lassen sich unmittelbar aus der FOURIERschen Reihe für die Energie als Funktion der Zeit ableiten.

Falls man aber p sehr groß werden läßt, ergibt sich wieder ein sehr einfacher Ausdruck für $W_p(E)$, wie im folgenden noch gezeigt werden soll. Wir beschränken die Betrachtung zunächst auf solche Werte von E, die von der Größenordnung $\overline{E}$ sind, also der Bedingung

$$\varepsilon << E << p^2 \varepsilon \tag{15}$$

Genüge leisten. Führen wir dann in der Rekursionsformel (7) statt E' als Integrationsvariable ein:

$$\xi = \frac{E' - E - \varepsilon}{2\sqrt{\varepsilon E}}, \tag{16}$$

so lautet die Formel:

$$W_{p+1}(E) \cdot dE = \frac{dE}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{W_p(E + 2\sqrt{\varepsilon E} \cdot \xi + \varepsilon) \cdot d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}.$$

Hier ist das Argument von W_p nur wenig von E verschieden; wir können also das Integral gleichsetzen der Entwicklung:

$$W_p(E) \cdot \int_{-1}^{+1} \frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} + \frac{\partial W_p(E)}{\partial E} \cdot \int_{-1}^{+1} \frac{2\sqrt{\varepsilon E} \cdot \xi + \varepsilon}{\sqrt{1-\xi^2}} \cdot d\xi + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 W_p(E)}{\partial E^2} \cdot \int_{-1}^{+1} \frac{(2\sqrt{\varepsilon E} \cdot \xi + \varepsilon)^2}{\sqrt{1-\xi^2}} \cdot d\xi$$

$$= W_p(E) \cdot \pi + \frac{\partial W_p(E)}{\partial E} \cdot \varepsilon\pi + \frac{\partial^2 W_p(E)}{\partial E^2} \cdot \left(\varepsilon E \pi + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \pi\right)$$

und erhalten dann, mit Weglassung eines Gliedes von kleinerer Größenordnung:

$$W_{p+1} = W_p + \varepsilon \frac{\partial W_p}{\partial E} + \varepsilon E \frac{\partial^2 W_p}{\partial E^2}. \tag{17}$$

Führen wir jetzt statt der Ordnungszahl p aus (14) die mittlere Energie $\overline{E}$ ein, so können wir schreiben:

$$W_{p+1} - W_p = \frac{\partial W}{\partial \overline{E}} \cdot \Delta \overline{E} = \frac{\partial W}{\partial \overline{E}} \cdot \varepsilon,$$

woraus sich die Differentialgleichung ergibt:

$$\left(\frac{\partial W}{\partial \bar{E}}\right)_E = \left(\frac{\partial W}{\partial E}\right)_{\bar{E}} + E\left(\frac{\partial^2 W}{\partial E^2}\right)_{\bar{E}}, \tag{18}$$

welche zur Bestimmung von W als Funktion von E und $\bar{E}$ dienen kann.

Da die Gleichung 2 unabhängige Variable enthält, so läßt sie in dem Ausdruck von W noch eine Funktion von E und $\bar{E}$ unbestimmt. Doch können wir die darin liegende Willkür eliminieren, wenn wir bedenken, daß das Produkt $W \cdot \bar{E}$ (oder auch $W \cdot E$) nach (1) eine reine Zahl ist und daher nur von dem Verhältnis $E : \bar{E}$ abhängen kann. Denn die Konstante ε tritt deshalb nicht in W auf, weil sie gegen E und $\bar{E}$ unendlich klein ist.

Führen wir daher statt W die Größe

$$W \cdot \bar{E} = y \tag{19}$$

als abhängige Variable in die Differentialgleichung (18) ein und stellen außerdem die Bedingung, daß y nur von dem Verhältnis

$$\frac{E}{\bar{E}} = x \tag{20}$$

abhängt, so geht die partielle Differentialgleichung über in die gewöhnliche Differentialgleichung:

$$x \frac{d^2 y}{dx^2} + (x+1) \cdot \frac{dy}{dx} + y = 0,$$

deren allgemeines Integral ist:

$$y = \alpha \cdot e^{-x} \int_1^x \frac{e^{\xi}}{\xi} d\xi + \beta \cdot e^{-x}, \tag{21}$$

wo α und β die Integrationskonstanten bedeuten.

Da nun y jedenfalls positiv ist, auch für kleine Werte von x, so ist $\alpha = 0$, und da ferner nach (1), (14), (19) und (20)

$$\int_0^\infty y\,dx = 1 \quad \text{und} \quad \int_0^\infty xy\,dx = 1, \tag{22}$$

so ist $\beta = 1$, und wir erhalten als Lösung der behandelten Aufgabe die Wahrscheinlichkeit dafür, daß bei sehr vielen übereinandergelagerten periodischen Schwingungen die Energie zu irgendeiner Zeit zwischen E und $E + dE$ liegt:

$$W(E) \cdot dE = \frac{dE}{\bar{E}} \cdot e^{-\frac{E}{\bar{E}}}, \tag{23}$$

ein Resultat, das mit dem Ergebnis allgemeinerer statistischer Überlegungen übereinstimmt.

Bemerkung zur Quantenstatistik der Energieschwankungen.

Von Max Planck.

Die Energieschwankungen in einem Felde stationärer monochromatischer Wärmestrahlung sind zuerst von A. Einstein[1] statistisch behandelt worden, und zwar auf Grund des Zusammenhanges zwischen Entropie und Wahrscheinlichkeit. Diese Methode ist, wie eine jede thermodynamische Betrachtung, nur auf ein Gebilde mit sehr vielen Freiheitsgraden anwendbar. Später hat M. v. Laue[2] gezeigt, wie man zur Ableitung der Gesetze der Energieschwankungen anstatt der Bezugnahme auf die Thermodynamik eine direkte Wahrscheinlichkeitsbetrachtung, ganz ohne die Einführung des Begriffes der Temperatur und der Entropie, benutzen kann. Indessen hat v. Laue den Ausdruck des Schwankungsgesetzes nur für ein Gebilde von einem einzigen Freiheitsgrad aufgestellt; für Gebilde von mehreren Freiheitsgraden hat er sich darauf beschränkt, den Mittelwert der Quadrate der Energieschwankungen abzuleiten.

In der folgenden Notiz beabsichtige ich, da mir eine entsprechende Vervollständigung in der Literatur bisher nicht begegnet ist, wesentlich auf dem von v. Laue eingeschlagenen Wege, also ohne Benutzung thermodynamischer Begriffe, für ein Gebilde von einer beliebigen Anzahl von Freiheitsgraden das quantenstatistische Gesetz der Energieschwankungen im statistisch stationären Zustand zu entwickeln und zu zeigen, daß es für einen einzigen Freiheitsgrad mit dem v. Laueschen, für viele Freiheitsgrade mit dem Einsteinschen Ausdruck übereinstimmt.

Wir gehen aus von einem monochromatisch schwingenden Gebilde mit einem einzigen Freiheitsgrad, z. B. einem geradlinigen Oszillator von der Schwingungszahl ν, welches aus einer sehr großen Schar von $\mathfrak{N}$ gleichartigen, im statistischen Gleichgewicht befindlichen Gebilden beliebig herausgegriffen gedacht wird. Nach der ersten Fassung der Quantentheorie ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß der Oszillator in irgendeinem Zeitpunkt die Energie $\varepsilon = p \cdot h\nu$ besitzt:[3]

$$w_p = \frac{h\nu}{\bar{\varepsilon} + h\nu}\left(\frac{\bar{\varepsilon}}{\bar{\varepsilon} + h\nu}\right)^p = \frac{h\nu}{\bar{\varepsilon}}\left(\frac{\bar{\varepsilon}}{\bar{\varepsilon} + h\nu}\right)^{p+1}, \tag{1}$$

[1] A. Einstein, Phys. Zeitschr. **10**, p. 185, 1909.

[2] M. v. Laue, Verh. d. Deutschen Phys. Ges. **17**, p. 198, 1915.

[3] M. v. Laue, l. c. p. 200. Gleichung (4).

wo $p = 0, 1, 2, 3, \cdots$ und $\bar{\varepsilon}$ die mittlere Energie des Oszillators bedeutet. Hiernach ist w_p am größten für $p = 0$ $(\varepsilon = 0)$, und nimmt mit wachsender Energie in geometrischer Reihe unbegrenzt ab.

Um den für einen einzigen Freiheitsgrad gültigen Ausdruck (1) auf ein Gebilde mit einer beliebigen Anzahl N von Freiheitsgraden zu verallgemeinern, greifen wir statt eines einzigen Oszillators N derartige Oszillatoren aus der Schar von $\mathfrak{N}$ $(\gg N)$ Oszillatoren beliebig heraus und betrachten dieselben zusammenfassend als ein einziges Gebilde von N Freiheitsgraden. Wenn wir jetzt nach der Energie $E = P \cdot h\nu$ dieses zusammengesetzten Gebildes in irgendeinem Zeitpunkt fragen, so müssen wir bedenken, daß ein bestimmter Wert der Energie des Gebildes im allgemeinen auf sehr verschiedene Weise zustande kommen kann, da die Energie sich ganz verschieden auf die einzelnen Oszillatoren des Gebildes verteilen kann. Setzen wir nämlich:

$$P = p_1 + p_2 + p_3 + \cdots + p_N, \tag{2}$$

und verstehen unter $p_1, p_2, \cdots p_N$ die Zahl der Energieelemente, welche der erste, zweite, $\cdots$ N-te Oszillator besitzt, so entsprechen einem bestimmten P, d. h. einer bestimmten Energie des Gebildes,

$$\frac{N(N+1)\cdots(N+P-1)}{1 \cdot \;\; 2 \;\; \cdots \;\; P} = \frac{(N+P-1)!}{(N-1)!\,P!} \tag{3}$$

verschiedene Verteilungen der Energie E auf die einzelnen Oszillatoren. Für jede einzelne bestimmte Verteilung $p_1, p_2, \cdots p_N$ wird aber die Wahrscheinlichkeit ausgedrückt durch das Produkt der auf alle N Oszillatoren bezüglichen Wahrscheinlichkeiten (1), d. h. durch:

$$\prod_{i=1}^{i=N} \frac{h\nu}{\bar{\varepsilon}} \left(\frac{\bar{\varepsilon}}{\bar{\varepsilon}+h\nu}\right)^{p_i+1} = \left(\frac{h\nu}{\bar{\varepsilon}}\right)^N \left(\frac{\bar{\varepsilon}}{\bar{\varepsilon}+h\nu}\right)^{P+N}. \tag{4}$$

Folglich ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit dafür, daß das Gebilde von N Freiheitsgraden in irgendeinem Zeitpunkt die Energie $E = Ph\nu$ besitzt, das Produkt von (3) und (4), nämlich:

$$w_P = \frac{(N+P-1)!}{(N-1)!\,P!} \left(\frac{Nh\nu}{\bar{E}}\right)^N \left(\frac{\bar{E}}{\bar{E}+Nh\nu}\right)^{P+N}, \tag{5}$$

wo nun $\bar{E} = N \cdot \bar{\varepsilon}$ die mittlere Energie des Gebildes bedeutet.

Für den Unterschied der Wahrscheinlichkeitsgrößen (1) und (5) ist besonders charakteristisch der Umstand, daß bei mehreren Freiheitsgraden das Maximum der Wahrscheinlichkeit nicht mehr, wie bei einem einzigen Freiheitsgrad, bei $E = 0$ liegt, sondern, bei bestimmter mittlerer Energie, bei um so größeren Werten von E, je größer die Anzahl der Freiheitsgrade ist. Dabei rückt der dem Maximum von w entsprechende Wert von E immer näher an die mittlere Energie $\bar{E}$ heran, bleibt aber stets kleiner als diese. Zugleich wird das Maximum immer steiler, d. h. die Energiewerte, welche von dem Maximalwerte merklich abweichen, werden immer seltener.

Der Mittelwert des Quadrats der Energieschwankungen ist

$$Q = \overline{(E-\bar{E})^2} = \bar{E^2} - \bar{E}^2$$
$$= \sum_{P=0}^{\infty} w_P \cdot E^2 - \bar{E}^2 .$$

Dies ergibt mit Einsetzung des Wertes von w_P aus (5):

$$Q = h\nu\bar{E} + \frac{\bar{E}^2}{N}, \quad \text{wie bekannt.}$$

Daß sich aus dem Schwankungsgesetz (5) für $N = 1$ der v. LAUEsche Ausdruck (1) ergibt, ist unmittelbar ersichtlich. Daß aber für große Werte von N das eingangs erwähnte EINSTEINsche Schwankungsgesetz resultiert, soll noch im folgenden gezeigt werden.

Wir nehmen also jetzt N und P, folglich auch E, gehörig groß an, doch so, daß das Verhältnis

$$\frac{P}{N} = \frac{E}{Nh\nu} = \alpha \tag{6}$$

im allgemeinen einen endlichen Wert besitzt.

Mit Einführung von α und Benutzung der STIRLINGschen Formel für große n:

$$n! \doteq \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} \tag{7}$$

findet man dann aus (5), mit Vernachlässigung unwesentlicher Glieder:

$$w_P = \left(\frac{\bar{\alpha}}{\alpha}\right)^{\alpha N} \cdot \left(\frac{1+\alpha}{1+\bar{\alpha}}\right)^{(1+\alpha)N} : \sqrt{2\pi\alpha(1+\alpha)N}, \tag{8}$$

und daraus durch Multiplikation mit dem Faktor

$$1 = \Delta P = \frac{\Delta E}{h\nu} = N d\alpha$$

die Wahrscheinlichkeit, daß die Energie des Gebildes zwischen E und $E + dE$ liegt:

$$W(E)\,dE = \left(\frac{\bar{\alpha}}{\alpha}\right)^{\alpha N} \cdot \left(\frac{\alpha+1}{\bar{\alpha}+1}\right)^{(\alpha+1)N} \cdot \sqrt{\frac{N}{2\pi\alpha(1+\alpha)}} \cdot d\alpha . \tag{9}$$

Diese Funktion von α besitzt wegen der Größe von N im allgemeinen äußerst kleine Werte. Nur in der unmittelbaren Nähe von $\bar{\alpha}$ wird sie merklich von Null verschieden, entsprechend dem Maximum der Wahrscheinlichkeit.

Um weiterhin mit endlichen Größen rechnen zu können, setzen wir:

$$\alpha - \bar{\alpha} = \sqrt{\frac{2\bar{\alpha}(\bar{\alpha}+1)}{N}} \cdot \xi \tag{10}$$

und betrachten ξ im allgemeinen als endlich, positiv oder negativ. Dann erhalten wir aus (9), mit Vernachlässigung von Gliedern kleinerer Größenordnung:

$$W(E)dE = \frac{e^{-\xi^2} d\xi}{\sqrt{\pi}}, \tag{11}$$

wobei nach (10) und (6):

$$\xi = (E - \bar{E}) \cdot \sqrt{\frac{N}{2\bar{E}(\bar{E} + Nh\nu)}}. \tag{12}$$

Bei sehr vielen Freiheitsgraden fällt also das Maximum der Energie mit der mittleren Energie ($\xi = 0$) zusammen, und die Abweichungen von diesem Wert, nach beiden Seiten symmetrisch, genügen dem Gaussschen Fehlergesetz.

Vergleicht man den Ausdruck (11) mit dem von A. Einstein auf thermodynamischem Wege abgeleiteten Schwankungsgesetz[1], so ergibt sich volle Übereinstimmung, falls man bedenkt, daß die Entropie des Gebildes den Wert besitzt:

$$\sigma = k\left\{\left(N + \frac{\bar{E}}{h\nu}\right)\log\left(N + \frac{\bar{E}}{h\nu}\right) - N\log N - \frac{\bar{E}}{h\nu}\log\frac{\bar{E}}{h\nu}\right\}.$$

[1] A. Einstein, l. c. p. 188, letzte Gleichung unten. Im Exponenten muß es dort + statt — heißen.

Bietet die Feldtheorie Möglichkeiten für die Lösung des Quantenproblems?

Von A. Einstein.

§ 1. Allgemeines.

Die großen Erfolge, welche die Quantentheorie nach einer Entwicklung von noch nicht einem viertel Jahrhundert aufzuweisen hat, dürfen uns nicht darüber hinwegtäuschen, daß es an einer logischen Grundlage dieser Theorie noch fehlt. Wir wissen ferner, daß jene gesuchten Grundlagen nicht einfach in einer Ergänzung der klassischen Mechanik und Elektrodynamik bestehen können; denn der aus der klassischen Mechanik folgende Äquipartitionssatz der Energie sowie die aus der klassischen Elektrodynamik folgenden Gesetze über die energetischen Eigenschaften der Strahlung stehen in unauflösbarem Widerspruch zu den Tatsachen. Es braucht nur an das Degenerieren der spezifischen Wärme bei tiefen Temperaturen und an die sekundären Prozesse erinnert zu werden, die bei der Absorption und Zerstreuung (Komptoneffekt) kurzwelliger Strahlung auftreten.

Angesichts der durch die Quantenregeln zusammengefaßten Tatsachen könnte man daran verzweifeln, durch eine konsequente Weiterentwicklung der bisherigen Theorien der Schwierigkeiten Herr zu werden. Das Wesentliche der bisherigen theoretischen Entwicklung, welche durch die Stichworte Mechanik, Maxwell-Lorentzsche Elektrodynamik, Relativitätstheorie gekennzeichnet ist, liegt darin, daß sie mit Differentialgleichungen arbeitet, welche in einem raumzeitlichen vierdimensionalen Kontinuum das Geschehen eindeutig bestimmen, wenn es für einen raumartigen Schnitt bekannt ist. In der eindeutigen Bestimmung der zeitlichen Fortsetzung des Geschehens durch partielle Differentialgleichungen liegt die Methode, durch welche wir dem Kausalgesetz gerecht werden. Angesichts der bestehenden Schwierigkeiten hat man an der Beschreibbarkeit der tatsächlichen Vorgänge durch Differentialgleichungen gezweifelt. Darüber hinaus bezweifelt man die Möglichkeit der lückenlosen Durchführung des Kausalgesetzes unter Zugrundelegung des vierdimensionalen Kontinuums von Raum und Zeit. Alle diese Zweifel sind erkenntnistheoretisch erlaubt und angesichts der bestehenden tiefen Schwierigkeiten wohl verständlich. Bevor wir aber ernsthaft so fernliegende Möglichkeiten in den Kreis der Betrachtung ziehen, müssen wir prüfen, ob wirklich aus den bisherigen Bemühungen und Tatsachen gefolgert werden muß, daß es unmöglich sei, mit partiellen Differentialgleichungen auszukommen. Jedem, der die wunderbare Sicherheit auf sich

wirken läßt, mit der die Undulationstheorie die geometrisch so verwickelten Phänomene der Interferenz und Beugung des Lichtes deutet, wird es schwer zu glauben, daß die partielle Differentialgleichung in letzter Instanz ungeeignet sei, den Tatsachen gerecht zu werden.

Betrachtet man die Maxwell-Lorentzsche Theorie kritisch, so erkennt man, daß ihr Fundament aus zwei formal nur lose miteinander zusammenhängenden Teilen besteht, nämlich aus den Differentialgleichungen des elektromagnetischen Feldes und aus den Bewegungsgleichungen des (positiven und negativen) Elektrons. Die durch die Erfahrung so trefflich bestätigten Beugungs- und Interferenzphänomene sind im wesentlichen durch die Feldgleichungen allein formal beherrscht, die Vorgänge der Absorption, welche die Theorie nicht erfahrungstreu wiederzugeben vermag, dagegen sind hauptsächlich durch das Bewegungsgesetz des Elektrons bestimmt. Es ist also ein naheliegender (oft geäußerter) Gedanke, daß man an den Feldgleichungen festzuhalten habe, die Bewegungsgleichungen für Elektronen aber aufzugeben hätte[1]. Dies würde freilich wohl auch mit sich bringen, daß man an der gewohnten Theorie der Lokalisierung der Energie im Felde nicht würde festhalten können. Diese theoretische Möglichkeit ist aus dem einfachen Grunde nicht weiter verfolgt worden, weil man bisher keinen gangbaren Weg sah, zu anderen Bewegungsgesetzen für das Elektron zu gelangen. Der Miesche Versuch, die Feldgleichungen so zu ergänzen, daß sie auch im Inneren der Elektronen gelten, hat bisher zu keinem brauchbaren Ergebnis geführt. Diese Methode hätte zu einer Vereinheitlichung der Grundlagen an sich führen können, indem sie besondere Bewegungsgleichungen für die Elektronen überflüssig gemacht hätte. Warum aber auch dieser Weg zu einer Lösung des Quantenproblems nicht entscheidend beitragen kann, wird sich aus der folgenden Überlegung ergeben, die uns zu dem nach meiner Ansicht wesentlichsten Punkt des ganzen Problems führt.

Nach den bisherigen Theorien kann der Anfangszustand eines Systems frei gewählt werden; die Differentialgleichungen liefern dann die zeitliche Fortsetzung. Nach unserem Wissen über die Quantenzustände, wie es sich insbesondere im Anschluß an die Bohrsche Theorie im letzten Jahrzehnt entwickelt hat, entspricht dieser Zug der Theorie nicht der Wirklichkeit. Der Anfangszustand eines um einen Wasserstoffkern bewegten Elektrons kann nicht frei gewählt werden, sondern diese Wahl muß den Quantenbedingungen entsprechen. Allgemein: nicht nur die zeitliche Fortsetzung, sondern auch der Anfangszustand unterliegt Gesetzen.

Kann man dieser Erkenntnis über die Naturprozesse, der wir wohl allgemeine Bedeutung zusprechen müssen, in einer auf partielle Differentialgleichungen gegründeten Theorie gerecht werden? Ganz gewiß; wir müssen nur die Feldvariabeln durch Gleichungen »überbestimmen«. Das heißt, die Zahl der Differentialgleichungen muß größer sein als die Zahl der durch sie bestimmten Feldvariabeln. (Im Falle der allgemeinen Relativitätstheorie muß

[1] Die Grundlage der Mechanik widerspricht für sich allein schon den Quantentatsachen (Versagen des Äquipartitionssatzes). Die Bewegungsgleichungen des materiellen Punktes müssen daher aufgegeben werden, ganz abgesehen von der Frage, ob man an der Feldtheorie festhalten darf oder nicht.

die Zahl der unabhängigen Gleichungen nur größer sein als die um 4 verminderte Zahl der Feldvariabeln, da gemäß dieser wegen der freien Wahl der Koordinaten die Feldvariabeln durch die Gleichungen nur bis auf 4 von ihnen bestimmt sind.) Die RIEMANNsche Geometrie zeigt uns ein schönes Beispiel von Überbestimmung, welches auch in sachlicher Beziehung zu unserem Problem zu stehen scheint. Verlangt man, daß alle Komponenten $R_{ik,lm}$ des RIEMANNschen Krümmungstensors verschwinden, so ist die Mannigfaltigkeit euklidisch, also vollkommen bestimmt und verträgt überhaupt keine »Anfangsbedingungen«. Im Kontinuum von 4 Dimensionen handelt es sich dabei um 20 algebraisch voneinander unabhängige Gleichungen, welchen die 10 Koeffizienten $g_{\mu\nu}$ der quadratischen metrischen Form genügen.

Analog versuchen wir das Geschehen im elektromagnetischen und Gravitationsfelde durch Gleichungen überzubestimmen, wobei die Möglichkeit durch folgende Bedingungen eingeschränkt werden:

1. Die Gleichungen müssen allgemein kovariant sein, und es sollen in denselben nur die Komponenten $g_{\mu\nu}$ des metrischen Feldes und $\phi_{\mu\nu}$ des elektrischen Feldes auftreten.
2. Das gesuchte Gleichungssystem muß jedenfalls dasjenige enthalten, welchem gemäß der Gravitationstheorie und MAXWELLschen Theorie Genüge geleistet wird, nämlich das Gleichungssystem

$$R_{il} = -\varkappa T_{il}$$

$$T_{il} = -\phi_{i\alpha}\phi_l^\alpha + \frac{1}{4} g_{il}\phi_{\alpha\beta}\phi^{\alpha\beta},$$

wobei R_{il} den Krümmungstensor vom zweiten Range bedeutet.
3. Das gesuchte Gleichungssystem, welches das Feld überbestimmt, muß jedenfalls jene statische, kugelsymmetrische Lösung zulassen, welche gemäß obigen Gleichungen das positive bzw. negative Elektron beschreibt.

Wenn es gelingt, das Gesamtfeld unter Erfüllung dieser drei Bedingungen durch Differentialgleichungen hinreichend überzubestimmen, so dürfen wir hoffen, daß durch diese Gleichungen auch das mechanische Verhalten der singulären Punkte (Elektronen) mitbestimmt wird, derart, daß auch die Anfangszustände des Feldes und der singulären Punkte einschränkenden Bedingungen unterworfen sind.

Wenn es überhaupt möglich ist, durch Differentialgleichungen das Quantenproblem zu lösen, so dürfen wir hoffen, auf diesem Wege zum Ziele zu kommen. Im folgenden will ich darlegen, was ich bis jetzt in dieser Richtung versucht habe, ohne behaupten zu können, daß die von mir aufgestellten Gleichungen wirklich physikalische Bedeutung besitzen. Meine Ausführungen haben ihren Zweck schon dann erreicht, wenn sie Mathematiker zur Mitarbeit veranlaßt und sie überzeugt, daß der hier eingeschlagene Weg verfolgbar ist und unbedingt zu Ende gedacht werden muß. Wie stets in der allgemeinen Relativitätstheorie ist es auch in diesem Falle schwierig, aus den Gleichungen Aufschlüsse über ihre Lösungen zu erhalten, die mit den gesicherten Ergebnissen der Erfahrung, hier speziell der Quantentheorie, verglichen werden können.

§ 2. Ableitung eines Systems von überbestimmten Gleichungen.

Wir gehen aus von dem überbestimmten Gleichungssystem

$$R_{ik,lm} = \Psi_{ik,lm}\,. \tag{1}$$

In diesem System bedeutet

$$R_{ik,lm} = g_{ij} R^j_{k,lm} = g_{ij}\left(\frac{\partial \Gamma^j_{kl}}{\partial x_m} - \frac{\partial \Gamma^j_{km}}{\partial x_l} - \Gamma^j_{\sigma l}\Gamma^\sigma_{km} + \Gamma^j_{\sigma m}\Gamma^\sigma_{kl}\right)$$

den Riemannschen Krümmungstensor (mit umgekehrten Vorzeichen als üblich, $\Psi_{ik,lm}$ einen Tensor, der homogen und vom zweiten Grade in den elektrischen Feldkomponenten $\phi_{\mu\nu}\left(= \frac{\partial \phi_\mu}{\partial x_\nu} - \frac{\partial \phi_\nu}{\partial x_\mu}\right)$ ist und dieselben Symmetrieeigenschaften hat wie $R_{ik,lm}$. Dies erreichen wir, indem wir $\Psi_{ik,lm}$ gleich einer linearen Kombination der Tensoren:

$$\Phi'_{ik,lm} = \phi_{ik}\phi_{lm} + \frac{1}{2}(\phi_{il}\phi_{km} - \phi_{im}\phi_{kl})$$

$$\Phi''_{ik,lm} = g_{il}\Phi'_{km} + g_{km}\Phi'_{il} - g_{im}\Phi'_{kl} - g_{kl}\Phi'_{im} \tag{3}$$

$$\Phi'''_{ik,lm} = (g_{il}g_{km} - g_{im}g_{kl})\,\Phi' \tag{4}$$

setzen, wobei zur Abkürzung in (3)

$$g^{km}\Phi'_{ik,lm} = \Phi'_{il} \tag{5}$$

und in (4)

$$g_{il}\Phi'_{il} = \Phi' \tag{6}$$

gesetzt ist. Es soll also sein

$$\Psi_{ik,lm} = A'\Phi'_{ik,lm} + A''\Phi''_{ik,lm} + A'''\Phi'''_{ik,lm}\,. \tag{7}$$

Aus Gründen, die bald erkennbar sein werden, geben wir den Konstanten A', A'', A''' die Werte

$$\left.\begin{aligned} A' &= -2 \\ A'' &= +\frac{2}{3} \\ A''' &= -\frac{1}{6} \end{aligned}\right\} \tag{7a}$$

Wir bemerken über die Eigenschaften des Systems (1) das Folgende. Multipliziert man mit g^{il} und summiert über die Indizes i und l, so erhält man die Gleichungen

$$R_{km} = -\left(\frac{1}{4} g_{km}\phi_{\alpha\beta}\phi^{\alpha\beta} - \phi_{k\alpha}\phi_m{}^\alpha\right). \tag{8}$$

Dies sind die bekannten, die Maxwellschen Gleichungen mit — enthaltenden Feldgleichungen der allgemeinen Relativitätstheorie, wenn außer dem Gravitationsfeld nur das elektromagnetische Feld existiert. Das System (8) hat bekanntlich die zentralsymmetrische statische Lösung[1]

[1] Vgl. H. Weyl, »Raum, Zeit, Materie« § 32.

$$\left.\begin{aligned} ds^2 &= f^2\,dt^2 - [h^2\,dr^2 + r^2(d\vartheta^2 + \cos^2\vartheta\,d\psi^2)] \\ f^2 &= \frac{1}{h^2} = 1 - \frac{2m}{r} + \frac{\varepsilon^2}{2r^2} \\ \phi_{4\alpha} &= \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\frac{\pm\varepsilon}{r}\right) \\ \phi_{23} &= \phi_{31} = \phi_{12} = 0\,. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Diese einen singulären Punkt (bzw. eine singuläre Weltlinie) aufweisende, das negative bzw. positive Elektron darstellende Lösung wollen wir gemäß den in ihr auftretenden Konstanten m (ponderable Masse) und ε (elektrische Masse) symbolisch mit

$$L(m\,,\,\varepsilon) \tag{10}$$

bezeichnen. Das von uns gesuchte System von überbestimmten Feldgleichungen muß ebenfalls die Lösung $L(m\,,\,\varepsilon)$ besitzen.

Die Gleichungen (1) selbst können das von uns gesuchte Gleichungssystem noch nicht sein. Denn gemäß ihnen ist das metrische Feld bei verschwindendem elektrischem Feld notwendig ein euklidisches. Dem entspricht es, daß bereits die SCHWARZSCHILDsche Lösung $L(m\,,\,0)$ dem Gleichungssystem (1) nicht entspricht. Dagegen habe ich mich durch Ausrechnung davon überzeugt, daß das »masse-freie« Elektron eine Lösung von (1) darstellt, d. h. $L(0\,,\,\varepsilon)$ befriedigt das System (1). Aus diesem Grunde scheint es mir, daß die gesuchten, die Überbestimmung des Feldes leistenden Gleichungen aus (1) durch Verallgemeinerung abzuleiten seien. Es bietet sich hierfür ein naheliegender Weg. Durch Einführung eines lokalen »geodätischen« Koordinatensystems beweist man nämlich leicht, daß die kovarianten Ableitungen des RIEMANNschen Tensors $R_{ik,\,lm;\,n}$ die (von BIANCHI gefundene) Identität

$$0 \equiv R_{ik,\,lm;\,n} + R_{ik,\,mn;\,l} + R_{ik,\,nl;\,m} \tag{11}$$

erfüllen. Hieraus folgt, daß in (1) die allgemeineren Gleichungen

$$\Psi_{ik,\,lmn} = \Psi_{ik,\,lm;\,n} + \Psi_{ik,\,mn;\,l} + \Psi_{ik,\,nl;\,m} = 0 \tag{12}$$

enthalten sind.

Ich halte es nun für nicht unwahrscheinlich, daß die Gleichungen (12) in Verbindung mit den ebenfalls aus (1) folgenden Gleichungen (8) der bisherigen allgemeinen Relativitätstheorie das gesuchte Gleichungssystem zur Überbestimmung des gesamten Feldes seien.

Der rechnerische Nachweis, daß $L(m\,,\,\varepsilon)$ das Gleichungssystem (12) befriedige, ist mir zwar wegen zu großer Kompliziertheit nicht möglich gewesen. Aber dies erscheint durchaus plausibel, da sowohl $L(0\,,\,\varepsilon)$ als auch $L(m\,,\,0)$ das System (12) befriedigen. Denn letzteres ist der Fall wegen Verschwindens der elektrischen Feldstärken, ersteres, weil $L(0\,,\,\varepsilon)$ eine Lösung von (1) ist. Durch Multiplikation von (12) mit $g^{il}g^{km}$ und Summation über die Indizes $iklm$ erhält man die MAXWELLschen Gleichungen.

Es besteht also eine gewisse Wahrscheinlichkeit dafür, daß die Verbindung der Systeme (12) und (8) die gesuchte Überbestimmung des Gesamtfeldes leistet. Es ergeben sich folgende Fragen:

Genügt $L(m, \varepsilon)$ dem Gleichungssystem (12)?

Bestimmt das Doppelsystem (12), (8) das mechanische Verhalten der Singularitäten?

Entsprechen die Vorgänge gemäß (12), (8) dem, was wir aus der Quantentheorie wissen?

Die letzten beiden Fragen stellen große Anforderungen an den Mathematiker, der sie lösen will; Näherungsmethoden zur Bewältigung der Bewegungsprobleme sind zu erfinden. Aber der Umstand, daß hier eine Möglichkeit zu einer wirklich wissenschaftlichen Fundierung der Quantentheorie vorzuliegen scheint, rechtfertigt große Anstrengungen. Es sei zum Schluß noch einmal betont, daß mir an dieser Mitteilung die Idee der Überbestimmung die Hauptsache ist; ich gebe gerne zu, daß die Ableitung der Gleichungen (12) keine so zwingende ist, als man wünschen möchte.

Nachtrag zur Korrektur. Die erste der oben gestellten Fragen hat unterdessen ihre Beantwortung gefunden. Hr. Dr. Grommer hat durch direkte Ausrechnung festgestellt, daß die Lösung $L(m, \varepsilon)$ dem Gleichungssystem (12) Genüge leistet.

Ausgegeben am 15. Januar 1924.

SITZUNGSBERICHTE

DER PREUSSISCHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

1923

XXXIV. Gesamtsitzung. 20. Dezember.

Vorsitzender Sekretar: Hr. Rubner.

*Hr. Schlenk sprach: Über alkaliorganische Verbindungen.

Der Vortragende berichtete in zusammenfassender Weise über seine Arbeiten auf dem Gebiet der alkaliorganischen Verbindungen.

Von Synthesen, welche mit Hilfe alkaliorganischer Verbindungen ausgeführt worden sind, wurden speziell zwei solche eingehender besprochen, welche zu stereochemisch interessierenden Produkten führten.

In dem einen Falle handelte es sich um ein Derivat des Anthracens. Die Addition von Natrium an Anthracen läßt die Entstehung zweier isomerer Produkte möglich erscheinen, welche sich im Verhältnis von cis-trans-Isomeren befinden:

Na H / C … C / Na H — cis-Form

Na H / C … C / H Na — cis-trans-Form

Tatsächlich konnte das Auftreten dieser beiden Isomeren nachgewiesen werden. Denn die Behandlung von Dinatriumdihydroanthracen mit Kohlendioxyd führte zu zwei Dihydroanthracendicarbonsäuren, welche sich in Löslichkeit und Kristallform unterscheiden und von denen die eine (leicht lösliche) durch kurzes Erhitzen in die andere (schwer lösliche) übergeht.

Im zweiten Fall handelt es sich um Einwirkungsprodukte von Stickoxyd auf Triphenylmethylnatrium, denen auf Grund ihrer Zusammensetzung und ihres Verhaltens die Formeln

$$\begin{array}{c}(C_6H_5)_3C-N=O\\ \| \\ NaON\end{array} \quad \text{bzw.} \quad \begin{array}{c}(C_6H_5)_3C-N=O\\ \| \\ NONa\end{array}$$

zukommen.

Intensitäts- und Richtungsmessungen der durchdringenden Strahlung.

Von Dr. Werner Kolhörster
in Berlin.

III. Teil gemeinsam mit Gubert v. Salis.

(Mitteilung aus der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt.
Vorgelegt von W. Nernst am 25. Oktober 1923 [s. oben S. 295].)

Hierzu Taf. V.

Auf Freiballonaufstiegen in den Jahren 1913 und 1914 hatte ich die durchdringende Strahlung bis 9300 m Höhe gemessen und dabei festgestellt, daß sie vom zweiten Höhenkilometer an dauernd und gesetzmäßig anwächst. Sie übertrifft z. B. in 3000, 4000 und 5000 m die Bodenwerte um 4, 9, 17 Ionen $cm^{-3} sec^{-1}$[1] und ist ungefähr eine Zehnerpotenz härter als die härtesten bekannten γ-Strahlen von RaC bzw. ThD, wie ich zuerst durch Bestimmung ihres Absorptionskoeffizienten nachweisen konnte. Weiteren Aufschluß über die so interessante Erscheinung versprach ich mir schon damals nur von eingehenden Beobachtungen auf hohen Berggipfeln[2]. Denn erst in diesen Höhen erreicht die Strahlung gut meßbare Intensitäten, während die bei Luftfahrten unvermeidlichen Störungen, wie starke und schnelle Luftdruck- und Temperaturschwankungen, und der stichprobenartige Charakter derart gewonnener Ergebnisse fortfallen.

Während des Krieges veröffentlichte Gockel[3] Beobachtungen aus dem Berner Oberland, die meine Ballonergebnisse bestätigten, und Hess und Kofler[4] eine ganzjährige Messungsreihe vom Obir (1900 m) in Kärnten. Mir bot sich Gelegenheit zu einer 1¹/₄jährigen Dauerbeobachtung in Waniköi (120 m)[5], die wegen der geringen Seehöhe allerdings nur als Vorarbeit, besonders zum Studium der Erdstrahlung im Zusammenhang mit den meteorologischen Faktoren, diente. Die dabei gefundenen ausgeprägten jährlichen und täglichen Schwankungen von Erd- und Luftstrahlung zeigten, daß direkte Messungen der Höhenstrahlung in einigermaßen zugänglichen Berglagen erst nach Ausschaltung dieser

---

[1] Im folgenden wird der Ausdruck: Ionen $cm^{-3} sec^{-1}$ durch den Buchstaben J abgekürzt werden.

[2] W. Kolhörster, Abh. d. Nat. Ges. zu Halle. Halle a. S. 1914. W. Kolhörster, Verh. d. Dt. Phys. Ges. **16**, 719, 1914.

[3] A. Gockel, Phys. Ztschr. **16**, 345, 1915.

[4] V. F. Hess und M. Kofler, Phys. Ztschr. **18**, 585, 1917.

[5] W. Kolhörster, Zt. f. Physik **11**, 379, 1922.

beiden Komponenten erfolgversprechend sein konnten. Das bestätigte sich auch bald an den Beobachtungen Marsdens[1] auf dem Ruapehu in Australien. Weil er die Erdstrahlung nicht abschirmte, gelang es ihm wahrscheinlich nicht, die Ionisationszunahme zwischen 1300 und 2800 m Höhe nachzuweisen.

Bekanntlich setzt sich die gesamte Zerstreuung in einem zylindrischen Ionisationsgefäß zusammen aus der Wirkung der von außen die Wände durchsetzenden Strahlung der radioaktiven Substanzen der Luft (Luftstrahlung), der radioaktiven Substanzen des Erdbodens (Erdstrahlung) und der Wirkung der Höhenstrahlung, wozu dann noch die Eigenstrahlung des Gefäßes kommt. Diese ist die Ionisation, die man findet, sobald der Apparat vollständig von genügend dicken, inaktiven Schichten umgeben ist, die die Wirkung der eben genannten andern drei Strahlungen aufheben.

Die Ergebnisse meiner Ballonversuche hatten inzwischen zu verschiedenen Hypothesen über den Ursprung der Höhenstrahlung geführt, von der man jedoch übereinstimmend annahm, daß sie nicht aus der Troposphäre stammen könne[2]. Verlegt man ihren Ausgangspunkt an die Grenze der Troposphäre oder in noch höhere Luftschichten (Wigand, Linke, Bergwitz[3]), so müßte man in Anbetracht der harten Strahlen dort noch gänzlich unbekannte, stark radioaktive Substanzen voraussetzen. Ähnlich hohe Aktivitäten wären auch Sonne, Mond, Planeten oder Fixsternen zuzuschreiben, wenn diese als Quelle in Betracht kämen (v. Schweidler[4]). Jedoch ist, wie Nernst[5] neuerdings hervorhob, eine merkliche Wirkung in diesem Falle kaum zu erwarten. Denn derartig aktive Substanzen werden infolge ihres hohen Atomgewichtes sich nur im Innern der dichteren Gestirne vorfinden, ihre Strahlen also schon absorbiert sein, noch ehe sie zur Oberfläche gelangen. Nur Sterne von geringer Dichte, wie Nebelsterne, »Urmaterie« u. dgl. dürften sich so bemerkbar machen. Die neueren experimentellen Befunde scheinen nach dieser Richtung zu deuten, da z. B. ein direkter Einfluß des Sonnenstandes, oder ein Unterschied zwischen Tag und Nacht oder eine Änderung der Gesamtstrahlung bei Sonnenfinsternissen nie wahrgenommen wurde[6]. Dagegen ist zur Zeit des Durchganges des Halleyschen Kometen durch die Erdbahn an verschiedenen Orten unzweifelhaft eine Erhöhung der Ionisation der erdnahen Luftschichten beobachtet worden[7]. Da für die erstere Auffassung der Höhenstrahlung als einer aus den höheren Atmosphärenschichten stammenden bisher keinerlei direkte Andeutung gefunden wurde, so sprechen die augenblicklichen Verhältnisse mehr zugunsten einer kosmischen Erklärung, für die Nernst (l. c.) neue Gesichtspunkte geltend gemacht hat, die einer experimentellen Nachprüfung zugänglich erscheinen. Auf Veranlassung von Hrn. Prof. Nernst, der

[1] E. Marsden, Terr. Magn. und Atm. El. **27**, 101, 1922.

[2] W. Kolhörster. Das Weltall 14, 97; 118, 1914.

[3] F. Linke, Met. Ztschr. **33**, 157, 1916. K. Bergwitz, Met. Ztschr. **33**, 310, 1916. F. Linke, Met. Ztschr. **33**, 510, 1916.

[4] E. v. Schweidler, Elster und Geitel, Festschrift Braunschw. 1915.

[5] W. Nernst, Das Weltgebäude im Lichte d. neuer. Forschg. Berlin 1923, S. 36 u. S. 59.

[6] M. de Broglie, C. R. **154**, 1654, 1913. F. V. Hess und M. Kofler, Phys. Ztschr. **18**, 585, 1917. K. Kähler, Phys. Ztschr. **21**, 324, 1920. W. Kolhörster. Naturwiss. **7**, 412, 1919. Zt. f. Phys. 11, 379, 1922. J. J. Mauchly. Terr. Magn. und Atm. El. **24**, 87, 1919. L. Palazzo, Mem. Soc. degli Spectr. Ital. 8, 1919.

[7] A. Wigand, Phys. Ztschr. **18**, 1, 1917.

mir in dankenswerter Weise die Mittel der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt zur Verfügung stellte, nahm ich daher die Arbeiten in diesem Sinne wieder auf.

I. Instrumente.

Das zu den Beobachtungen der Höhenstrahlung im Ballon bisher ausschließlich verwendete Wulfelektrometer bedarf einer Temperaturkompensation, die vermieden werden sollte. Deswegen mußte eine neue Elektrometeranordnung benutzt werden, die ebenfalls kleinste Kapazität, hohe Stromempfindlichkeit bei guter Stabilität, vor allem aber Konstanz der Ablesungen bei sehr starken Temperaturschwankungen auch ohne Verwendung einer Kompensation aufweist. Dem schien eine, von mir bereits 1913 gegebene, aber damals nicht ausgeführte Anordnung zu genügen.

Die beim Wulfelektrometer geradlinig gespannten Fäden wurden in Form freitragender Schlingen zu beiden Seiten eines ganz dünnen, schmalen Metallblechstreifens als Träger befestigt. Sie bilden zwei kongruente, in der Horizontalen bewegliche, vertikal stehende Schleifen, die sich bei Ladung spreizen, wobei als Gegenkraft gegen die elektrischen Abstoßungskräfte die Biegungselastizität des Quarzes dient. Der Ausschlag wird mikroskopisch mit Okularskala in der Mitte der Schlingen abgelesen, die im Gesichtsfeld als zwei Fäden erscheinen. Indem man den Schlingenträger auf ein passend gebogenes Quarzröhrchen aufsetzt, das seinerseits von der Objektivfassung getragen wird, bleibt der Objektivabstand auch bei wechselnder Temperatur unverändert, so daß der abgelesene Ausschlag von weitestgehenden Temperaturänderungen unabhängig ist.

Diese Elektrometer sind viel handlicher als die üblichen Fadenelektrometer, ihre Kapazität liegt unter 1 cm, und die Voltempfindlichkeit kann je nach Wahl der Fäden verändert werden. Die Proportionalität zwischen Ausschlag und Spannung ist innerhalb weiter Grenzen gewährleistet.

Derartige Elektrometersysteme wurden nunmehr in Zerstreuungszylinder aus Zink eingebaut, in der das Quarzrohr als Träger der isolierten Innenelektrode dient. Die Aufladung erfolgt durch eine, in eingeschliffenem Konus drehbare Ladesonde, und zum Trockenhalten des Füllgases wurde, wie stets, Natrium verwandt; vier Instrumente sind nacheinander in folgenden Abmessungen hergestellt worden:

Tabelle 1.

Apparat Nr.	Zylinder Höhe in cm	Zylinder Durchmesser in cm	Volumen in cm^3	Wandstärke in cm	Innenelektrode Länge in cm	Innenelektrode Durchmesser in cm	Kapazität des isolierten Systems in cm	Mittlere Voltempfindlichkeit in Volt/Skalenteil
5	25.8	14.2	4080	0.2	14.0	0.2	1.58	2.5
6	22.7	20.2	7090	0.2	9.0	0.2	0.97	2.0
7	26.0	13.9	3950	0.3	14.0	0.2	1.55	2.5
8	22.2	20.1	7015	0.3	9.0	0.2	1.01	1.5

Besondere Sorgfalt ist auf die Wahl des zu den Ionisationszylindern zu verwendenden Metalls zu legen. In erster Linie muß man auf möglichst niedrige Reststrahlung in den Zerstreuungsgefäßen achten, damit ihr gegenüber die schwache Ionisation der durchdringenden Strahlung genügend zur Geltung kommt, sodann erst wird man deren Wirkung selbst zu steigern versuchen. Unter diesem Gesichtspunkte angestellte Beobachtungen erstreckten sich auf handelsübliche Bleche aus Aluminium, Kupfer, Messing, Messing vernickelt, Eisen, Weißblech, Eisen verzinkt und Zink; mit allen diesen Metallen wurden die Wandungen des Zinkkondensators Nr. 7 ausgelegt und der Reihe nach die natürliche Zerstreuung bestimmt. Unter den gleichen Bedingungen wurde ferner die von einem schwachen Radiumpräparat erzeugte Ionisation gemessen. Aus beiden Beobachtungen ergab sich dann, daß Eisen, Eisen verzinkt und Zink am günstigsten und nahezu gleich gut waren. Da sich Zink nach den früheren Erfahrungen auch auf die Dauer gut bewährt hatte, so wurde es als Material beibehalten. Weitere grundsätzliche Änderungen gegenüber den von mir seinerzeit benutzten Konstruktionen wurden nicht getroffen, kam es doch jetzt ebenso wie früher darauf an, die Instrumente so einfach wie nur möglich herzustellen, wodurch Störungen auf Transport und Reisen am besten vorzubeugen war.

Was die Meßtechnik betrifft, so verfährt man in der Weise, daß die negativ geladenen Elektrometer etwa von Stunde zu Stunde abgelesen werden. Aus der Eichkurve sind zu den Ablesungen die Voltzahlen zu entnehmen, deren Differenz durch die verflossene Zeit dividiert, den Quotienten $\frac{dV}{dt}$ ergibt. Dann ist unter Voraussetzung des Sättigungsstromes die Ionisierungsstärke

$$N = \frac{1}{300} \cdot \frac{C}{e \cdot \mathfrak{V}} \cdot \frac{dV}{dt} = F \cdot \frac{dV}{dt} \text{ Ionen cm}^{-3} \text{ sec}^{-1},$$

wobei C die Kapazität in cm, $\mathfrak{V}$ das meßbare Gasvolumen des Kondensators, e die Elementarladung $= 4 \cdot 77 \cdot 10^{-10}$ elektrostatische Einheiten bedeutet und $F = \frac{1}{300} \cdot \frac{C}{e\mathfrak{V}}$ ist.

Als Zeit der Messung gilt die mittlere Zeit zwischen den beiden Ablesungen, aus denen N bestimmt wird.

Es wird also zunächst immer die gesamte Ionisierungsstärke beobachtet, die nach Abzug der Eigenstrahlung die Stärke der durchdringenden Strahlung ergibt. Die Eigenstrahlung ist nahezu konstant, solange nicht der Zylinder geöffnet wird oder sonstige Eingriffe an dem Instrument vorgenommen werden[1]. Sie braucht daher nur von Zeit zu Zeit bestimmt zu werden, indem man z. B. den Apparat in Wasser versenkt und die dort vorhandene Ionisierungsstärke beobachtet.

---

[1] W. Kolhörster, Zt. f. Physik **11**, 379. 1922.

Fig. 1.

Im Verlauf der Versuche hat es sich als notwendig erwiesen, die Ergebnisse verschiedener Apparate miteinander zu vergleichen. Dabei ist zu beachten, daß die Empfindlichkeit der Instrumente für γ-Strahlen nicht allein durch Kapazität und Voltempfindlichkeit bestimmt ist, sondern daß auch das Material, aus dem das Gehäuse besteht, eine wesentliche Rolle spielt. So ist z. B. die durch dasselbe Präparat in einem aus Blei gefertigten Apparate erzeugte Ionisation etwa doppelt so groß als in einem aus Aluminium, aber sonst vollkommen gleichartig hergestellten. Da zudem die geometrische Form der Zylinder geringe Änderungen bedingt, so vergleicht man nach einem Vorschlage von Prof. Geiger verschiedene Meßinstrumente am einfachsten in der Weise, daß man die von 1 mg Radium in 10 m Abstand von der Mitte des Instrumentes hervorgerufene Ionisierungsstärke ermittelt. Sie betrug für die Instrumente Nr. 5 und Nr. 8 während der Versuchsdauer $K_5 = 5.5$ J; $K_8 = 4.5$ J; $\frac{K_5}{K_8} = 1.22$.

II. Absorptionsversuche in geringer Seehöhe.

Versuche wurden hier in Berlin im Landwehrkanal hinter der Tiergartenschleuse und im Schleppkanal der Preußischen Versuchsanstalt für Wasserbau und Schiffbau gemacht[1]. Wegen der geringen Wassertiefe konnten sie nur zur Orientierung und Erprobung der Apparate dienen. Mit Eintritt günstigerer Witterung wurde daher auf dem Müggelsee an einer 6 m tiefen, auf dem Sakrowsee[2] an einer 12 m tiefen Stelle gemessen. Wie Tabelle 2 und Figur 1

[1] Für die Überlassung der Geräte und notwendigen Behelfe möchte ich dem Direktor der Preußischen Versuchsanstalt für Wasserbau und Schiffbau, Hrn. Oberbaurat Krey, auch an dieser Stelle besonders danken.

[2] Am Sakrowsee wurden mir die Hilfsmittel des Instituts für Meereskunde in dankenswerter Weise zur Verfügung gestellt.

zeigen, ist die Abnahme der Ionisation für gleiche Wassertiefe im »Kanal« größer als auf dem »See«, worin sich wahrscheinlich der Einfluß der Uferstrahlung ausdrückt, die auf den Seen wegfällt.

Tabelle 2.

Kanal			See	
Landwehrkanal Wassertiefe 3 m, Jan. 1923 Appar. 5, Luftfüllung	Schleppkanal Wassertiefe 4 m, Febr. 1923 Appar. 5, Luftfüllung	Schleppkanal Wassertiefe 4 m, März 1923 CO_2-Füllung	Müggelsee Wassertiefe 6 m, Mai 1923 App. 6, CO_2-Füllung	Sakrowsee Wassertiefe 12 m, Juni 1923, App. 6, CO_2-Füllung
Differenz gegen Oberfläche:				
1 m Tiefe 1.6 J	1.3 m 1.2 J	0.8 m 0.6 J	1.1 m 0.62 J	1.1 m 0.48 J
1.5 » » 2.2 »	2.2 » 1.8 »	1.5 » 0.7 »	2.4 » 1.25 »	2.4 » 1.24 »
	2.9 » 2.1 »	2.5 » 1.4 »	4.4 » 1.75 »	5.0 » 2.08 »
		2.9 » 2.1 »		

Ein Vergleich mit den für γ-Strahlen des Th D berechneten Absorptionskurven für verschiedene Anfangsintensität (1, 2, 3 J; $\mu_{H_2O} = 3.3 \cdot 10^{-2}$ cm^{-1}) ergibt einen ganz beträchtlichen Unterschied. So ist z. B. die Abnahme bis zu 2 m Wassertiefe bei weitem nicht so stark, als sie gefunden werden würde, wenn die gesamte, zur Abschirmung gelangte Strahlung von diesen Substanzen herrühren sollte; auch dürfte die Strahlung unter 1 bis 1.5 m kaum mehr abnehmen, was doch offenbar der Fall ist. Für die γ-Strahlen des Ra C ($\mu_{H_2O} = 3.9 \cdot 10^{-2}$ cm^{-1}) ist der Unterschied natürlich noch größer. Aus den Seeversuchen berechnet sich der Absorptionskoeffizient zu $\mu_{H_2O} = 2 \cdot 10^{-3}$ cm^{-1}, während meine früheren Ballonversuche (auf gleiche Masse reduziert) $\mu_{H_2O} = 5 \cdot 10^{-3}$ cm^{-1} ergeben hatten, eine nach der Lage der Umstände befriedigende Übereinstimmung, wenn man die geringe Intensität berücksichtigt (etwa 2 J), mit der die Höhenstrahlung — und um diese dürfte es sich handeln — am Boden auftritt. Wie man sich aber auch zur Bewertung dieser Ergebnisse stellen mag, auf jeden Fall wird die Existenz einer bedeutend härteren Strahlung als die bisher bekannte härteste γ-Strahlung aufs neue bestätigt.

III. Absorptionsversuche in größeren Höhen

(Versuche gemeinsam mit Gubert von Salis).

Dem Entgegenkommen der Jungfraubahn A.-G. verdanken wir die Möglichkeit, die Untersuchungen am Eigergletscher (2300 m) und am Jungfraujoch (3550 m) weiterführen zu können. Die Apparate 5 und 8 waren in Berlin mit vollständig trockener Kohlensäure bei 756 mm Hg 0° gefüllt und beobachtet worden. Sie standen an den Beobachtungsorten (Eigergletscher und Jungfraujoch) unter einem dauernden inneren Überdruck von 170 bzw. 250 mm Hg. Irgendein Einfluß hat sich deswegen nicht bemerkbar gemacht. Insbesondere ergab die Stromeichung keine, die Volteichung nur eine ganz geringe Empfindlichkeitsänderung, hervorgerufen durch die längere Bahnfahrt nach der Schweiz. Die Kondensatoren haben, wie auch die Konstanz der Einstellungen immer wieder bewies, vollständig dicht gehalten.

Die Versuche hatten als erstes Ziel, die Absorption der Höhenstrahlung in Eis zu messen. Hierzu eignete sich die am Fuße des Eigergletschers flach in das Firneis getriebene Höhle von ungefähr 20 m Länge, 2 m Höhe und $1^1/_2$ m Breite. Sie verläuft etwa Nord–Süd mit Mündung zur Rotstockwand im Norden, die über 300 m entfernt ist. Die Deckenschicht der Höhle nimmt vom Eingang an ständig zu. Sie betrug 6 und 12 m vom Eingang 1.5 bzw. 3 m, wovon mindestens 20 cm Firnschnee, das übrige dichteres Firneis waren. Ihre Dichte kann daher kaum mehr als 0.9 (bezogen auf Wasser), betragen. Die Instrumente wurden direkt am Eingang und in 6 und 12 m Entfernung von ihm innerhalb der Höhle längere Zeit abwechselnd beobachtet. Als Differenzen gegen die am Eingang auf Eis unter Abschirmung der Erdstrahlung gemessene Ionisierungsstärke wurden gefunden:

Eigerhöhle

Absorbierende Schicht	1.5 m	3 m
Apparat 5	3.1 J	3.7 J
Apparat 8	2.04 »	2.58 »,

woraus der Absorptionskoeffizient $\mu_{H_2O} = 1.6 \cdot 10^{-3}$ cm^{-1} auf Wasser umgerechnet folgt.

Die Versuche wurden unfern der Station Jungfraujoch in 3550 m Seehöhe unter möglichst gleichartigen Bedingungen in der Jochhöhle wiederholt. Sie verläuft in Richtung SSW–NNO im Gletscher, der sich an die Südwand der Sphinx anlehnt. In ihr wurde der Apparat 8 etwa 3 m vom Eingang unter einer Absorptionsschicht von 1.5 und, 18 m vom Eingang unter einer Schicht von mehr als 15 m beobachtet. Zwischen diesem Platz und dem Eingang ergab sich eine Differenz von 4.08 J.

Nimmt man zunächst an, daß in der Eigerhöhle die Höhenstrahlung bereits von der 3 m dicken Schicht völlig absorbiert ist — tatsächlich nur bis 16 Prozent —, so macht die durch die verschiedene Höhenlage bedingte Luftdruckdifferenz von 80 mm Hg einen Unterschied von 4.08 J gegen 2.58 J aus. Danach wäre der auf Wasser umgerechnete Absorptionskoeffizient $\mu_{H_2O} = 3.96 \cdot 10^{-3} \cdot$ cm^{-1} oder, korrigiert wegen der erwähnten unvollständigen Absorption,

$$\mu_{H_2O} = 2.6 \cdot 10^{-3} \text{cm}^{-1},$$

in guter Übereinstimmung mit den oben mitgeteilten Messungen.

Die Möglichkeit, die Dichte der absorbierenden Eisschicht genauer zu bestimmen, bot sich bei Untersuchungen in Gletscherspalten. Eine geeignete Spalte war auf dem »Plateau«, dem Rücken des Gletschers, der das eigentliche Jungfraujoch bedeckt, vorhanden. Der Gletscher fließt nach Süden zu in den Jungfraufirn- und Aletsch-, nach Norden zu in den Guggigletscher ab. Dementsprechend ist die Eismasse auf dem Plateau von ost-westlich gerichteten, engen und stark verwehten Spalten durchzogen. Nach Osten zu lehnt sich das Eis an die Wand der Sphinx an, nach Westen fällt es ziemlich steil, um etwa 100 m nach der Mathildenspitze und dem Jungfraumassiv ab.

Da das ganze Gebiet stark vereist ist, so ist die Erdstrahlung gut abgeschirmt. Kahle Felswände, die noch strahlen könnten, sind über einen Kilometer entfernt.

Es wurde eine fast genau Ost–West gerichtete Spalte in der Mitte des Plateau begangen, zugänglich gemacht und gesichert. Ihre Breite am oberen Rande betrug 1.4 m und erweiterte sich während der Meßdauer von 14 Tagen bis auf 1.6 m. Sie zog sich weit über das Plateau hin, war durch Schneebrücken teilweise versperrt, was sich bei Sturm als günstig erwies, und mündete im Westen auf den Abfall zur Mathildenspitze hin aus. Nach Osten, etwa

Fig. 2.

Schnitt: Ost-West

Schnitt: Nord-Süd

10 m vom Einstieg entfernt, lief sie mit zwei anderen, engeren Spalten zusammen, unter Bildung einer Eishöhle, auf deren Grunde eine Eiskammer zur Aufnahme der Instrumente eingepickelt wurde. Von dort bis zur Oberfläche betrug die gemessene Dicke der Eisschicht 9.7 m (s. Fig. 2).

Über den Einstieg zur Spalte wurden Bretter zum Aufstellen der Instrumente in $2^1/_2$ und $4^1/_2$ m Tiefe vom oberen Rande horizontal in die Spalte eingeklemmt, und in der Höhe der letzteren wieder eine Eiskammer wie in 9.7 m Tiefe eingeschlagen, in der die Instrumente gegen die Einstrahlung von dem Rande der Spalte her vollständig geschützt stehen konnten. Manchmal mußte eine größere, aus dünnen Brettern bestehende Kiste zum Schutz der Instrumente gegen Treibschnee oder Vereisung gebraucht werden. Sie war dauernd nötig in der Tiefe 9.7 m, wo durch herabsickerndes Schmelzwasser in kürzester Zeit alles dick vereiste, was dem Schmelzwasser ausgesetzt war.

Dank den Schneebrücken war man in der Spalte gegen starken Wind ziemlich geschützt, nur an einem Abend mußten die Messungen abgebrochen

werden, weil es bei dem Sturm nicht mehr möglich war, von der Station zum Joch zu gelangen. Sonst aber war das Wetter für die Messungen außerordentlich günstig. So konnte z. B. die ganztägige Beobachtungsreihe auf der Oberfläche an einem Tage mit dicker, jedoch genügend hoher Wolkendecke (etwa 400 m über Joch) ausgeführt werden, so daß ein Einfluß von Wärmestrahlung vollständig ausgeschlossen ist. Ebenso hielten sich auch bei stärkster Sonnenstrahlung Luft und Apparattemperatur in der Spalte fast konstant und schwankten nur langsam zwischen — 1 und + 3°. Neuschnee mit seiner starken Aktivität fiel nur vereinzelt und so wenig, daß er wohl kaum von Einfluß sein konnte. Auch von Treibschnee, der fast inaktiv ist, gab es nicht viel, weil er bei der hohen Einstrahlung bald verharrschte. So konnten denn die Beobachtungen an den genannten Stellen alle 1—2 Stunden dauernd durchgeführt werden, wobei an jedem Ort mindestens 24 Stunden hintereinander gemessen wurde.

Ein Beweis für das regelmäßige Arbeiten der Apparate ist die gute Konstanz der Mittelwerte, die die Instrumente an ganz verschiedenen Tagen ergaben, wenn sie wieder an dieselben Orte gebracht wurden. Z. B.:

	Apparat 5	Apparat 8
Jochhöhle 19. 7. 23	20.9 J	9.88 J
30./31. 7. 23	21.0 J	9.42 J
Jochspalte Tiefe 4.5 m		
20./21. 7. 23	21.9 J	10.17 J
29./30. 7. 23	22.1 J	10.43 J
Jochspalte Tiefe 2.5 m		
24. 7. 23	23.1 J	11.89 J
26. 7. 23	23.0 J	11.87 J

Bei der großen Härte der Höhenstrahlung war anzunehmen, daß die Tiefe 9,7 m noch nicht zur völligen Absorption genügte, wie sich ja auch aus dem Wert in der Jochhöhle bei über 15 m allseitiger Eisschicht ergab, der noch um 0.4 J kleiner war. Es wurde daher dieser als Wert der Eigenstrahlung angenommen, und da Apparat 5 an dieser Stelle der Jochhöhle nicht beobachtet worden war, so ist der für ihn in Betracht kommende Wert errechnet worden.

Wie man aus der Tabelle 3 ersieht, erhält man für Apparat 8 in 9.7 m Tiefe 0.40 J, daher für Apparat 5: $0.40 \cdot 1.24 = 0.5$ J, (1.24 ist das Mittel aus dem Verhältnis der Ionisierungsstärken von Instrument 5 und 8 bei Messungen am Joch.) Danach wäre der Wert für Apparat 5 in der Jochhöhle bei 15 m Eisdicke $20.0 - 0.5 = 19.5$ J.

Tabelle 3.

	Apparat 8	Apparat 5
Jochhöhle 15 m Eis: Eigenstrahlung	8.42	(19.5)
Jochspalte 9.7 » » : Höhenstrahlung	0.40	0.5
» 4.5 » » : »	1.09	1.9
Oberfläche 3550 » Seehöhe »	4.08	5.6

Daraus errechnet sich der Absorptionskoeffizient der Höhenstrahlung zu $\mu_{H_2O} = 2.7 \cdot 10^{-3}$ cm^{-1}, wenn man die Dichte des Gletschereises zu 0.926 an-

nimmt. An Eisstücken aus 3 und 4 m Tiefe war als Dichte 0.923—0.929 gefunden worden.

Betrachten wir die in Tabelle 4 zusammengestellten Ergebnisse, so wird der wahrscheinlichste Wert

Tabelle 4.

Messungen bei		Absorptionskoeffizient	Abschirmung
Seehöhe	40 m	$\mu_{H_2O} = 2 \cdot 10^{-3}\ cm^{-1}$	Wasser
»	2300 »	» $= 1.6 \cdot 10^{-3}\ cm^{-1}$	Eis
»	3550 »	» $= 2.6 \cdot 10^{-3}\ cm^{-1}$	Luft
»	3550 »	» $= 2.7 \cdot 10^{-3}\ cm^{-1}$	Eis
Wahrscheinlicher Wert		$= 2.5 \cdot 10^{-3}\ cm^{-1}$	

für den Absorptionskoeffizienten der Höhenstrahlung $2.5 \cdot 10^{-3}\ cm^{-1}$. Damit dürfte nunmehr die Existenz einer noch unbekannten, sehr harten Strahlung in 2300 und 3500 m Seehöhe außer allen Zweifel gesetzt sein. Sie ist keineswegs identisch mit irgendeiner bisher beobachteten γ-Strahlung der bekannten radioaktiven Elemente.

Aus den mit den beiden Apparaten auf dem Jungfraufirn gemessenen Intensitäten ergibt sich das Verhältnis $\frac{K_5}{K_8} = 1.24$, also nahezu gleich mit dem für die γ-Strahlen des RaC gefundenen $\frac{K_5}{K_8} = 1.22$. Es ist dies wohl die erste, mit der Höhenstrahlung direkt vorgenommene Vergleichung zweier Instrumente und die erste unmittelbare Andeutung dafür, daß es sich bei der Höhenstrahlung — wie natürlich schon längst angenommen — um eine γ-Strahlung handelt.

Neuerdings neigt man immer mehr der Ansicht zu, die Höhenstrahlung als eine Erscheinung aufzufassen, deren Ursprung im Kosmos zu suchen ist. Dann kann man über ihre Verteilung am Himmelsgewölbe ganz verschiedene Voraussetzungen machen, die sich aber stets zwischen den beiden Grenzfällen halten müssen, daß die Strahlung entweder den Raum gleichmäßig erfüllt oder aus irgendwelchen bevorzugten Gegenden desselben kommt. Entsprechen die Verhältnisse mehr letzterer Annahme, so wird man, ebenso wie bei jener, keine Änderungen mit der Tageszeit erwarten können, wenn es sich um eine Strahlungsquelle in der Nähe der Himmelspole handelt; in jedem anderen Falle aber müßten sich tägliche Schwankungen bemerkbar machen, am stärksten natürlich bei engbegrenzten, strahlenden Gebieten, die mit der Erdrotation auf- und untergehen. Dies letztere scheint nun nach den bisherigen Dauerbeobachtungen im Flachlande oder in geringen Höhen nicht der Fall zu sein; doch waren die Versuchsanordnungen zur Entscheidung dieser Frage nicht ausreichend. Bei stärkerer Strahlungsintensität, auch in größeren Höhen, wäre es jedoch nicht ausgeschlossen, daß allein schon die Atmosphäre hinreichen würde, die seitlich eintretende Strahlung so zu absorbieren, daß Schwankungen auftreten, je nachdem die strahlenden Gebiete den Zenith passieren oder tief am Horizont stehen. Unter diesen Umständen, und zumal, wenn es sich noch um ausgedehnte Teile des Himmels handeln sollte, werden scharf ausgeprägte

Maxima und Minima natürlich nicht zu erwarten sein, da ja die Luft für die Strahlung ein ebenso trübes Medium wie Nebel für Sonnenlicht ist. Immerhin könnten sich jedoch bei einer Strahlungsintensität von etwa 6 J in Jochhöhe kleine Schwankungen an der Oberfläche ergeben. Diese dürften dann in der Eiskammer, wo die Strahlung durch die 9.7 m dicke Eisschicht bis auf 5 Prozent absorbiert ist und nur noch 0.3 J beträgt, nicht mehr auftreten, in einer Zwischenlage wie bei 4.5 m absorbierender Eisschicht (74 Prozent Absorption, Intensität 1.5) vielleicht noch angedeutet sein.

Die Ergebnisse der ganztägigen Messungen sind in Taf. V gezeichnet. Dabei wurden als Abszissen die mittleren Zeiten zwischen den Beobachtungen (in 24 stündiger Zählung von Mitternacht an, bezogen auf M. E. Z.), als Ordinaten die zugehörigen Differenzen der Ionisierungsstärken gegen den Mittelwert der Beobachtungsreihe eingetragen. Die mit Apparat 8 erhaltenen Differenzen sind zur Reduktion auf die Angaben des Apparates 5 mit $1.24 = \frac{K_5}{K_8}$ multipliziert worden. Als graphische Interpolation der für Apparat 5 und 8 ausgezogenen Kurven wurde die gestrichelte Kurve eingezeichnet.

Bei aller Reserve, die wir uns wegen der Streuung der Einzelwerte in der Deutung der Beobachtungen vorläufig noch auferlegen müssen, scheinen die Oberflächenwerte Maxima zwischen $8-9^h$ und $20-21^h$ zu ergeben. Da Luft- und Apparattemperatur während der ganzen Beobachtungszeit nur zwischen $-1°$ und $3°$ schwankten, sind irgendwelche Temperatureinflüsse von vornherein ausgeschlossen. Die maximale Amplitude beträgt nicht ganz 1 J, also rund 15 Prozent der Intensität der Höhenstrahlung.

Demgegenüber ist der ruhige und gleichmäßige Gang der Strahlung in Tiefe 9.7 m zu beachten, der also damit zugunsten der Realität der an der Oberfläche gefundenen Schwankungen spricht, ebenso wie der für die Tiefe 4.5 m vorausgesagte Verlauf, bei dem sich die Extreme noch anzudeuten scheinen.

Um eine schärfere Ausblendung einzelner Teile des Himmels zu erzielen, wurden die Instrumente mitten in der Jochspalte in 4.5 m und 2.5 m Tiefe vom oberen Rande beobachtet. Dadurch wird ein fast genau Ost–West gerichteter Streifen von 9° bzw. 16° Breite des Himmelsgewölbes frei gelassen. Jedoch liegen hier die Verhältnisse so verwickelt, daß bei der geringen Strahlungsstärke aus den Schwankungen zunächst kaum etwas entnommen werden kann. Die auf der Oberfläche beobachteten Maxima sind vielleicht angedeutet, scheinen jedoch durch andere überlagert. Sollten diese reell und vielleicht durch die Orientierung der Spalte bedingt sein, so müßten sie in einer anders gerichteten Spalte zu entsprechend verschobenen Zeiten auftreten. Versuche wurden daher noch am Eingange der Jochhöhle gemacht, in einer solchen Aufstellung, daß dadurch ein nach Südsüdwesten gerichteter schmaler Streifen des Himmelsgewölbes frei blieb. Tatsächlich scheinen hier Maxima gegen 1 und 13^h neben dem von 8^h angedeutet, doch ist auch hier ebenso wie in der Spalte bei der geringen Strahlungsintensität nur auf die zeitliche Verschiebung der Extreme etwas zu geben, die im angedeuteten Sinn zu erfolgen scheint. Aus der Intensitätsabnahme bei $2^1/_2$ und $4^1/_2$ m Tiefe in der Spalte kann man schließen,

0h 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24h

Oberfläche Jungfraujoch
Apparat 5 Mittelwert 25.0 J
Apparat 8 Mittelwert 12.56 J

Jochspalte Eiskammer 9.70 m Tiefe
Apparat 5 Mittelwert 20.0 J
Apparat 8 Mittelwert 8.82 J

Jochspalte Eiskammer 4.50 m Tiefe
Apparat 5 Mittelwert 21.4 J
Apparat 8 Mittelwert 9.51 J

Jochspalte 4.50 m Tiefe
Apparat 5 Mittelwert 22.1 J
Apparat 8 Mittelwert 10.43 J

Jochhöhle
Apparat 5 Mittelwert 21.0 J
Apparat 8 Mittelwert 9.42 J

W. Kolhörster: Intensitäts- und Richtungsmessungen der durchdringenden Strahlung.

daß für die Strahlung an der Oberfläche nur ein kleiner Teil des Himmelsgewölbes, ein Kreis von etwa 50° Durchmesser um den Zenith, in Frage kommt.

Wir können also wohl sagen, daß die Höhenstrahlung in 3500 m Seehöhe periodische Schwankungen zeigt, deren Minimum mit der Kulmination des Pols der Milchstraße zeitlich zusammenfällt, während das Morgenmaximum mit der Kulmination der Milchstraße, das Abendmaximum mit der des Herkules (also ebenfalls in der Nähe der Milchstraße) einzutreten scheint. Auf keinen Fall zeigt sich, wie bereits zu erwarten war, irgendein direkter Einfluß der Sonne auf die Strahlungsintensität.

Wir sind uns völlig darüber klar, wollen es aber ausdrücklich an dieser Stelle nochmals wiederholen, daß die letzten Beobachtungen nur unter allem Vorbehalt gegeben werden können. Wir betrachten sie als erste orientierende Schritte in der Richtung, in der wir die Höhenstrahlung weiter zu untersuchen gedenken.

Zusammenfassend ist zu betonen, daß die Existenz einer harten γ-Strahlung mit einem, um rund eine Zehnerpotenz kleineren Absorptionskoeffizienten als dem der härtesten bekannten γ-Strahlen erwiesen ist.

Die Quelle der Strahlung scheint in der Nähe der Milchstraße zu liegen oder wenigstens dort ein Maximum zu besitzen; hierdurch gewinnt indirekt die Annahme eine Stütze, daß jene Strahlung kosmischen Ursprungs ist, wofür ja auch ihre außerordentliche Härte spricht.

Wie schon oben angedeutet, war die Veranlassung dieser Arbeit die Prüfung der Auffassung, daß in jungen Sternen der Sitz einer Radioaktivität vorhanden sein könnte, die von größerer Härte sein könnte als die der uns bekannten radioaktiven Elemente. Da die roten Riesensterne bekanntlich als die jüngsten Sterne gelten und sich (ebenso wie Nebelmassen) vorwiegend in der Nähe der Milchstraße vorfinden, so liefern die hier mitgeteilten Messungen für die obige, von Prof. Nernst (l. c.) geäußerte Auffassung eine Stütze, die allerdings, wie noch einmal betont sei, noch weiterer experimenteller Bearbeitung bedürftig sein wird.

Schließlich möchte ich noch hervorheben, daß durch die Munifizenz der Kaiser-Wilhelm-Gesellschaft für Physik, ferner des Hrn. Dr. A. Curti in Zürich und besonders durch das überaus große Entgegenkommen und die fortlaufende Unterstützung seitens der Leitung der Jungfraubahn, insbesondere ihres Präsidenten, Hrn. Prof. L. v. Salis, und des Direktors Hrn. A. Liechti, die vorliegende Untersuchung ermöglicht wurde. Den genannten Donatoren, ferner auch Hrn. Prof. Geiger, der in den langwierigen Vorarbeiten mich mit größter Liebenswürdigkeit unterstützt hat, schließlich auch Hrn. Prof. Nernst, der die Arbeit angeregt und die Mittel zur Expedition zu verschaffen sich bemüht hat, möchte ich hiermit meinen Dank zum Ausdruck bringen.

NAMEN- UND SACHREGISTER.

Ausgegeben am 15. Januar 1924.

Berlin, gedruckt in der Reichsdruckerei.

§ 17.

Eine für die akademischen Schriften bestimmte wissenschaftliche Mitteilung darf in keinem Falle vor ihrer Ausgabe an jener Stelle anderweitig, sei es auch nur auszugsweise oder auch in weiterer Ausführung, in deutscher Sprache veröffentlicht sein oder werden. Sollte eine dem zuwiderlaufende Veröffentlichung dem redigierenden Sekretar vor der Ausgabe in den akademischen Schriften zur Kenntnis kommen, so hat er die Mitteilung aus diesen zu entfernen.

Wenn der Verfasser einer aufgenommenen wissenschaftlichen Mitteilung dieselbe anderweitig früher zu veröffentlichen beabsichtigt, als ihm dies nach den geltenden Rechtsregeln zusteht, so bedarf er dazu der Einwilligung der Gesamtakademie.

Gedächtnisreden anderweitig zu veröffentlichen, ist den Verfassern unbeschränkt gestattet.

Aus § 21.

Die Sitzungsberichte erscheinen in einzelnen Stücken in der Regel Donnerstags acht Tage nach jeder Sitzung.

Aus § 22.

Jeden Sitzungsbericht eröffnet eine Übersicht über die in der Sitzung vorgetragenen wissenschaftlichen Mitteilungen und über die zur Veröffentlichung geeigneten geschäftlichen Angelegenheiten.

Hinter den Titeln der wissenschaftlichen Mitteilungen folgen in dieser Übersicht kurze Inhaltsangaben derselben, welche die Verfasser einreichen, und für welche sie verantwortlich sind. Diese Inhaltsangaben sollen sich in der Regel auf 5—6 Druckzeilen beschränken, keinesfalls 10 Zeilen überschreiten.

Die nicht in den Schriften der Akademie erscheinenden Mitteilungen werden mit vorgesetztem Stern bezeichnet, bei den für die Abhandlungen bestimmten wird »(Abh.)« zugefügt.

Wissenschaftliche Mitteilungen fremder Verfasser werden in dem Bericht über diejenige Sitzung aufgeführt, in welcher deren Aufnahme in die akademischen Schriften endgültig beschlossen wird.

Aus § 27.

Das Manuskript einer in einer akademischen Sitzung am Donnerstag zur Aufnahme in die Sitzungsberichte zugelassenen Mitteilung, welche am nächsten Donnerstag gedruckt erscheinen soll, muß der Regel nach in der Sitzung selber, spätestens bis Freitag 10 Uhr morgens, dem redigierenden Sekretar oder der Reichsdruckerei druckfertig zugestellt werden. Später eingereichte Manuskripte werden, mit dem Präsentationsvermerk des redigierenden Sekretars oder des Archivars versehen, für ein späteres Stück zurückgelegt.

Dasselbe kann von vornherein mit Mitteilungen geschehen, deren Satz aus irgendwelchen Gründen besondere Schwierigkeiten erwarten läßt, oder welche den in den §§ 3 und 4 enthaltenen Bestimmungen nicht entsprechen.

Die Reichsdruckerei sendet die Korrekturen an das Bureau der Akademie, das sie an die Verfasser oder an die Mitglieder, welche die Mitteilung vorgelegt haben, weiterreicht. Die Verfasser schicken die Korrekturabzüge nach Berichtigung an das Bureau der Akademie zurück und erhalten und erledigen auf dem gleichen Wege auch die etwa erforderlichen weiteren Korrekturen. Wird die Korrektur länger als bis Dienstag Abend von der damit betrauten Person behalten, so hat diese es zu verantworten, wenn die Mitteilung in einem späteren Stück erscheint.

Nach auswärts werden Korrekturen nur auf Verlangen versandt; die Verfasser verzichten damit auf Erscheinen ihrer Mitteilung nach acht Tagen. Fremden Verfassern, deren Korrekturen erst noch dem vorlegenden Mitgliede zur Revision unterbreitet werden müssen, kann das Erscheinen am nächsten Ausgabetage überhaupt nicht zugesichert werden.

Aus § 36.

Die Akademie behält sich das Recht vor, von einer vergriffenen Abhandlung eine zweite Auflage zu veranstalten.

Sitzungsberichte der Akademie

Physikalisch-mathematische Klasse

Preis des Jahrgangs . . . . ℳ 9.—

Sonderabdrucke. II. Halbjahr 1922

K. W. Wagner: Der physikalische Vorgang beim elektrischen Durchschlag von festen Isolatoren ℳ 0.30
E. Gehrcke und E. Lau: Über das Vielliniensspektrum des Wasserstoffs (hierzu Taf. II und III) » 0.30
Correns: Vererbungsversuche mit buntblättrigen Sippen. VI. Einige neue Fälle von Albomaculatio. VII. Über die *peraurea*-Sippe der *Urtica urens* . . . . » 0.60

Sonderabdrucke. I. Halbjahr 1923

Hellmann: Störungen im jährlichen Gange der Temperatur in Deutschland . . . . ℳ 0.30
v. Laue: Die Lösungen der Feldgleichungen der Schwere von Schwarzschild, Einstein und Trefftz und ihre Vereinigung . . . . » 0.30
Einstein: Zur allgemeinen Relativitätstheorie . . . . » 0.30
A. Ostrowski: Einige Bemerkungen über Singularitäten Taylorscher und Dirichletscher Reihen » 0.30
G. Pólya: Über die Existenz unendlich vieler singulärer Punkte auf der Konvergenzgeraden gewisser Dirichletscher Reihen . . . . » 0.30
Zimmermann: Die Größen s und t der Knicktheorie . . . . » 0.30
Fick: Über die Zwischenrippenmuskeln . . . . » 0.30
Schottky: Über die Gleichung $U^2((du)^2+(dv)^2)+W^2(dw)^2 = (dx)^2+(dy)^2+(dz)^2$ . . . . . » 0.60
W. Nernst und W. Noddack: Zur Theorie photochemischer Vorgänge . . . . » 0.30
J. Eggert und W. Noddack: Zur Prüfung des photochemischen Äquivalentgesetzes an Trockenplatten. II . . . . » 0.30
Schur: Über den Zusammenhang zwischen einem Problem der Zahlentheorie und einem Satz über algebraische Funktionen . . . . » 0.30
Einstein: Zur affinen Feldtheorie . . . . » 0.30
Hellmann: Über den Ursprung der volkstümlichen Wetterregeln (Bauernregeln) . . . . . . » 0.60

Sonderabdrucke. II. Halbjahr 1923

A. Ostrowski: Über Potenzreihen, die überkonvergente Abschnittsfolgen besitzen . . . . . . ℳ 0.30
Zimmermann: Die Formänderungen gekrümmter Stäbe durch Druck . . . . » 0.30
H. Rademacher: Über die Anwendung der Viggo Brunschen Methode auf die Theorie der algebraischen Zahlkörper . . . . » 0.30
Fick: Über die Maßverhältnisse der Hand mit Angaben über die Hände von W. v. Waldeyer-Hartz † (hierzu Taf. I und II) . . . . » 0.60
E. Gehrcke und E. Lau: Das Vielliniensspektrum des Wasserstoffs, zweite Mitteilung. Mit einem Zusatz über das kontinuierliche Spektrum (hierzu Taf. III) . . . . » 0.30
Rubner: Die Beziehung des Kolloidalzustandes der Gewebe für den Ablauf des Wachstums . . » 0.30
Zimmermann: Die Knickfestigkeit von Stäben mit nicht gerader Achse. Eine Erweiterung der Eulerschen Knicktheorie . . . . » 0.60
Haberlandt: Über die Ursache des Ausbleibens der Reduktionsteilung in den Samenanlagen einiger parthenogenetischer Angiospermen (hierzu Taf. IV) . . . . » 0.30
Hellmann: Physiognomie des Regens in der gemäßigten und in der Tropenzone . . . . » 0.60
Schmidt: Über den Jordanschen Kurvensatz . . . . » 0.30
v. Laue: Zur Theorie der von glühenden Metallen ausgesandten positiven Ionen und Elektronen » 0.30
Planck: Die Energieschwankungen bei der Superposition periodischer Schwingungen . . . . . » 0.30
Einstein: Bietet die Feldtheorie Möglichkeiten für die Lösung des Quantenproblems? . . . . . » 0.30
W. Kolhörster: Intensitäts- und Richtungsmessungen der durchdringenden Strahlung. III. Teil gemeinsam mit Gerbert v. Salis (hierzu Taf. V) . . . . » 0.30

Auf alle Preise wird ein Teuerungszuschlag nach der jeweiligen Schlüsselzahl erhoben.